

# Robotique Industrielle

UPJV, Département EEA

M1 3EA, Parcours RoVA, EC15

**Fabio MORBIDI**

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail: [fabio.morbidi@u-picardie.fr](mailto:fabio.morbidi@u-picardie.fr)

**Lundi 13h30-16h30 (CM ou TD, salle CURI 305)  
(TP, salle TP204)**

**Année Universitaire 2021-2022**



# Plan du cours

## Chapitre 1 : Introduction

- 1.1 Définitions
- 1.2 Constituants d'un robot
- 1.3 Classification des robots
- 1.4 Caractéristiques d'un robot
- 1.5 Générations de robots
- 1.6 Programmation des robots
- 1.7 Utilisation des robots



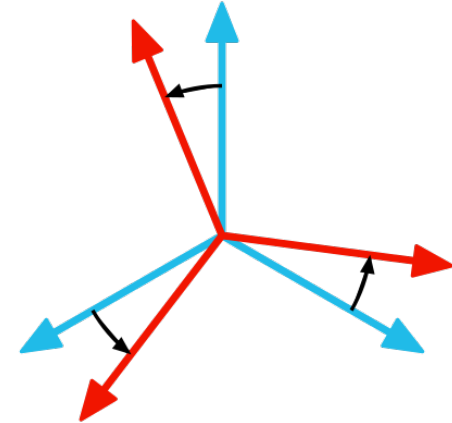
## Chapitre 2 : Fondements Théoriques

- 2.1 Pose d'un corps rigide
  - Matrices de rotation et autres représentations de l'orientation
  - Transformations homogènes

# Plan du cours

## 2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



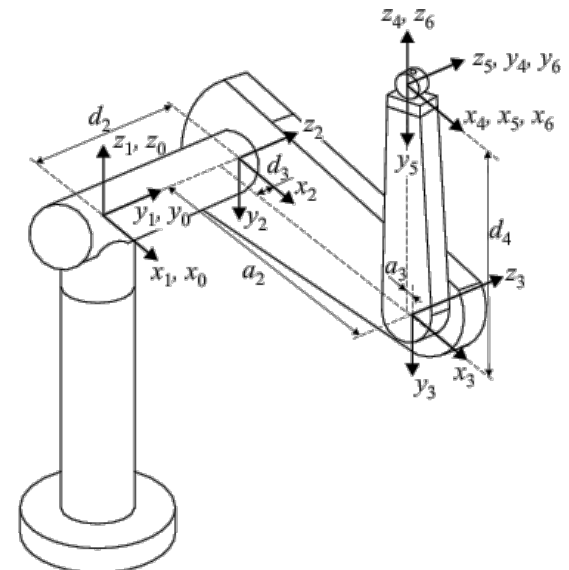
## Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

### 3.1 Modèle géométrique

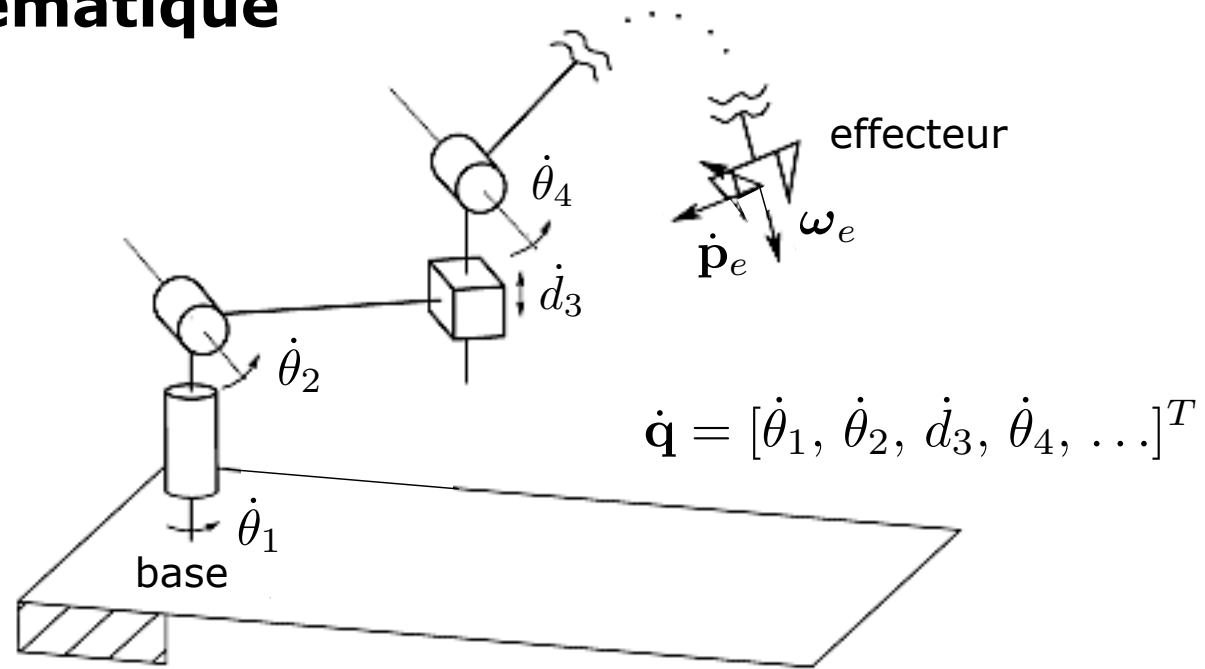
- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

### 3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



# Modèle cinématique



Le **modèle cinématique** nous donne la relation entre les *vitesse*s des articulations  $\dot{\mathbf{q}}$  et la *vitesse* linéaire  $\dot{\mathbf{p}}_e$  et angulaire  $\boldsymbol{\omega}_e$  de l'effecteur d'un robot (par rapport au repère de la base)

L'application  $\dot{\mathbf{q}} \longrightarrow (\dot{\mathbf{p}}_e, \boldsymbol{\omega}_e)$  est décrite par une matrice, le **jacobien géométrique**, qui dépend de la configuration  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  du manipulateur



# Jacobien d'un manipulateur

- Le jacobien est l'un des outils les plus importants pour la caractérisation d'un manipulateur
- En effet, le jacobien est utile pour:
  - Déterminer les singularités d'un robot
  - Étudier la redondance d'un robot
  - Développer des algorithmes pour le calcul du MGI
  - Décrire la relation entre les forces appliquées sur l'effecteur et les forces résultantes sur les articulations d'un robot
  - Dériver les équations dynamiques du mouvement d'un robot
  - Concevoir des lois de commande dans l'espace opérationnel

## Rappel:

Soit  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Le jacobien de  $\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_m]^T$  est une matrice  $m \times n$  définie par:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

# Jacobien d'un manipulateur

Considérons un manipulateur avec  $n$  articulations. Nous pouvons écrire le *modèle géométrique direct* comme:

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$  est le vecteur des variables articulaires.

La position et l'orientation de l'effecteur *varie* avec  $\mathbf{q}$ .

**Objectif:** exprimer la vitesse linéaire  $\dot{\mathbf{p}}_e$  et la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}_e$  de l'effecteur du robot en fonction des vitesses des articulations  $\dot{\mathbf{q}}$

**Remarque:** Les trois composantes  $v_x, v_y, v_z$  de  $\dot{\mathbf{p}}_e$  et les trois composantes  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  de  $\boldsymbol{\omega}_e$ , représentent les composantes de la vitesse linéaire et angulaire de l'effecteur du robot par rapport au *repère de la base*, respectivement

# Jacobien d'un manipulateur

Les relations cherchées sont toutes les deux *linéaires* par rapport aux vitesses des articulations  $\dot{\mathbf{q}}$  :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_e &= \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_e &= \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

où

$\mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  : matrice qui relie la contribution des vitesses des articulations  $\dot{\mathbf{q}}$  à la *vitesse linéaire* de l'effecteur  $\dot{\mathbf{p}}_e$

$\mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  : matrice qui relie la contribution des vitesses des articulations  $\dot{\mathbf{q}}$  à la *vitesse angulaire* de l'effecteur  $\boldsymbol{\omega}_e$

# Jacobien d'un manipulateur

Sous une forme compacte:

$$\mathbf{v}_e \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad \text{Équation de la cinématique d'un manipulateur}$$

