

Modèle Cinématique Direct du Manipulateur SCARA à 4 DDL

Robotique Industrielle, M1 3EA (RoVA)

F. Morbidi – Avril 2019

Exercice:

1. Déterminer le jacobien géométrique $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ du manipulateur SCARA à 4 DDL montré dans la Figure 1 ci-dessous.

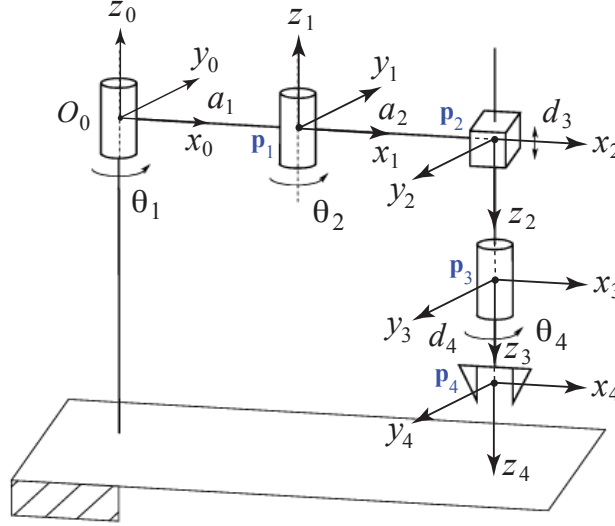


Figure 1: Manipulateur SCARA à 4 DDL.

2. Identifier les singularités cinématiques du manipulateur en étudiant le rang de la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{q})$. Préciser de quel type de singularité s'agit-il et dessiner le robot dans la configuration correspondante.

Solution:

1. Nous avons déjà calculé le modèle géométrique direct du manipulateur SCARA à 4 DDL. Ce modèle nous servira de base pour le calcul de la cinématique directe. Pour rappel, nous avons trouvé que,

$$\mathbf{T}_4^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(\theta_1) \mathbf{A}_2^1(\theta_2) \mathbf{A}_3^2(d_3) \mathbf{A}_4^3(\theta_4) = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -(d_3 + d_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4]^T$,

$$\mathbf{A}_1^0(\theta_1) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_z(\theta_1) & \begin{matrix} a_1 \cos \theta_1 \\ a_1 \sin \theta_1 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2^1(\theta_2) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_z(\theta_2)\mathbf{R}_x(\pi) & \begin{matrix} a_2 \cos \theta_2 \\ a_2 \sin \theta_2 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3^2(d_3) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et

$$\mathbf{A}_4^3(\theta_4) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_z(\theta_4) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le robot possède 3 articulations rotoïdes et 1 articulation prismatique. Par conséquent, le jacobien géométrique sera une matrice 6×4 avec la structure suivante,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_1} & \mathbf{J}_{P_2} & \mathbf{J}_{P_3} & \mathbf{J}_{P_4} \\ \mathbf{J}_{O_1} & \mathbf{J}_{O_2} & \mathbf{J}_{O_3} & \mathbf{J}_{O_4} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

La formule, dérivée en cours,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_i} \\ \mathbf{J}_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est prismatique,} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est rotoïde,} \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

nous permet de récrire (1) comme suit,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{z}_3 \end{bmatrix}.$$

Pour compléter le travail, il nous reste à calculer les vecteurs \mathbf{z}_0 , \mathbf{z}_1 , \mathbf{z}_2 et \mathbf{z}_3 (c'est-à-dire, les vecteurs unitaires des axes des 4 articulations) et les vecteurs \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_3 et \mathbf{p}_4 (c'est-à-dire, les coordonnées des origines des repères 0, 1, 3 et 4, écrites par rapport au repère 0 de la base). Ces vecteurs peuvent être déterminés facilement à partir du modèle géométrique direct du robot, en fait:

- \mathbf{z}_{i-1} est donné par la 3^e colonne de la matrice de rotation \mathbf{R}_{i-1}^0 , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$,
- $\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_4$ est donné par les 3 premiers éléments de la 4^e colonne de la matrice de transformation $\mathbf{T}_e^0 = \mathbf{T}_4^0$,
- \mathbf{p}_{i-1} est donné par les 3 premiers éléments de la 4^e colonne de la matrice de transformation \mathbf{T}_{i-1}^0 , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Avant de passer au calcul de ces vecteurs, en examinant la Figure 1 on peut observer que le vecteur \mathbf{z}_3 est parallèle au vecteur $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3$, et donc leur produit vectoriel est zéro,

$\mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3) = \mathbf{0}$. Nous avons obtenu ce résultat par voie géométrique, mais comme on le verra plus bas, nous arriverons à la même conclusion par voie purement algébrique.

