

Robotique Industrielle

UPJV, Département EEA

M1 3EA, Parcours RoVA, EC15

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

**Lundi 13h30-16h30 (CM ou TD, salle CURI 305)
(TP, salle TP204)**

Année Universitaire 2021-2022



Plan du cours

Chapitre 1 : Introduction

- 1.1 Définitions
- 1.2 Constituants d'un robot
- 1.3 Classification des robots
- 1.4 Caractéristiques d'un robot
- 1.5 Générations de robots
- 1.6 Programmation des robots
- 1.7 Utilisation des robots



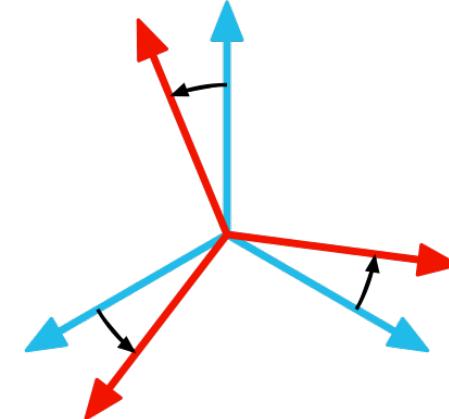
Chapitre 2 : Fondements Théoriques

- 2.1 Pose d'un corps rigide
 - Matrices de rotation et autres représentations de l'orientation
 - Transformations homogènes

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



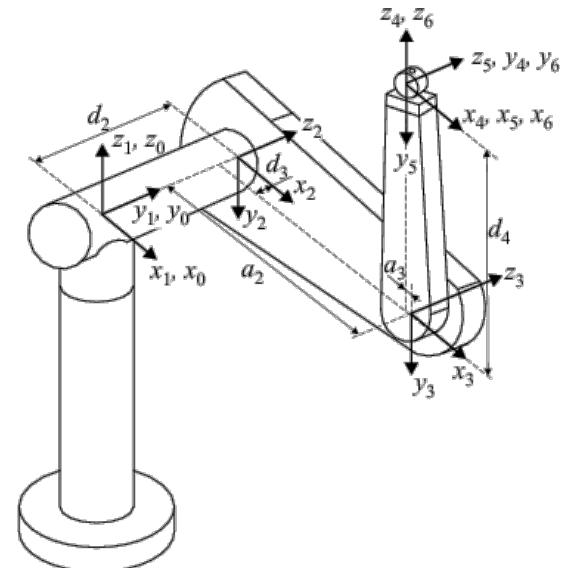
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

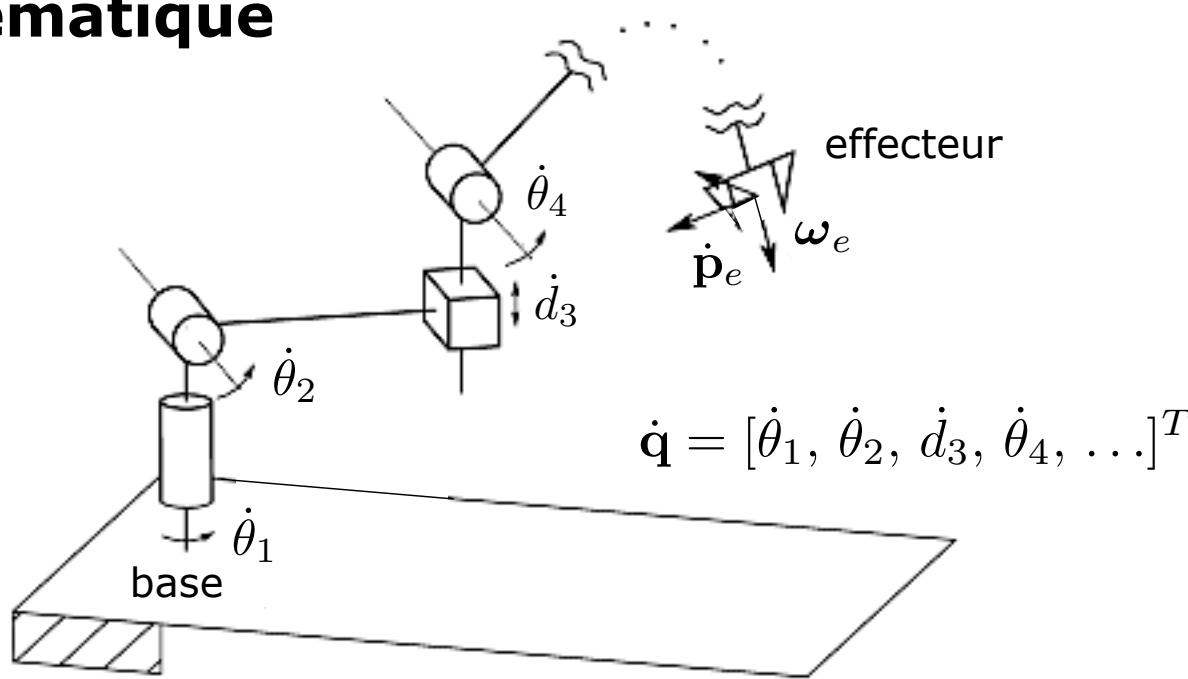
- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