La matrice

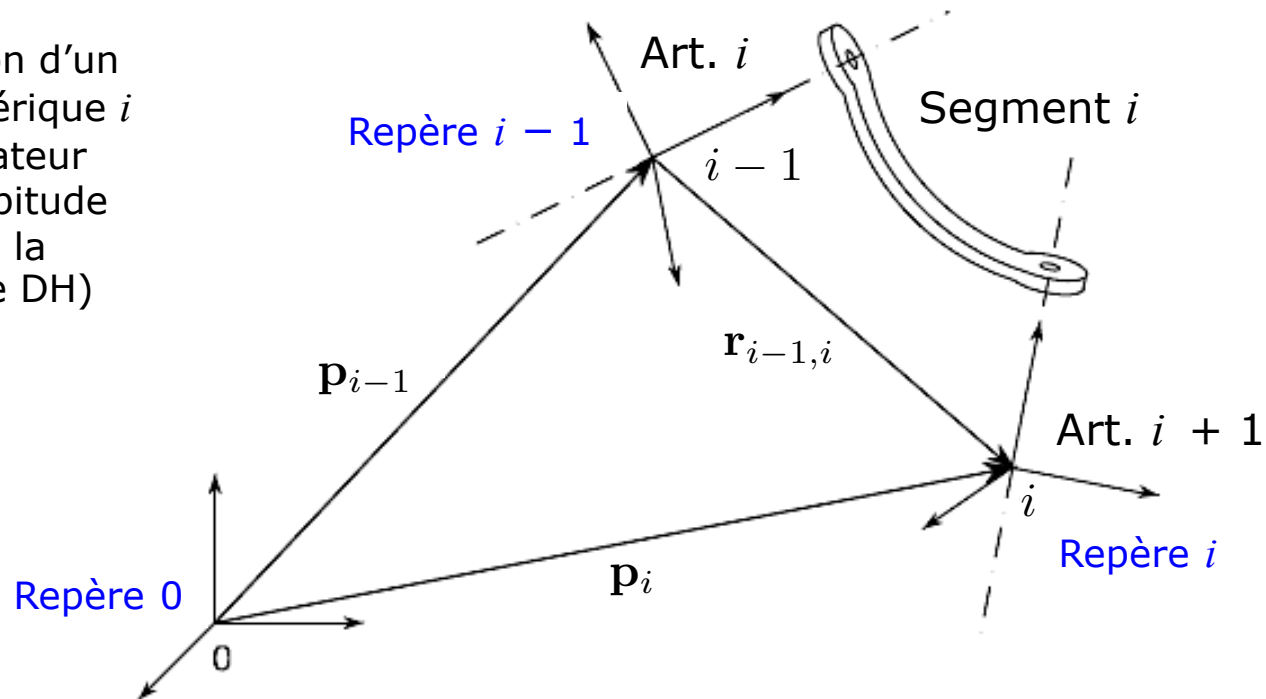
$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

est le **jacobien géométrique** d'un manipulateur  
(une fonction du vecteur des variables articulaires  $\mathbf{q}$ )

**Objectif:** étant donné un manipulateur, calculer *explicitement* son jacobien géométrique. Dans ce but, nous utiliserons les propriétés des *matrices de rotation* et la *cinématique du corps rigide* vues dans le Chapitre 2.2

# Vitesse des segments d'un robot

Caractérisation d'un segment générique  $i$  d'un manipulateur (comme d'habitude nous utilisons la convention de DH)



Soient:

$\mathbf{p}_{i-1}$ ,  $\mathbf{p}_i$  : positions des origines des repères  $i-1$  et  $i$  exprimées dans le repère 0

$\mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}$  : position de l'origine du repère  $i$  par rapport au repère  $i-1$  exprimée dans le repère  $i-1$

**Assumptions:** Les repères 0 et  $n$  sont les repères de la *base* et de l'*effecteur* du robot. On omettra l'indice "0" pour les quantités exprimées dans le repère 0

# Vitesse des segments d'un robot

On trouve que:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}$$

$\mathbf{R}_{i-1}$  : rotation  
du repère  $i - 1$  par  
rapport au repère 0

Si on calcule la dérivée par rapport au temps de cette équation  
et on utilise les formules vues dans le Chapitre 2.2, nous avons que:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} \\ &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}\end{aligned}$$

où

$\mathbf{v}_{i-1,i}$  : vitesse de l'origine du repère  $i$  par rapport à l'origine du repère  $i - 1$

**Conclusion:** nous avons ainsi trouvé l'expression de la **vitesse linéaire**  
du segment  $i$  en fonction de la **vitesse linéaire** et **angulaire** du segment  $i - 1$ :

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

# Vitesse des segments d'un robot

Pour la **vitesse angulaire** du segment  $i$ , on part de la formule de composition de deux rotations:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1}$$

Si on calcule la dérivée par rapport au temps de cette équation et on utilise les formules vues dans le Chapitre 2.2, nous trouvons que:

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{R}_i = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i^{i-1}$$

où

$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)$  : matrice antisymétrique associée au vecteur  $\boldsymbol{\omega}_i$

$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}$  : vitesse angulaire du repère  $i$  par rapport au repère  $i - 1$   
exprimée dans le repère  $i - 1$

On peut récrire le 2<sup>e</sup> terme à droite dans l'équation précédente comme (rappel l'identité:  $\mathbf{R} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R} \boldsymbol{\omega})$ ):

$$\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i^{i-1} = \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \underbrace{\mathbf{R}_{i-1}^T \mathbf{R}_{i-1}}_{\mathbf{I}_3} \mathbf{R}_i^{i-1} = \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i$$

# Vitesse des segments d'un robot

Nous avons ainsi trouvé la relation:

$$\mathbf{S}(\omega_i) \mathbf{R}_i = \mathbf{S}(\omega_{i-1}) \mathbf{R}_i + \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1} \omega_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i$$

à partir de laquelle, si on se concentre sur les *arguments* de la matrice  $\mathbf{S}(\cdot)$ , on déduit que:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \omega_{i-1,i}^{i-1} = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}$$

**Conclusion:** nous avons ainsi trouvé l'expression de la **vitesse angulaire** du segment  $i$  en fonction de la **vitesse angulaire** du segment  $i - 1$  et de la **vitesse angulaire** du repère  $i$  par rapport au repère  $i - 1$

---

Attention: on obtient une *expression différente* pour

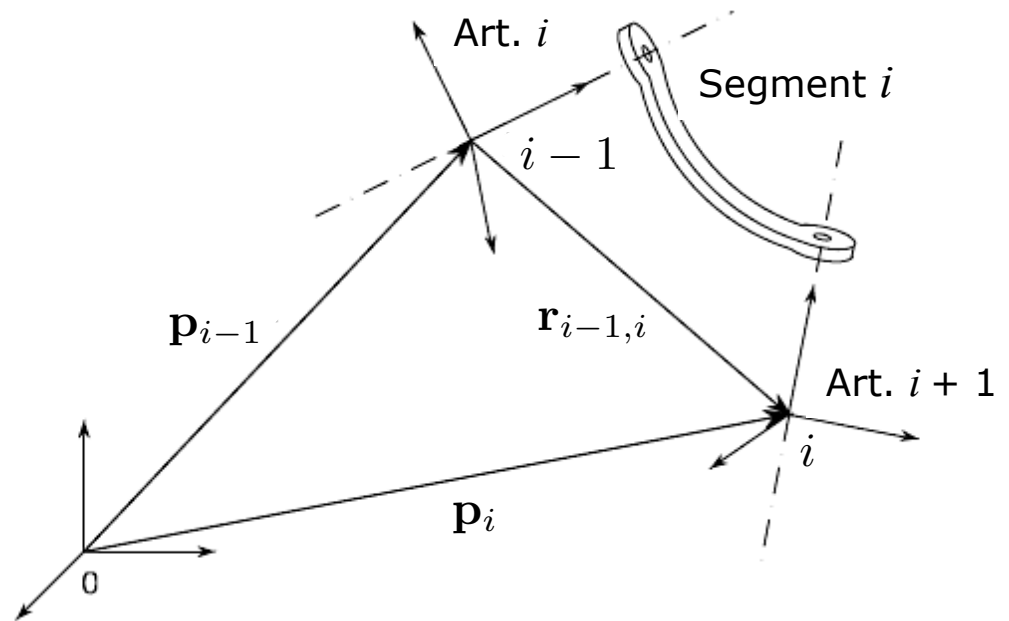
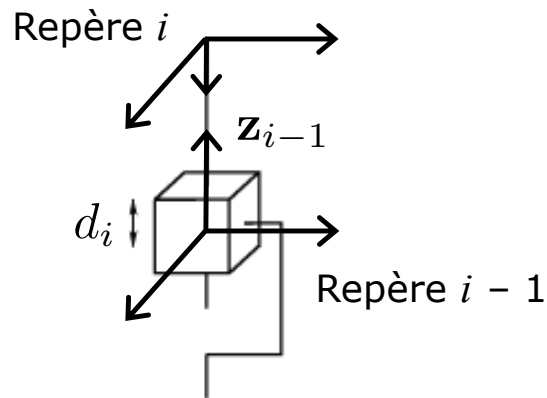
$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \omega_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}$$

en fonction du type d'articulation  $i$  : **prismatique** ou **rotoïde**



# Vitesse des segments d'un robot



## Articulation prismatique:

L'orientation du repère  $i$  par rapport au repère  $i - 1$  ne change pas en déplaçant le segment  $i$ , donc:

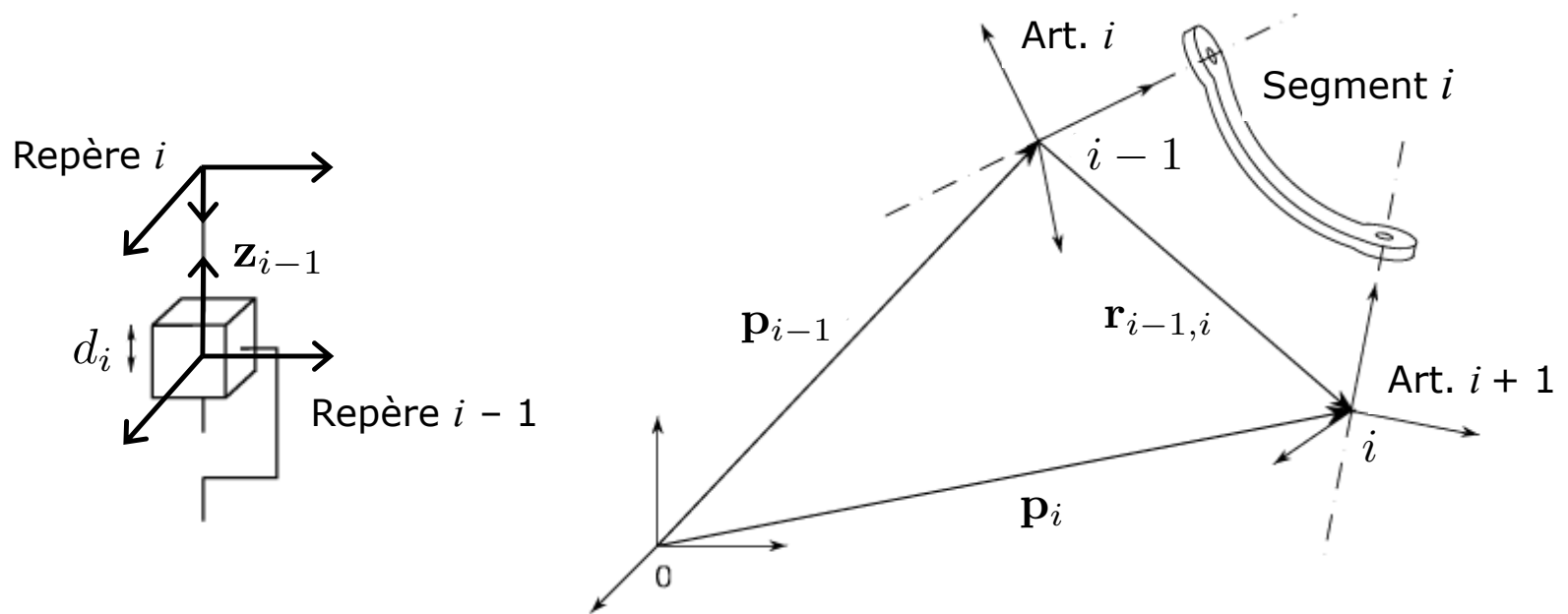
$$\omega_{i-1,i} = \mathbf{0}$$

En outre, la vitesse linéaire est:

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

où  $\mathbf{z}_{i-1}$  est le vecteur unitaire de l'axe de l'articulation  $i$

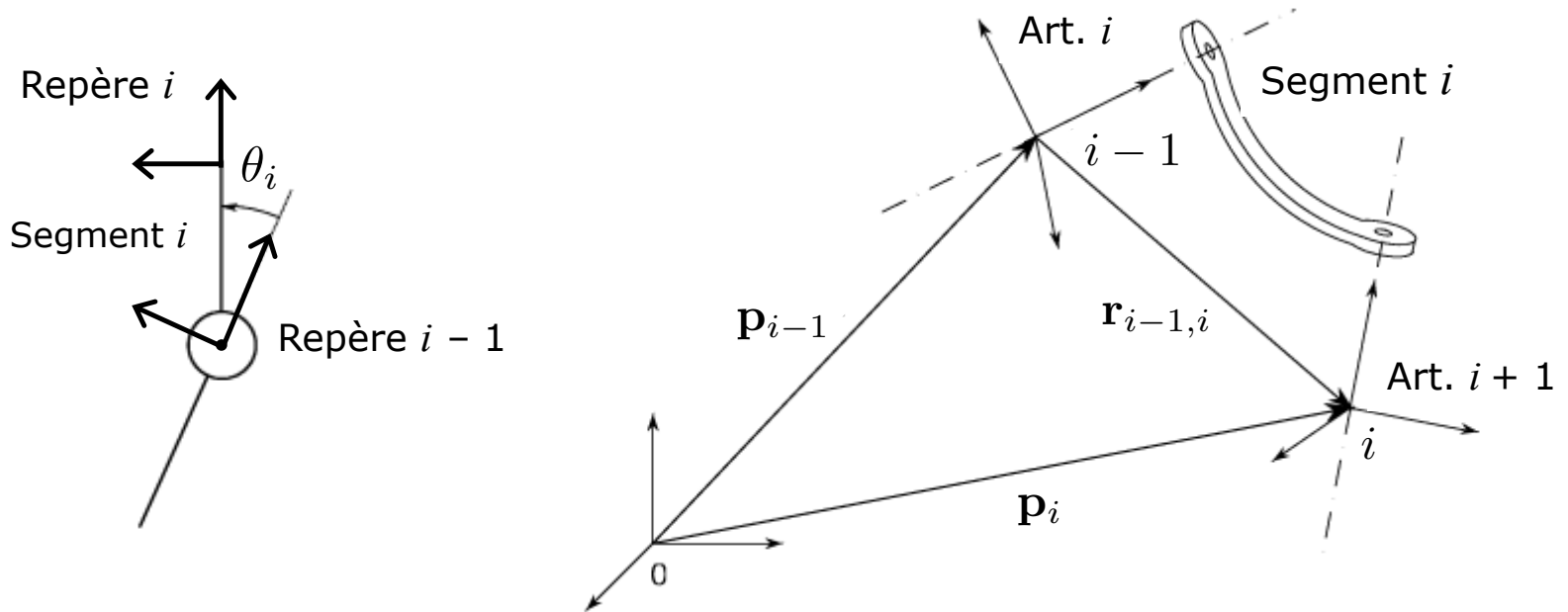
# Vitesse des segments d'un robot



En conclusion, nous avons les deux équations suivantes pour une articulation prismatique:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1}\end{aligned}$$

# Vitesse des segments d'un robot



## Articulation rotoïde:

Pour la vitesse angulaire, on a que:

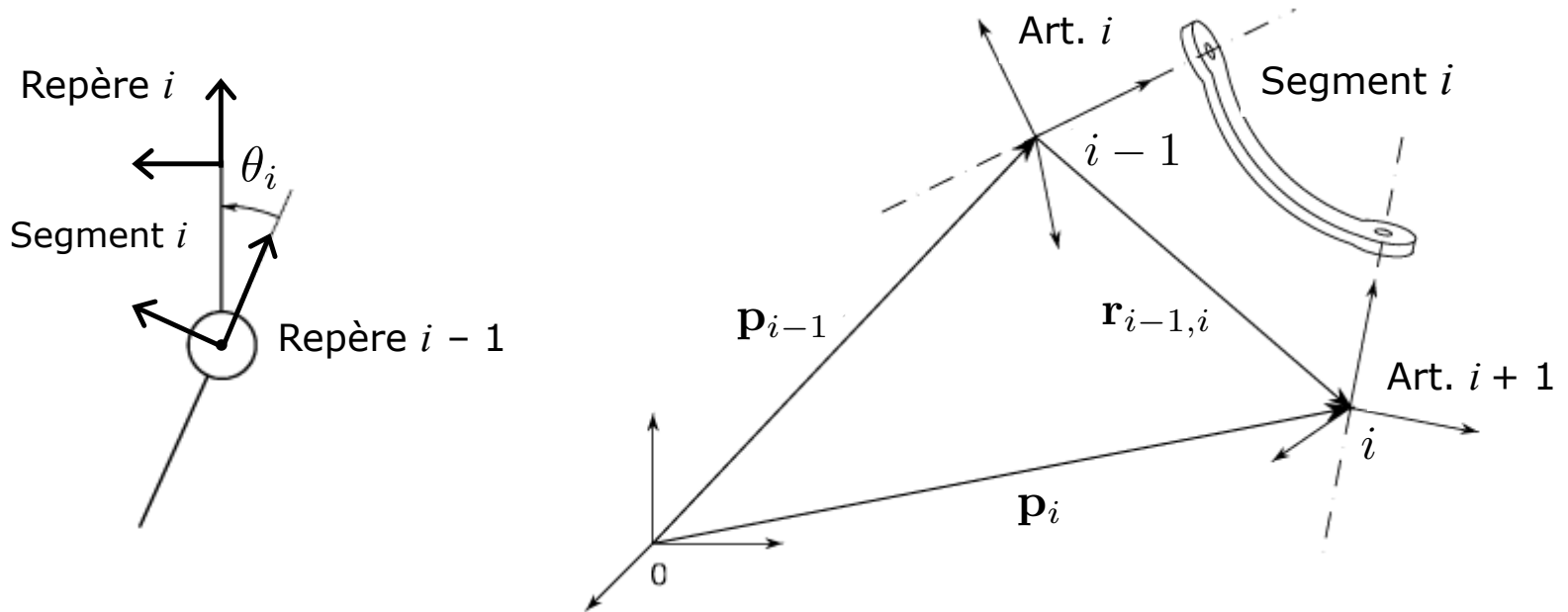
$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

tandis que pour la vitesse linéaire:

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

en raison de la rotation du repère  $i$  par rapport au repère  $i-1$  induite par le mouvement du segment  $i$

# Vitesse des segments d'un robot



Nous avons donc les deux équations suivantes pour une articulation rotoïde:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}\end{aligned}$$

Remarque: Pour trouver la 1<sup>re</sup> équation, nous avons utilisé les deux identités

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i} = (\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times \mathbf{r}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

# Calcul du jacobien

Pour calculer le jacobien géométrique, il convient de **procéder séparément** pour les **vitesse linéaires** et **angulaires**

- Pour la contribution à la **vitesse linéaire**, on peut écrire la dérivée de  $\mathbf{p}_e(\mathbf{q})$  par rapport au temps, comme suit:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_{P_i} \dot{q}_i$$

$\mathbf{J}_{P_i} \dot{q}_i$  : contribution de la vitesse de l'articulation  $i$  à la *vitesse linéaire* de l'effecteur lorsque toutes les autres articulations sont immobiles

## Articulation prismatique:

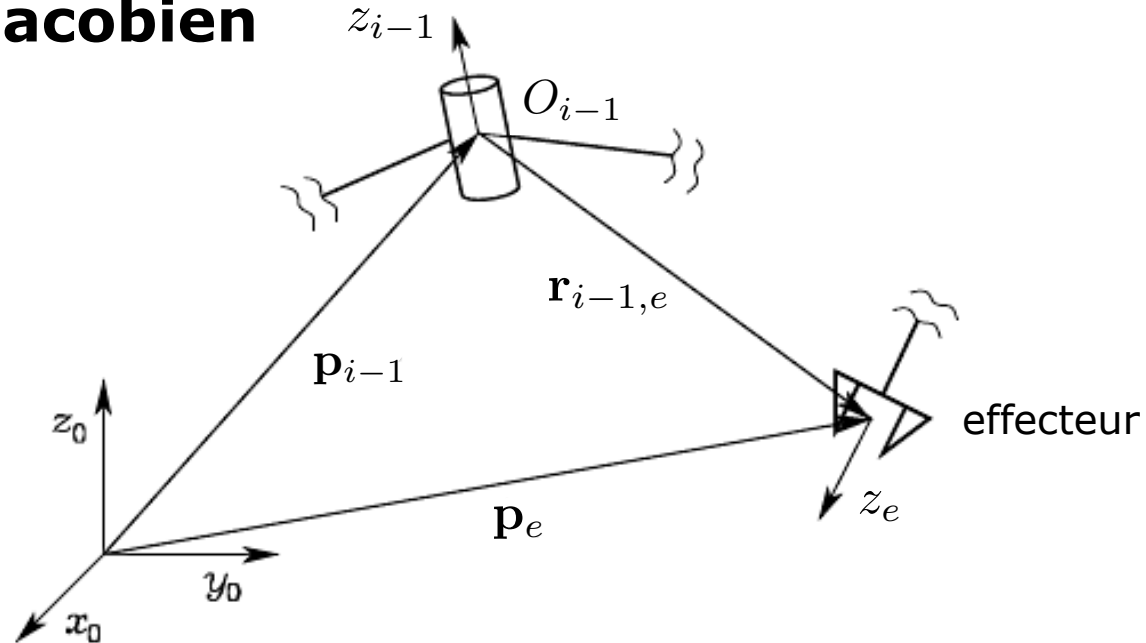
Si l'articulation  $i$  est prismatique ( $q_i = d_i$ ) :

$$\mathbf{J}_{P_i} \dot{q}_i = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

et donc:

$$\mathbf{J}_{P_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

# Calcul du jacobien



## Articulation rotoïde:

Si l'articulation  $i$  est rotoïde ( $q_i = \theta_i$ ), en observant que la contribution à la vitesse linéaire doit être calculée par rapport à l'origine du repère "e" de l'effecteur, nous avons que:

$$\mathbf{J}_{P_i} \dot{q}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,e} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1})$$

et donc:

$$\mathbf{J}_{P_i} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1})$$

# Calcul du jacobien

- Pour la contribution à la **vitesse angulaire**, on a:

$$\omega_e = \omega_n = \sum_{i=1}^n \omega_{i-1,i} = \sum_{i=1}^n J_{O_i} \dot{q}_i$$

On peut encore caractériser les termes  $J_{O_i} \dot{q}_i$  séparément

## Articulation prismatique:

Si l'articulation  $i$  est prismatique:

$$J_{O_i} \dot{q}_i = \mathbf{0}$$

et donc:

$$J_{O_i} = \mathbf{0}$$

## Articulation rotoïde:

Si l'articulation  $i$  est rotoïde:

$$J_{O_i} \dot{q}_i = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

et donc:

$$J_{O_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

# Calcul du jacobien

## En résumé:

Le jacobien  $\mathbf{J}$  peut être partitionné en vecteurs colonnes  $\mathbf{J}_{P_i}, \mathbf{J}_{O_i} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , de la manière suivante:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_1} & \mathbf{J}_{P_2} & \cdots & \mathbf{J}_{P_n} \\ \mathbf{J}_{O_1} & \mathbf{J}_{O_2} & \cdots & \mathbf{J}_{O_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

où, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_i} \\ \mathbf{J}_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est } \textit{prismatique} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est } \textit{rotoïde} \end{cases}$$

Cette expression permet de calculer le jacobien d'un manipulateur d'une façon simple et systématique à partir du **modèle géométrique direct**

En effet  $\mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_{i-1}$  sont des fonctions des variables articulaires



# Calcul du jacobien

- $\mathbf{z}_{i-1}$  est donné par la 3<sup>e</sup> colonne de la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{i-1}^0$
- $\mathbf{p}_e$  est donné par les trois premiers éléments de la 4<sup>e</sup> colonne de la matrice de transformation  $\mathbf{T}_e^0$
- $\mathbf{p}_{i-1}$  est donné par les trois premiers éléments de la 4<sup>e</sup> colonne de la matrice de transformation  $\mathbf{T}_{i-1}^0$