Nous obtenons ainsi que,

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 \\ a_1 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ -d_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ -(d_3 + d_4) \end{bmatrix},$$

où \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_3 et \mathbf{p}_4 sont donnés par les 3 premiers éléments de la 4^e colonne des matrices $\mathbf{T}_1^0 = \mathbf{A}_1^0$, \mathbf{T}_3^0 et \mathbf{T}_4^0 , respectivement. Nous disposons déjà de la première et de la dernière matrice, où les vecteurs qui nous intéressent ont été marqués en bleu, mais on doit calculer la matrice,

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0(\theta_1) \mathbf{A}_2^1(\theta_2) \mathbf{A}_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & -c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où, à nouveau, le vecteur recherché, \mathbf{p}_3 , est marqué en bleu. Nous pouvons maintenant passer au calcul des autres quatre vecteurs manquants,

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

où \mathbf{z}_1 , \mathbf{z}_2 et \mathbf{z}_3 sont donnés par la 3^e colonne des matrices de rotation \mathbf{R}_1^0 , \mathbf{R}_2^0 et \mathbf{R}_3^0 , respectivement. Nous avons déjà la première et la dernière matrice, où les vecteurs qui nous intéressent ont été marqués en rouge cette fois-ci, mais nous devons calculer la matrice \mathbf{R}_2^0 pour trouver \mathbf{z}_2 (en rouge ci-dessous),

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0(\theta_1) \mathbf{R}_2^1(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si on assemble toutes les pièces, nous avons que,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ -(d_3 + d_4) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 c_{12} \\ a_2 s_{12} \\ -(d_3 + d_4) \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_4 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

On rappelle ici que le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ et $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$ génériques, est défini par,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}.$$

De façon équivalente, nous avons aussi que,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{S}(\mathbf{v})$ dénote la matrice antisymétrique associée au vecteur \mathbf{v} .

Enfin, après avoir calculé les trois produits vectoriels dans (2), nous trouvons l'expression finale du jacobien,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 \sin \theta_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & 0 \\ a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Remarque: Seulement les 4 lignes du jacobien différents de zéro sont importantes. Elles sont relatives aux composantes v_x , v_y , v_z et ω_z du vecteur des vitesses de l'effecteur du robot $\mathbf{v}_e = [\dot{\mathbf{p}}_e, \omega_e]^T \in \mathbb{R}^6$.

2. Pour calculer les singularités cinématiques du manipulateur SCARA, on peut se restreindre à la sous-matrice $\mathbf{J}'_P(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ du jacobien $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ suivante,

$$\mathbf{J}'_P(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 \sin \theta_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On peut calculer facilement le déterminant de $\mathbf{J}'_P(\mathbf{q})$ car elle est une matrice diagonale par blocs. Ce calcul nous donne,

$$\det(\mathbf{J}'_P(\mathbf{q})) = -a_2 c_{12}(-a_1 s_1 - a_2 s_{12}) - a_2 s_{12}(a_1 c_1 + a_2 c_{12}) = -a_1 a_2 \sin \theta_2,$$

où le résultat final a été obtenu en appliquant des identités trigonométriques. Nous avons que $\det(\mathbf{J}'_P(\mathbf{q})) = 0$, si

- (a) $\theta_2 = 0$ (le robot est complètement étendu),
- (b) $\theta_2 = \pi$ (le robot est complètement rétracté).

En conclusion, les singularités cinématiques du robot SCARA à 4 DDL sont tous les vecteurs $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4]^T$ où $\theta_1, d_3 \geq 0$ et θ_4 sont quelconques et $\theta_2 \in \{0, \pi\}$. Il faut remarquer qu'il s'agit de singularités de **type 1**, car elles apparaissent aux limites du volume de travail du robot.