Modèle cinématique



Le **modèle cinématique** nous donne la relation entre les vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ et la vitesse linéaire $\dot{\mathbf{p}}_e$ et angulaire $\dot{\omega}_e$ de l'effecteur d'un robot (par rapport au repère de la base)

L'application $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow (\dot{\mathbf{p}}_e, \dot{\omega}_e)$ est décrite par une matrice, le **jacobien géométrique**, qui dépend de la configuration $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ du manipulateur

Jacobien d'un manipulateur

- Le jacobien est l'un des outils les plus importants pour la caractérisation d'un manipulateur
- En effet, le jacobien est utile pour:
 - Déterminer les singularités d'un robot
 - Étudier la redondance d'un robot
 - Développer des algorithmes pour le calcul du MGI
 - Décrire la relation entre les forces appliquées sur l'effecteur et les forces résultantes sur les articulations d'un robot
 - Dériver les équations dynamiques du mouvement d'un robot
 - Concevoir des lois de commande dans l'espace opérationnel

Rappel:

Soit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Le jacobien de $\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_m]^T$ est une matrice $m \times n$ définie par:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Jacobien d'un manipulateur

Considérons un manipulateur avec n articulations. Nous pouvons écrire le *modèle géométrique direct* comme:

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ est le vecteur des variables articulaires.

La position et l'orientation de l'effecteur varie avec \mathbf{q} .

Objectif: exprimer la vitesse linéaire $\dot{\mathbf{p}}_e$ et la vitesse angulaire ω_e de l'effectuer du robot en fonction des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$

Remarque: Les trois composantes v_x, v_y, v_z de $\dot{\mathbf{p}}_e$ et les trois composantes $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ de ω_e , représentent les composantes de la vitesse linéaire et angulaire de l'effectuer du robot par rapport au *repère de la base*, respectivement

Jacobien d'un manipulateur

Les relations cherchées sont toutes les deux *linéaires* par rapport aux vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_e &= \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_e &= \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

où

$\mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$: matrice qui relie la contribution des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ à la *vitesse linéaire* de l'effecteur $\dot{\mathbf{p}}_e$

$\mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$: matrice qui relie la contribution des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ à la *vitesse angulaire* de l'effecteur $\boldsymbol{\omega}_e$

Jacobien d'un manipulateur

Sous une forme compacte:

$$\mathbf{v}_e \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

Équation de la cinématique
d'un manipulateur

La matrice

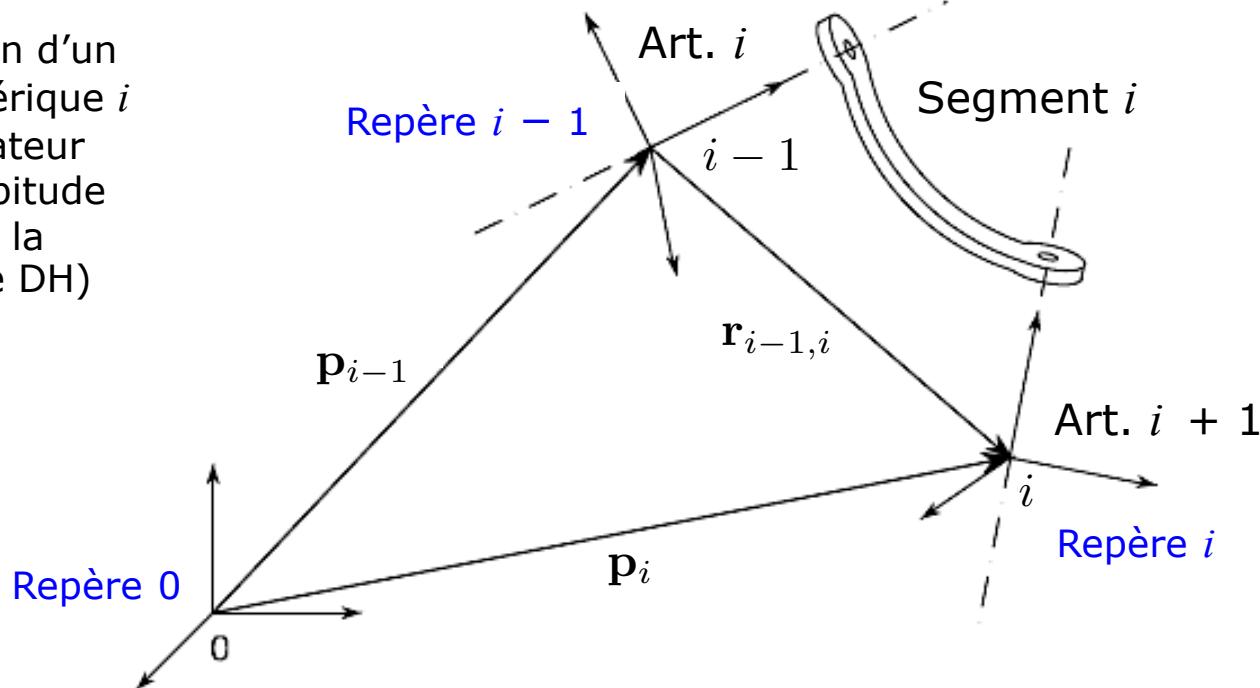
$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