---

**Remarque:** les équations précédentes permettent de calculer le jacobien géométrique par rapport au *repère de la base* (le repère "0")

- Si on veut écrire le jacobien dans un **repère différent**, appelons-le " $u$ ", il suffit de connaître la matrice de rotation relative  $\mathbf{R}^u$
- La relation entre les vitesses dans les deux repères est donc:

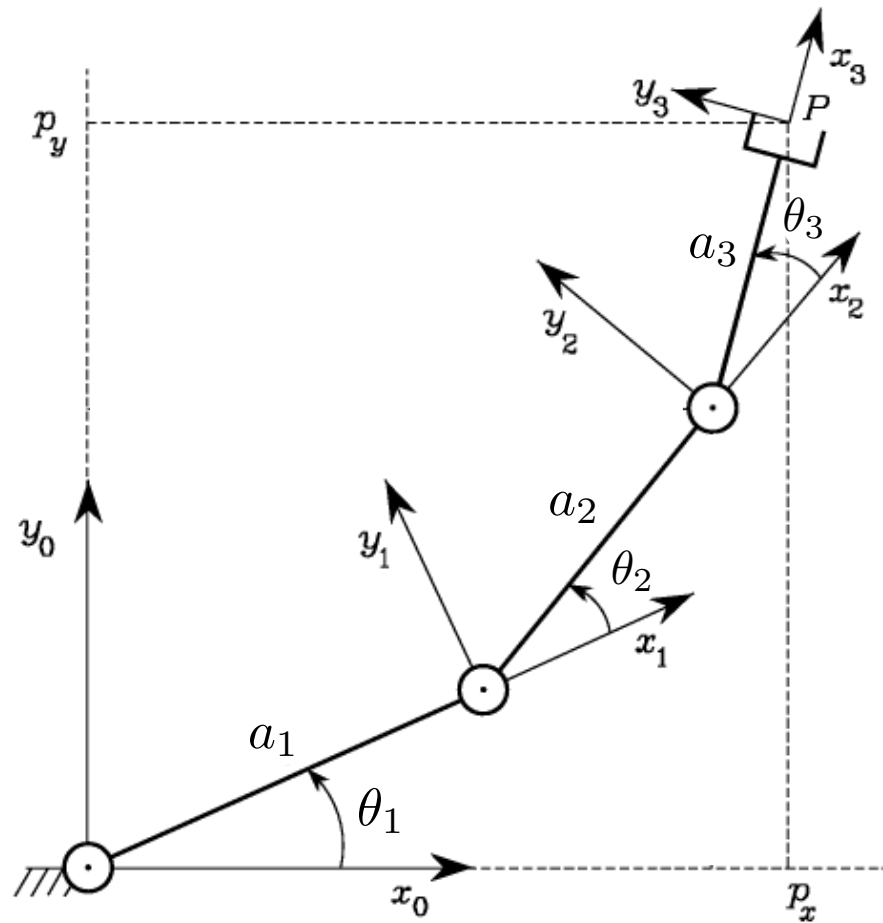
$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e^u \\ \boldsymbol{\omega}_e^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^u} \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

$\mathbf{J}^u$  : Jacobien géométrique dans le repère " $u$ "

## Exemples

### **Calcul du jacobien d'un manipulateur**

# 1 - Manipulateur planaire à 3 segments



# Manipulateur planaire à 3 segments

Trois articulations rotoïdes. Le jacobien est donc:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

Les vecteurs de position des segments du robot sont:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 \\ a_1 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'autre part, les vecteurs unitaires des axes des articulations sont (les axes sont tous parallèles à l'axe  $z_0$ ):

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = [0, 0, 1]^T$$

## Rappel:

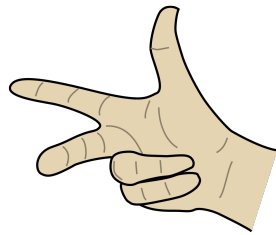
Si  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$  et  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$ , le **produit vectoriel** de  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  est défini par:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

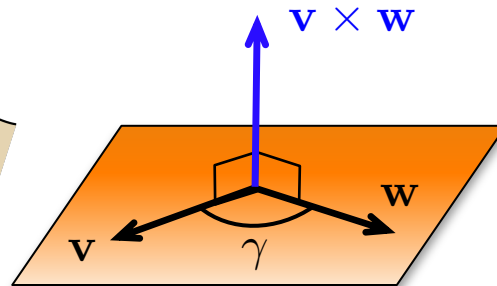
On peut aussi exprimer le produit vectoriel comme le produit d'une matrice antisymétrique et d'un vecteur:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{w} \quad \text{où} \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Interpretation géométrique:



Règle de la main droite



Le module du produit vectoriel est:

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| |\sin \gamma|$$

Il est égal à l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$

# Manipulateur planaire à 3 segments

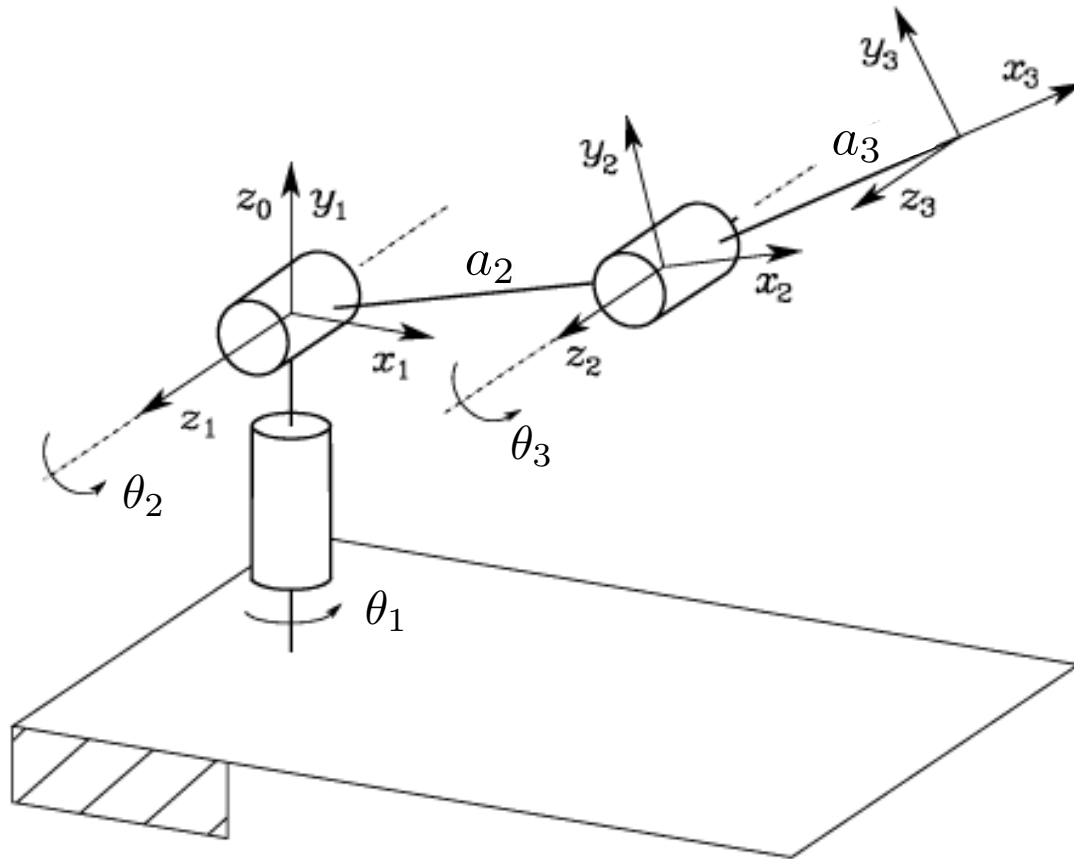
## Conclusion:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Remarque:

- Seulement les trois lignes du jacobien différentes de zéro sont importantes. Elles sont relatives aux composantes de la vitesse linéaire le long des axes  $x_0$  et  $y_0$ , et à la composante de la vitesse angulaire autour de l'axe  $z_0$ . La dernière ligne du jacobien nous donne simplement la relation  $\omega_z = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3$
- En effet, les 3 DDL du robot permettent de spécifier au maximum 3 variables de l'effecteur:  $v_z$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  sont toujours zéro pour ce manipulateur

