

Modèle Géométrique Direct d'un Manipulateur Planaire à 3 DDL

Robotique Industrielle, M1 3EA (RoVA)

F. Morbidi – Mars 2019

Exercice :

1. Déterminer les paramètres de Denavit-Hartenberg du manipulateur planaire à 3 DDL montré dans la Figure 1, dont les repères (rouges) ont été déjà positionnés.
2. Calculer le modèle géométrique direct du manipulateur.

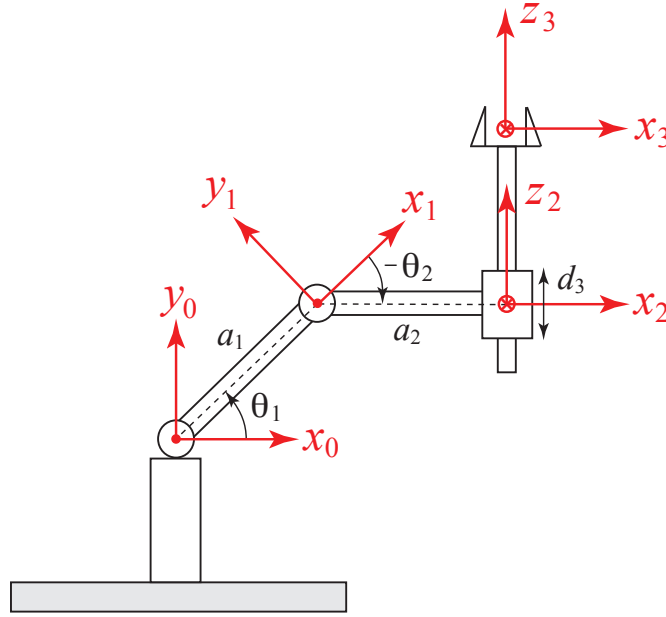


FIGURE 1 – Manipulateur planaire à 3 DDL.

Solution :

1. Notre manipulateur est un robot de type RRP et le vecteur des variables articulaires est $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3]^T$. Les paramètres de Denavit-Hartenberg du robot sont présentés dans le Tableau 1. Pour déterminer le modèle géométrique direct du manipulateur, il faudra calculer les trois matrices de transformation : $\mathbf{A}_1^0(\theta_1)$, $\mathbf{A}_2^1(\theta_2)$ et $\mathbf{A}_3^2(d_3)$. La première matrice, $\mathbf{A}_1^0(\theta_1)$, est donnée par,

$$\mathbf{A}_1^0(\theta_1) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{R}_z(\theta_1) & a_1 \cos \theta_1 & a_1 \sin \theta_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La deuxième transformation, la transformation rigide entre le repère 2 et le repère 1, a la forme suivante,

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	$-\pi/2$	0	$-\theta_2$
3	0	0	d_3	0

TABLE 1 – Paramètres de Denavit-Hartenberg du manipulateur planaire à 3 DDL.

$$\mathbf{A}_2^1(\theta_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_z(-\theta_2)\mathbf{R}_x(-\pi/2) & a_2 \cos(-\theta_2) & a_2 \sin(-\theta_2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & a_2 \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & -a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

La troisième transformation est assez simple, car le repère 3 et le repère 2 sont alignés et il existe uniquement une translation d'une longueur d_3 entre les deux. La transformation $\mathbf{A}_3^2(d_3)$ est donc,

$$\mathbf{A}_3^2(d_3) = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{I}_3 & 0 & 0 & d_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

En conclusion, le modèle géométrique direct du manipulateur, c'est-à-dire la matrice de transformation homogène $\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q})$ entre le repère 3 et le repère 0, est,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) &= \mathbf{A}_1^0(\theta_1)\mathbf{A}_2^1(\theta_2)\mathbf{A}_3^2(d_3) \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \cos(\theta_1 - \theta_2) & 0 & -\sin(\theta_1 - \theta_2) & -d_3 \sin(\theta_1 - \theta_2) + a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_1 \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 & \cos(\theta_1 - \theta_2) & d_3 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Le repère 3 n'est pas un repère admissible pour l'effecteur. Pour y remédier, il faut multiplier à droite $\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q})$ par la matrice de transformation constante (une rotation pure autour de l'axe z),

$$\mathbf{T}_e^3 = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_z(-\pi/2) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$