est le **jacobien géométrique** d'un manipulateur
(une fonction du vecteur des variables articulaires \mathbf{q})

Objectif: étant donné un manipulateur, calculer *explicitement* son jacobien géométrique. Dans ce but, nous utiliserons les propriétés des *matrices de rotation et la cinématique du corps rigide* vues dans le Chapitre 2.2

Vitesse des segments d'un robot

Caractérisation d'un segment générique i d'un manipulateur (comme d'habitude nous utilisons la convention de DH)



Soient:

$\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i$: positions des origines des repères $i-1$ et i exprimées dans le repère 0

$\mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}$: position de l'origine du repère i par rapport au repère $i-1$ exprimée dans le repère $i-1$

Assumptions: Les repères 0 et n sont les repères de la *base* et de l'*effecteur* du robot.
On omettra l'indice "0" pour les quantités exprimées dans le repère 0

Vitesse des segments d'un robot

On trouve que:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}$$

\mathbf{R}_{i-1} : rotation
du repère $i - 1$ par
rapport au repère 0

Si on calcule la dérivée par rapport au temps de cette équation
et on utilise les formules vues dans le Chapitre 2.2, nous avons que:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} \\ &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}\end{aligned}$$

où

$\mathbf{v}_{i-1,i}$: vitesse de l'origine du repère i par rapport à l'origine du repère $i - 1$

Conclusion: nous avons ainsi trouvé l'expression de la **vitesse linéaire**
du segment i en fonction de la **vitesse linéaire** et **angulaire** du segment $i - 1$:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

Vitesse des segments d'un robot

Pour la **vitesse angulaire** du segment i , on part de la formule de composition de deux rotations:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1}$$

Si on calcule la dérivée par rapport au temps de cette équation et on utilise les formules vues dans le Chapitre 2.2, nous trouvons que:

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{R}_i = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i^{i-1}$$

où

$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)$: matrice antisymétrique associée au vecteur $\boldsymbol{\omega}_i$

$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}$: vitesse angulaire du repère i par rapport au repère $i - 1$
exprimée dans le repère $i - 1$

On peut récrire le 2^e terme à droite dans l'équation précédente comme (rappel l'identité: $\mathbf{R} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R} \boldsymbol{\omega})$):

$$\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i^{i-1} = \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \underbrace{\mathbf{R}_{i-1}^T \mathbf{R}_{i-1}}_{\mathbf{I}_3} \mathbf{R}_i^{i-1} = \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i$$

Vitesse des segments d'un robot

Nous avons ainsi trouvé la relation:

$$\mathbf{S}(\omega_i) \mathbf{R}_i = \mathbf{S}(\omega_{i-1}) \mathbf{R}_i + \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1} \omega_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i$$

à partir de laquelle, si on se concentre sur les *arguments* de la matrice $\mathbf{S}(\cdot)$, on déduit que:

$$\color{red}{\omega_i} = \omega_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \omega_{i-1,i}^{i-1} = \color{blue}{\omega_{i-1}} + \color{green}{\omega_{i-1,i}}$$

Conclusion: nous avons ainsi trouvé l'expression de la **vitesse angulaire** du segment i en fonction de la **vitesse angulaire** du segment $i - 1$ et de la **vitesse angulaire** du repère i par rapport au repère $i - 1$