## 2 - Manipulateur anthropomorphe



# Manipulateur anthropomorphe

Trois articulations rotoïdes. Le jacobien a encore la forme suivante:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

Cette fois-ci les vecteurs de position des segments du robot sont:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ a_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ a_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 (a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ \sin \theta_1 (a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}$$

et les vecteurs unitaires des axes des articulations rotoïdes sont:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Manipulateur anthropomorphe

## Conclusion:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Remarques:

- Seulement 3 des 6 lignes du jacobien sont *linéairement indépendantes*

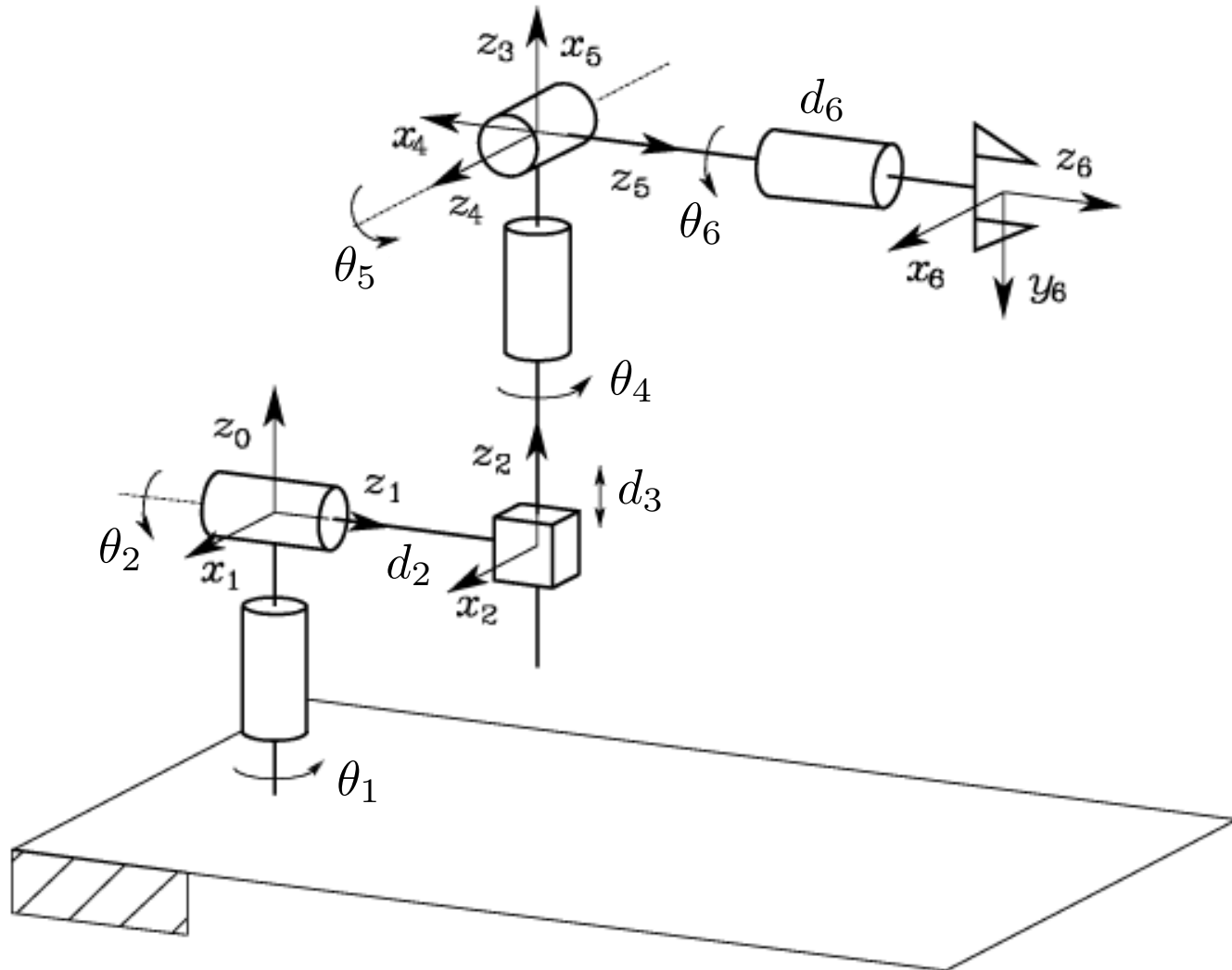
- La matrice

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}$$

décrit la relation entre les vitesses angulaires des trois articulations  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$  et la vitesse linéaire  $\dot{\mathbf{p}}_e$  de l'effecteur

- Ce manipulateur ne permet pas une vitesse angulaire *arbitraire*. En effet, les deux composantes  $\omega_x, \omega_y$  ne sont pas indépendantes:  $\omega_y \sin \theta_1 = -\omega_x \cos \theta_1$

### 3 - Manipulateur Stanford



# Manipulateur Stanford

Ce robot à 6 DDL est la combinaison d'un *manipulateur sphérique* (porteur) et d'un *poignet de type rotule*

Cinq articulations rotoïdes et une articulation prismatique (la 3<sup>e</sup>):

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$$

Le jacobien est donc:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_4) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_5) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs de position des segments du robot sont:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} d_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - d_2 \sin \theta_1 \\ d_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + d_2 \cos \theta_1 \\ d_3 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

Segm.	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-\pi/2$	0	$\theta_1$
2	0	$\pi/2$	$d_2^*$	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0
4	0	$-\pi/2$	0	$\theta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\theta_5$
6	0	0	$d_6^*$	$\theta_6$

Tableau des paramètres de DH

# Manipulateur Stanford

et

$$\mathbf{p}_6 = \begin{bmatrix} d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 + d_6 (c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) \\ d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 + d_6 (s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) \\ d_3 c_2 + d_6 (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) \end{bmatrix}$$

Les vecteurs unitaires des axes des six articulations sont:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

# Singularités cinématiques

- Le jacobien définit une application linéaire

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

entre le vecteur vitesse des articulations  $\dot{\mathbf{q}}$  et le vecteur vitesse de l'effecteur  $\mathbf{v}_e = [\dot{\mathbf{p}}_e^T, \boldsymbol{\omega}_e^T]^T$

Les configurations  $\mathbf{q}$  où le jacobien  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  n'est pas de **plein rang** sont appelées **singularités cinématiques** du robot

Trouver les singularités d'un manipulateur est important, car:

1. Les singularités sont des configurations où la *mobilité du robot est réduite*, c'est-à-dire il n'est pas possible d'imposer un mouvement arbitraire à l'effecteur. Au voisinage des positions singulières, le robot perd des degrés de liberté
2. Si le robot est sur une singularité, on peut avoir une *infinité de solutions* au problème géométrique inverse
3. Au voisinage d'une singularité, des *petites vitesses* dans l'espace opérationnel peuvent engendrer des *grandes vitesses* dans l'espace articulaire

# Singularités cinématiques

## Remarque:

Les configurations d'un robot qui sont singulières pour le MGI, les sont aussi pour le jacobien

---

Il existe **deux types** de singularités:

- 1) Les singularités **aux limites du volume de travail** ("type 1") qui apparaissent lorsque le bras est complètement étendu (ou rétracté)
  - Elles peuvent être évitées: elles ne constituent pas un véritable problème, en pratique
- 2) Les singularités **à l'intérieur du volume de travail** ("type 2") qui apparaissent lors de l'*alignement* de deux ou plus axes du robot, ou pour des configurations particulières de l'effecteur
  - Elles sont critiques car on peut les rencontrer partout dans le volume de travail

# Singularités cinématiques

**Exemple:** Manipulateur planaire à 2 segments

On considère seulement les composantes de la vitesse linéaire  $\dot{p}_x, \dot{p}_y$  de l'effecteur dans le plan

Le jacobien est donc la matrice  $2 \times 2$ :

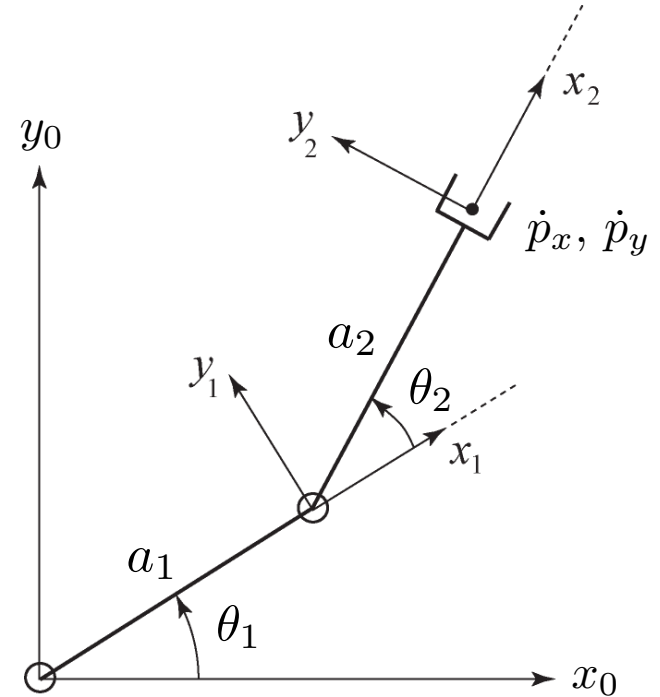
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Étant une matrice carrée, pour étudier le rang de  $\mathbf{J}$ , on peut calculer son *déterminant*

---

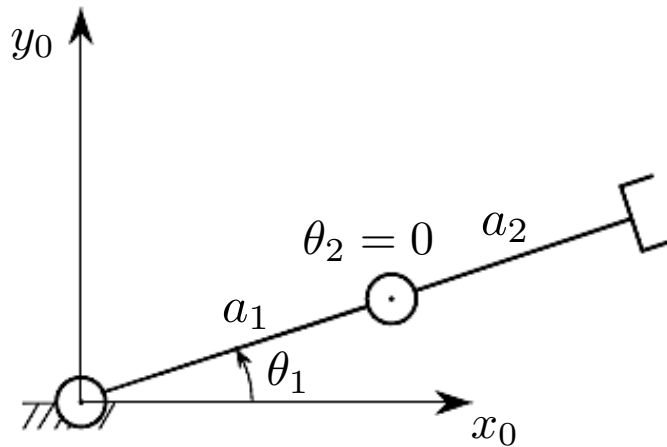
**Rappel:** Pour une matrice  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  :

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - cb$$



# Singularités cinématiques

**Exemple:** Manipulateur planaire à 2 segments



- On trouve que:

$$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 \sin \theta_2$$

- Si  $a_1, a_2 \neq 0$ , le déterminant est zéro lorsque:

$$\theta_2 = 0, \theta_2 = \pi \text{ (bras complètement étendu ou rétracté)}$$

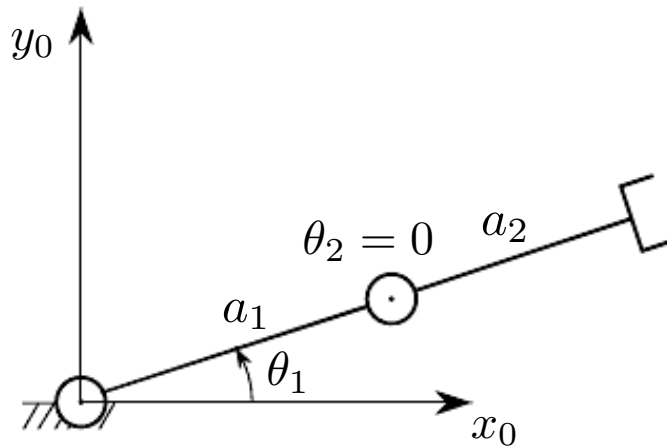
et la valeur de  $\theta_1$  ne joue aucun rôle dans l'étude des configurations singulières

- Les deux singularités sont de **type 1** (aux limites du volume de travail)



# Singularités cinématiques

**Exemple:** Manipulateur planaire à 2 segments



- Si on analyse le mouvement différentiel pour  $\theta_2 = 0$ , on observe que les deux colonnes du jacobien:

$$\begin{bmatrix} -(a_1 + a_2) \sin \theta_1 \\ (a_1 + a_2) \cos \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -a_2 \sin \theta_1 \\ a_2 \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

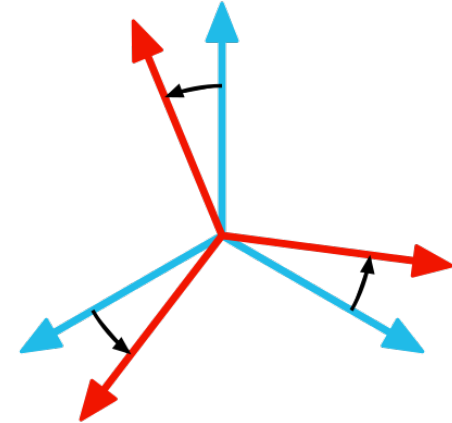
deviennent parallèles et que le rang du jacobien devient 1

- Cela veut dire que les composantes de la vitesse de l'effecteur  $\dot{p}_x, \dot{p}_y$  ne sont pas indépendantes

# Plan du cours

## 2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



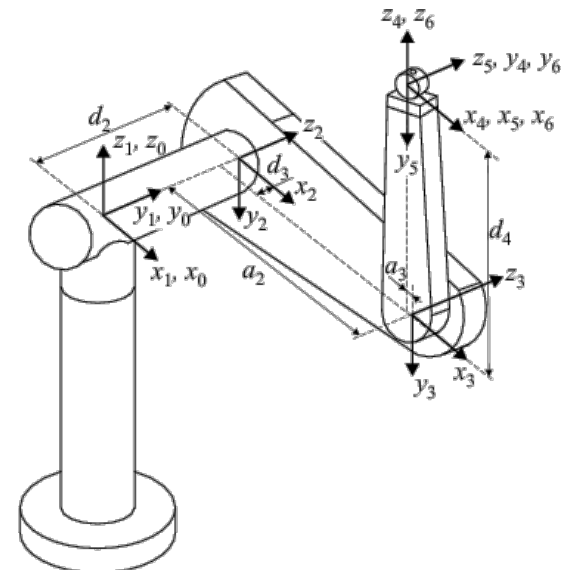
## Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

### 3.1 Modèle géométrique

- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

### 3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



# Modèle cinématique inverse

**Problème cinématique inverse:** déterminer les vitesses  $\dot{\mathbf{q}}$  des articulations d'un robot afin d'atteindre une vitesse de l'effecteur  $\mathbf{v}_e$  donnée

**1. Cas régulier:** Si le jacobien est *carré* et de *plein rang*, on a que:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{v}_e$$

**Remarque:** si  $\mathbf{q}(0)$  est connu, la position des articulations peut être obtenue par integration des vitesses articulaires dans le temps:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau$$

On peut intégrer cette équation différentielle en temps discret en utilisant, par exemple la *méthode d'intégration d'Euler*. Si le pas d'intégration  $\Delta t$  et les positions et vitesses au temps  $t_k$  sont connues, les positions des articulations au temps  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  peuvent être calculées via:

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k)) \mathbf{v}_e(t_k) \Delta t$$

Ceci permet ainsi de trouver *une solution* au **problème géométrique inverse**

# Modèle cinématique inverse

**2. Cas redondant:** si le robot est *cinématiquement redondant*,  $r < n$  où  $n$  est le nombre de DDL du robot et  $r$  le nombre de variables de l'espace opérationnel nécessaires à spécifier une tâche donnée, alors le jacobien a plus de colonnes que de lignes et  $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  a un *nombre infini* de solutions.