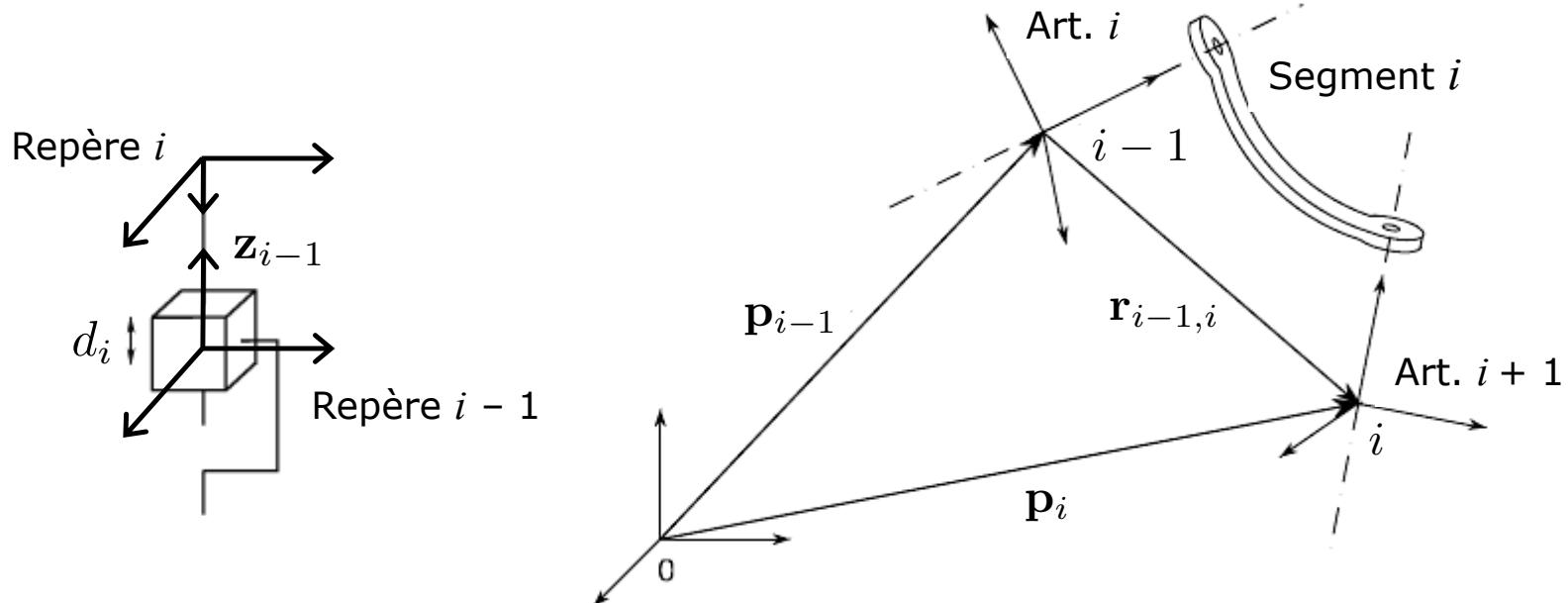
Attention: on obtient une *expression différente* pour

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \omega_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}$$

en fonction du type d'articulation i : **prismatique** ou **rotoïde**

Vitesse des segments d'un robot



Articulation prismatique:

L'orientation du repère i par rapport au repère $i - 1$ ne change pas en déplaçant le segment i , donc:

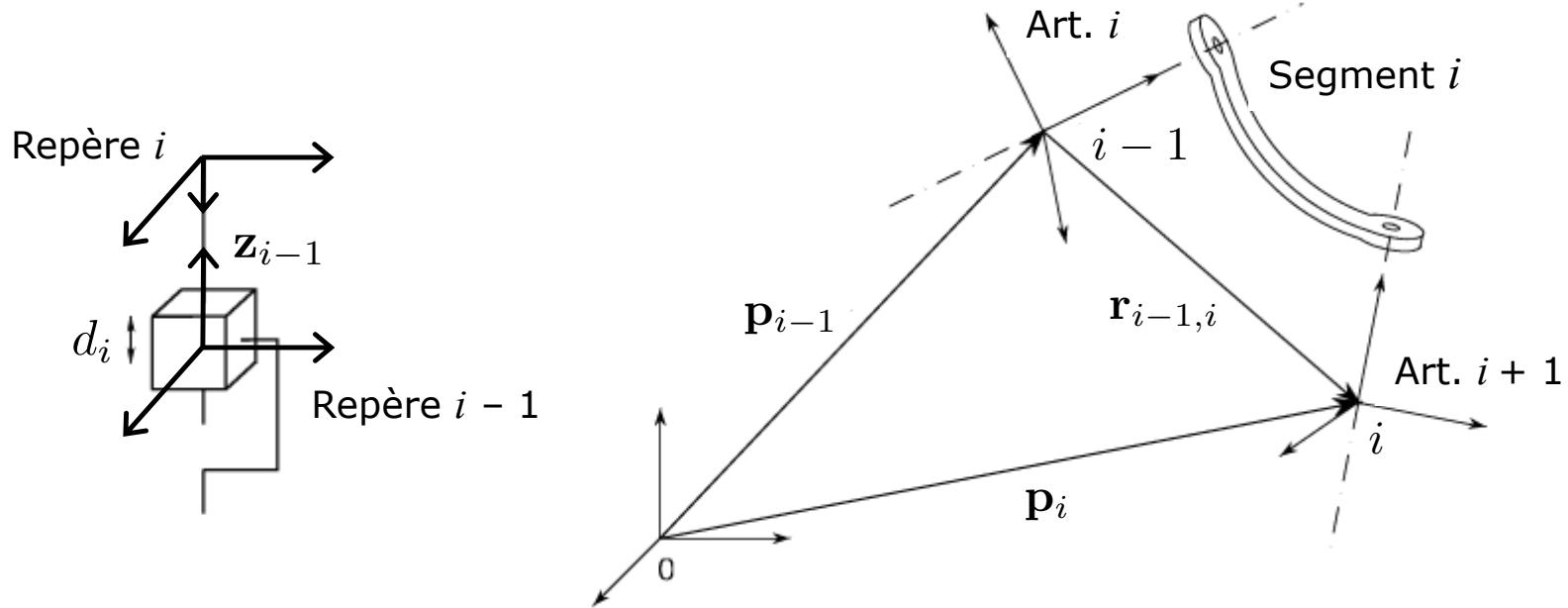
$$\omega_{i-1,i} = \mathbf{0}$$

En outre, la vitesse linéaire est:

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

où \mathbf{z}_{i-1} est le vecteur unitaire de l'axe de l'articulation i

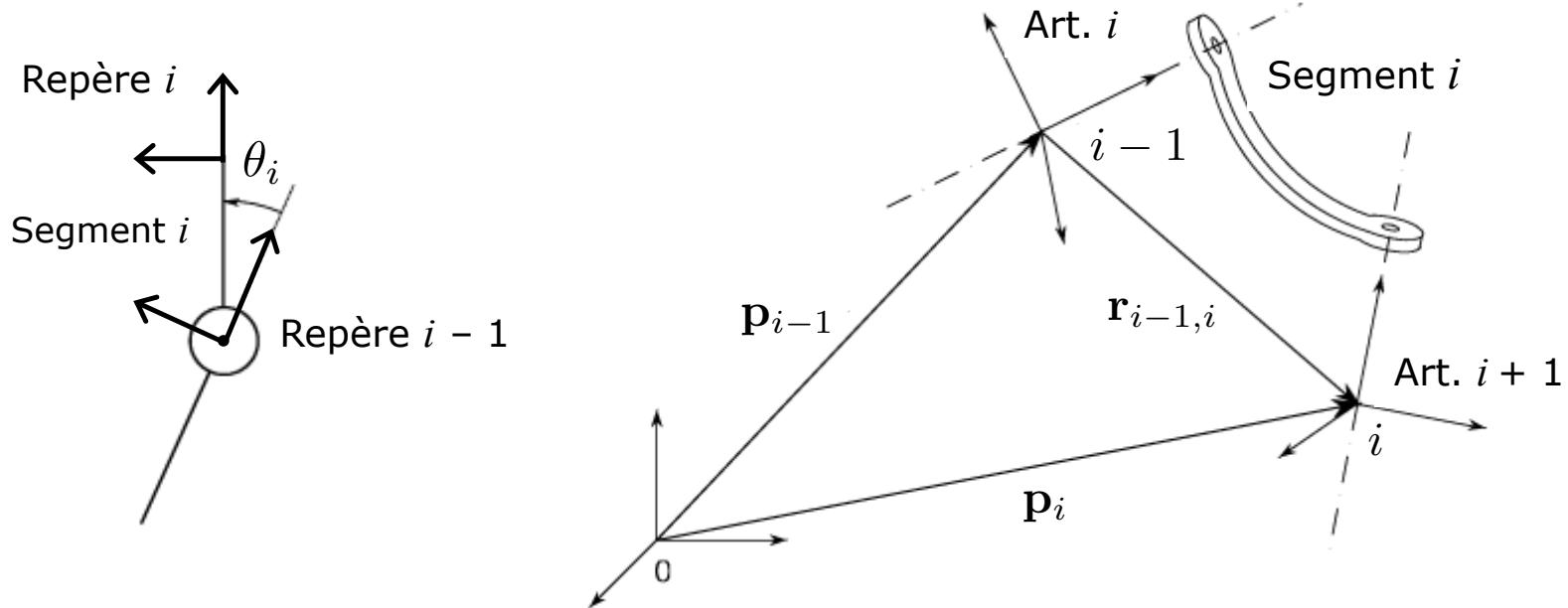
Vitesse des segments d'un robot



En conclusion, nous avons les deux équations suivantes pour une articulation prismatique:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$
$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1}$$