$n - r$  représente le **degré de redondance** du robot

$$\begin{matrix} & n \\ r & \boxed{\mathbf{J}} \end{matrix}$$

Plusieurs méthodes de résolution sont alors envisageables:

- a)** Ajouter  $n - r$  *relations supplémentaires* pour que  $\mathbf{J}$  devienne carrée (par ex. blocage d'articulation, contrainte d'optimisation)
- b)** Trouver une *solution particulière* en ne considérant que  $r$  articulations (au lieu de  $n$ ), puis calculer les valeurs de toutes les articulations en prenant en compte un critère d'optimisation
- c)** Utiliser la méthode de résolution basée sur la notion de **pseudo-inverse**

# Modèle cinématique inverse

c) Résolution basée sur la notion de **pseudo-inverse**. On reformule le problème comme un *problème d'optimisation linéaire sous contraintes*

- Les solutions du problème d'inversion sont:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}_e + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0$$

où  $\mathbf{J}^\dagger$  est la *pseudo-inverse* de Moore-Penrose (à droite) de  $\mathbf{J}$ , à savoir:

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1}$$

- Le **1<sup>er</sup> terme**,  $\mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}_e \in \text{Im}(\mathbf{J}^T)$ , est la solution qui minimise  $\|\mathbf{v}_e - \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}\|$  (l'erreur au sens des moindres carrés) et qui minimise aussi (localement) la norme du vecteur des vitesses articulaires, à savoir  $\|\dot{\mathbf{q}}\|$
- Le **2<sup>e</sup> terme**,  $(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0$ , s'appelle *solution homogène*. Le vecteur de vitesses articulaires  $\dot{\mathbf{q}}_0$  n'est pas unique: il peut être utilisé pour satisfaire des **contraintes supplémentaires** (avec une *priorité secondaire* par rapport à la contrainte cinématique primaire)

$\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}$  projette  $\dot{\mathbf{q}}_0$  dans le  $\ker(\mathbf{J})$  pour ne pas violer  $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$

En fait, le noyau ou kernel de  $\mathbf{J}$ ,  $\ker(\mathbf{J})$ , est le sous-espace des vitesses articulaires qui n'engendrent *aucune* vitesse sur l'effecteur, pour une posture donnée  $\mathbf{q}$  du robot

# Modèle cinématique inverse

**Problème:** comment spécifier  $\dot{\mathbf{q}}_0$  pour une utilisation convenable des DDL redondants du robot ?

- *Choix typique:* vecteur gradient d'une fonction scalaire de  $\mathbf{q}$  :

où 
$$\dot{\mathbf{q}}_0 = k_0 \left( \frac{\partial w(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T$$

$k_0 > 0$  : paramètre (gain)

$w(\mathbf{q})$  : fonction objectif (ou de coût) secondaire

---

Exemples de fonctions  $w(\mathbf{q})$  possibles:

## 1. Mesure de manipulabilité:

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}))}$$

Nous avons que  $w(\mathbf{q}) = 0$  dans une singularité. Ainsi, si on maximise cette mesure, la redondance du robot est utilisée pour s'écarter des singularités

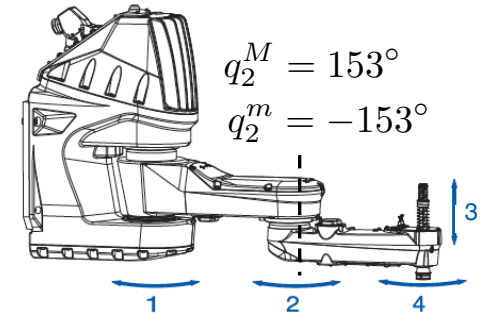
# Modèle cinématique inverse

## 2. Distance des butées mécaniques:

$$w(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i - \bar{q}_i}{q_i^M - q_i^m} \right)^2$$

où  $q_i^M$ ,  $q_i^m$  sont les valeurs maximales et minimales de l'articulation  $i$  et  $\bar{q}_i$  est sa valeur moyenne. Ici, en maximisant  $w(\mathbf{q})$ , on exploite la redondance du robot pour s'assurer que la distance qui sépare chaque articulation de sa position moyenne soit minimale

FAST picker TP80 de Stäubli



## 3. Distance d'un obstacle:

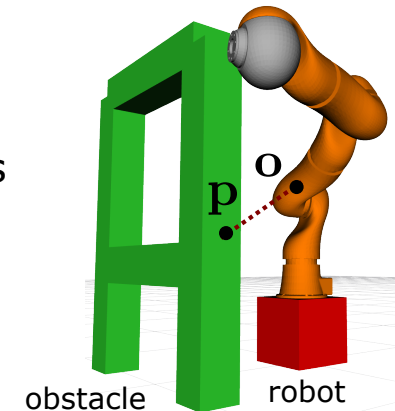
La redondance peut être utilisée pour éviter les collisions entre le manipulateur et un obstacle:

$$w(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{o}} \|\mathbf{p}(\mathbf{q}) - \mathbf{o}\|$$

où

$\mathbf{p}$  : position d'un point sur l'obstacle (le centre pour des obstacles sphériques)

$\mathbf{o}$  : position d'un point générique sur la structure du robot



# Modèle cinématique inverse

## 3. Cas singulier:

- Les solutions précédentes (*cas régulier* et *cas redondant*) peuvent être calculées seulement si le jacobien est de **plein rang**
- Ces solutions perdent toute signification lorsque le manipulateur se trouve dans une *configuration singulière*. Dans ce cas, le système:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

contient des *équations linéairement dépendantes*

- Pour résoudre le problème d'inversion du modèle cinématique *au voisinage d'une singularité*, on peut recourir à une *inversion par moindres carrés amortis*:

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T + k^2 \mathbf{I})^{-1}$$

où  $k \geq 0$  est un *facteur d'amortissement* qui rend l'inversion mieux conditionnée du point de vue numérique et  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. On peut constater que si  $k = 0$  alors  $\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^\dagger$ , c'est-à-dire, on retrouve la pseudo-inverse du jacobien  $\mathbf{J}$



# Statique

**Objectif de la statique:** étant donné un manipulateur dans une configuration d'**équilibre statique**, déterminer la relation entre les forces généralisées appliquées sur l'effecteur et les forces généralisées appliquées sur les articulations (forces pour les articulations prismatiques et couples pour les articulations rotoïdes)

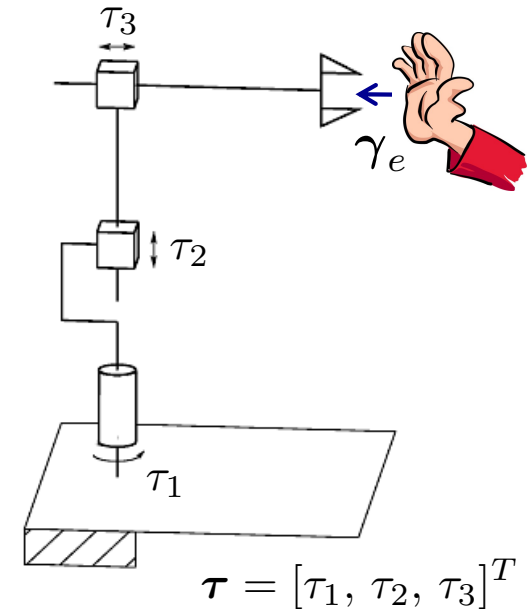
Soit:

$\tau \in \mathbb{R}^n$  : vecteur des forces généralisées exercées par les actionneurs sur les articulations du robot

$\gamma_e \in \mathbb{R}^r$  : vecteur des forces généralisées agissant sur l'effecteur, où  $r$  est la dimension de l'espace opérationnel d'intérêt

- L'application du **Principe des Travaux Virtuels** permet d'écrire l'équation:

$$\tau = J^T(q) \gamma_e$$



La **transposée du jacobien géométrique** d'un manipulateur met donc en relation les forces sur l'effecteur avec les forces sur les  $n$  articulations

# Jacobien analytique

- Si la pose de l'effecteur du robot est spécifiée avec un nombre minimal de paramètres dans l'espace opérationnel, nous pouvons obtenir **analytiquement** l'équation de la cinématique en dérivant le MGD  $\mathbf{x}_e = [\mathbf{p}_e^T, \phi_e^T]^T = \mathbf{f}(\mathbf{q})$  par rapport au temps:

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

où

$\mathbf{p}_e$  : origine du repère de l'effecteur par rapport à la base

$\phi_e$  : *représentation minimale* de l'orientation de l'effecteur (3 variables, par ex. les angles de Euler) dans l'espace opérationnel

$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  : **jacobien analytique**

- Le *jacobien analytique*  $\mathbf{J}_A$  est **différent** du *jacobien géométrique*  $\mathbf{J}$  car la vitesse angulaire de l'effecteur par rapport à la base,  $\omega_e$ , ne coïncide pas avec  $\dot{\phi}_e$ , en général

Pour un aperçu des algorithmes basés sur le jacobien analytique qui permettent de calculer le modèle cinématique inverse (MCI), voir le Ch. 3.7, pages 132-147, du livre de Siciliano, Sciavicco, Villani et Oriolo