Vitesse des segments d'un robot



Articulation rototoïde:

Pour la vitesse angulaire, on a que:

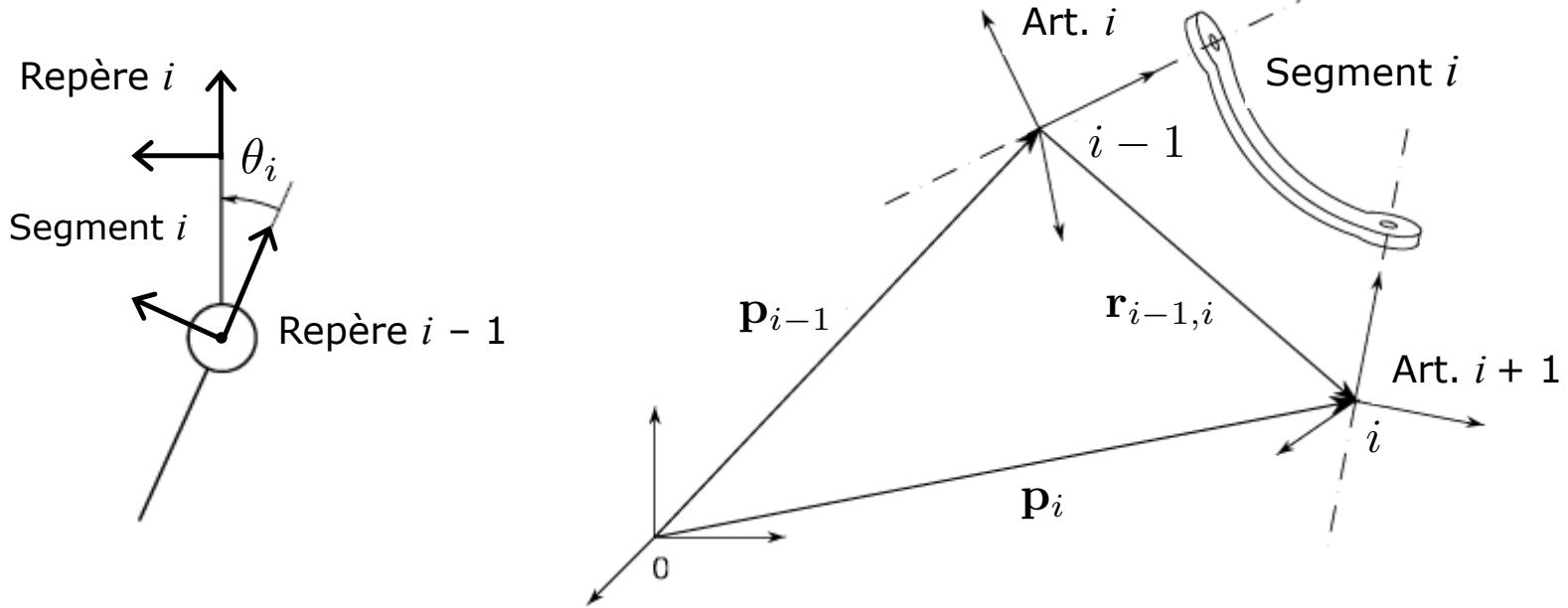
$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

tandis que pour la vitesse linéaire:

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

en raison de la rotation du repère i par rapport au repère $i - 1$ induite par le mouvement du segment i

Vitesse des segments d'un robot



Nous avons donc les deux équations suivantes pour une articulation rototoïde:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}\end{aligned}$$

Remarque: Pour trouver la 1^{re} équation, nous avons utilisé les deux identités

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i} = (\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times \mathbf{r}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

Calcul du jacobien

Pour calculer le jacobien géométrique, il convient de **procéder séparément** pour les **vitesses linéaires** et **angulaires**

- Pour la contribution à la **vitesse linéaire**, on peut écrire la dérivée de $\mathbf{p}_e(\mathbf{q})$ par rapport au temps, comme suit:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \mathcal{J}_{P_i} \dot{q}_i$$

$\mathcal{J}_{P_i} \dot{q}_i$: contribution de la vitesse de l'articulation i à la *vitesse linéaire* de l'effecteur lorsque toutes les autres articulations sont immobiles

Articulation prismatique:

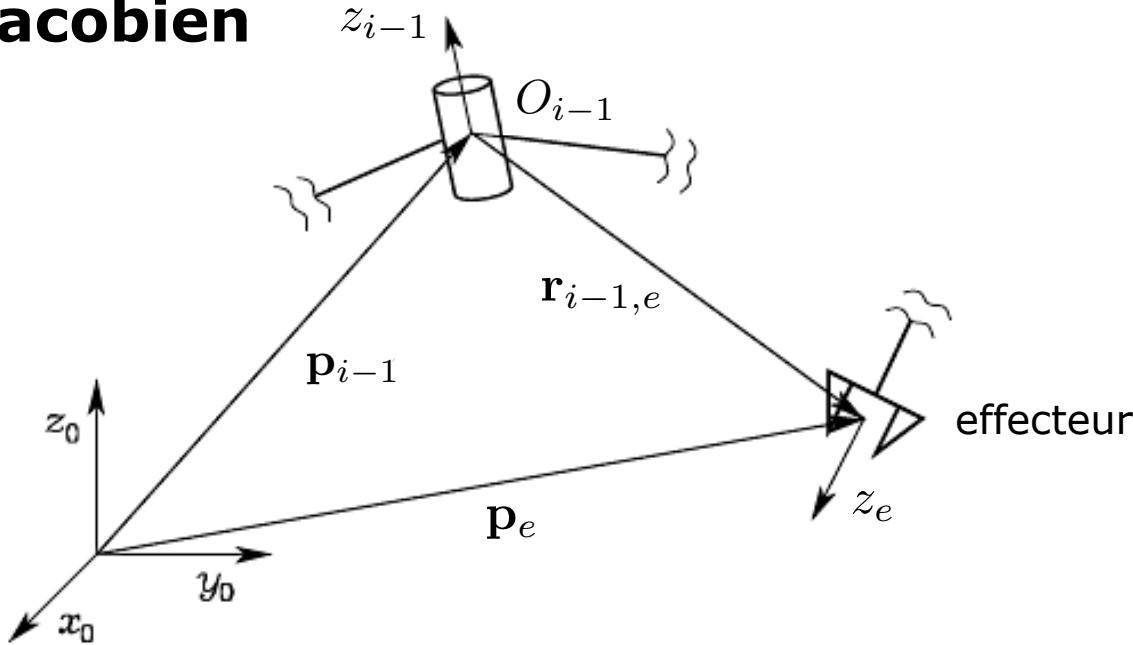
Si l'articulation i est prismatique ($q_i = d_i$) :

$$\mathcal{J}_{P_i} \dot{q}_i = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

et donc:

$$\mathcal{J}_{P_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Calcul du jacobien



Articulation rototoïde:

Si l'articulation i est rototoïde ($q_i = \theta_i$), en observant que la contribution à la vitesse linéaire doit être calculée par rapport à l'origine du repère " e " de l'effecteur, nous avons que:

$$\mathbf{J}_{P_i} \dot{q}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,e} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1})$$

et donc:

$$\mathbf{J}_{P_i} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1})$$

Calcul du jacobien

- Pour la contribution à la **vitesse angulaire**, on a:

$$\omega_e = \omega_n = \sum_{i=1}^n \omega_{i-1,i} = \sum_{i=1}^n J_{O_i} \dot{q}_i$$

On peut encore caractériser les termes $J_{O_i} \dot{q}_i$ séparément

Articulation prismatique:

Si l'articulation i est prismatique:

$$J_{O_i} \dot{q}_i = 0$$

et donc:

$$J_{O_i} = 0$$

Articulation rotatoire:

Si l'articulation i est rotatoire:

$$J_{O_i} \dot{q}_i = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

et donc:

$$J_{O_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Calcul du jacobien

En résumé:

Le jacobien \mathbf{J} peut être partitionné en vecteurs colonnes $\mathbf{j}_{P_i}, \mathbf{j}_{O_i} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, de la manière suivante:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{P_1} & \mathbf{j}_{P_2} & \cdots & \mathbf{j}_{P_n} \\ \mathbf{j}_{O_1} & \mathbf{j}_{O_2} & \cdots & \mathbf{j}_{O_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

où, pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{P_i} \\ \mathbf{j}_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est prismaïque} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est rotatoire} \end{cases}$$

Cette expression permet de calculer le jacobien d'un manipulateur d'une façon simple et systématique à partir du **modèle géométrique direct**

En effet \mathbf{z}_{i-1} , \mathbf{p}_e , \mathbf{p}_{i-1} sont des fonctions des variables articulaires

Calcul du jacobien

- \mathbf{z}_{i-1} est donné par la 3^e colonne de la matrice de rotation \mathbf{R}_{i-1}^0
 - \mathbf{p}_e est donné par les trois premiers éléments de la 4^e colonne de la matrice de transformation \mathbf{T}_e^0
 - \mathbf{p}_{i-1} est donné par les trois premiers éléments de la 4^e colonne de la matrice de transformation \mathbf{T}_{i-1}^0
-

Remarque: les équations précédentes permettent de calculer le jacobien géométrique par rapport au *repère de la base* (le repère "0")

- Si on veut écrire le jacobien dans un **repère différent**, appelons-le " u ", il suffit de connaître la matrice de rotation relative \mathbf{R}^u
- La relation entre les vitesses dans les deux repères est donc:

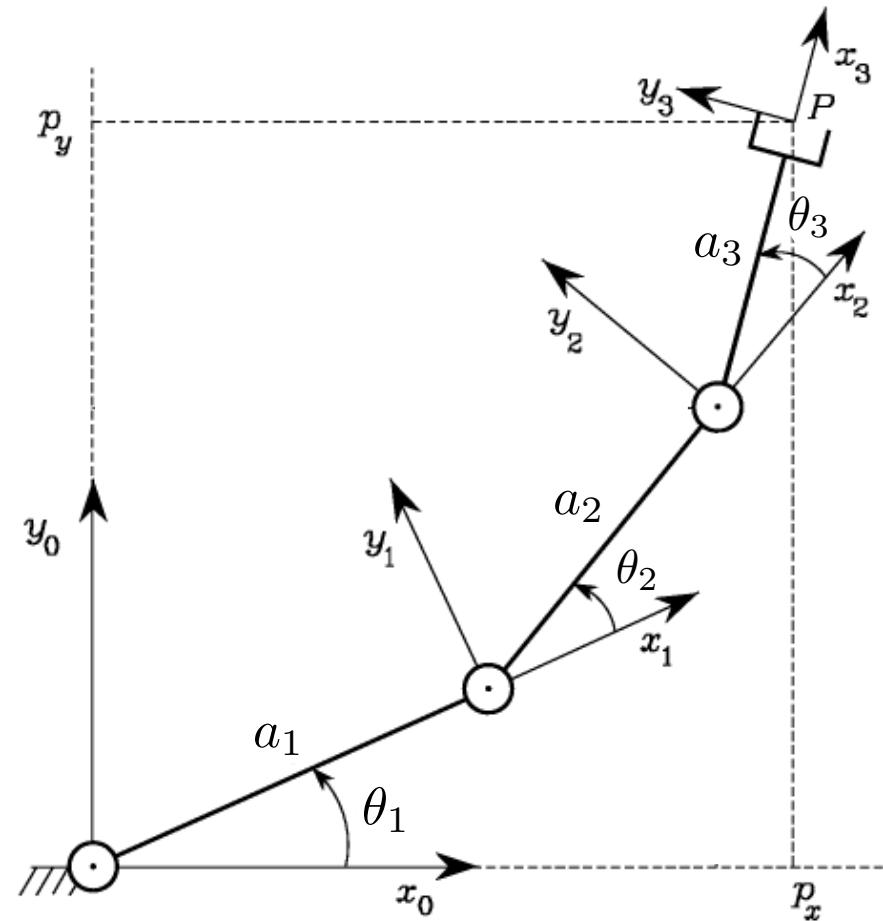
$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e^u \\ \boldsymbol{\omega}_e^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^u} \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

\mathbf{J}^u : Jacobien géométrique dans le repère " u "

Exemples

Calcul du jacobien d'un manipulateur

1 - Manipulateur planaire à 3 segments



Manipulateur planaire à 3 segments

Trois articulations rototoïdes. Le jacobien est donc:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

Les vecteurs de position des segments du robot sont:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 \\ a_1 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'autre part, les vecteurs unitaires des axes des articulations sont (les axes sont tous parallèles à l'axe z_0):

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = [0, 0, 1]^T$$

Rappel:

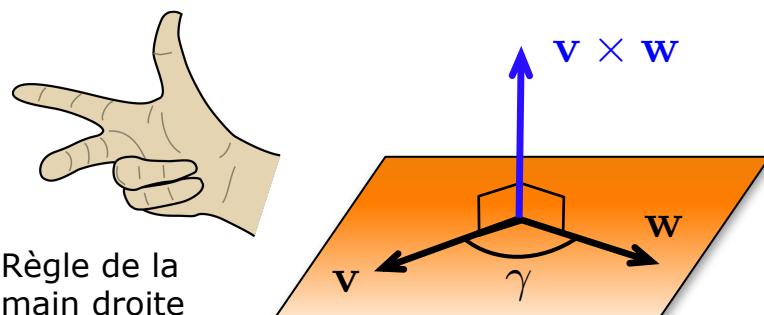
Si $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ et $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$, le **produit vectoriel** de \mathbf{v} et \mathbf{w} est défini par:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

On peut aussi exprimer le produit vectoriel comme le produit d'une matrice antisymétrique et d'un vecteur:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{w} \quad \text{où} \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Interpretation géométrique:



Règle de la main droite

Le module du produit vectoriel est:

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| |\sin \gamma|$$

Il est égal à l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w}

Manipulateur planaire à 3 segments

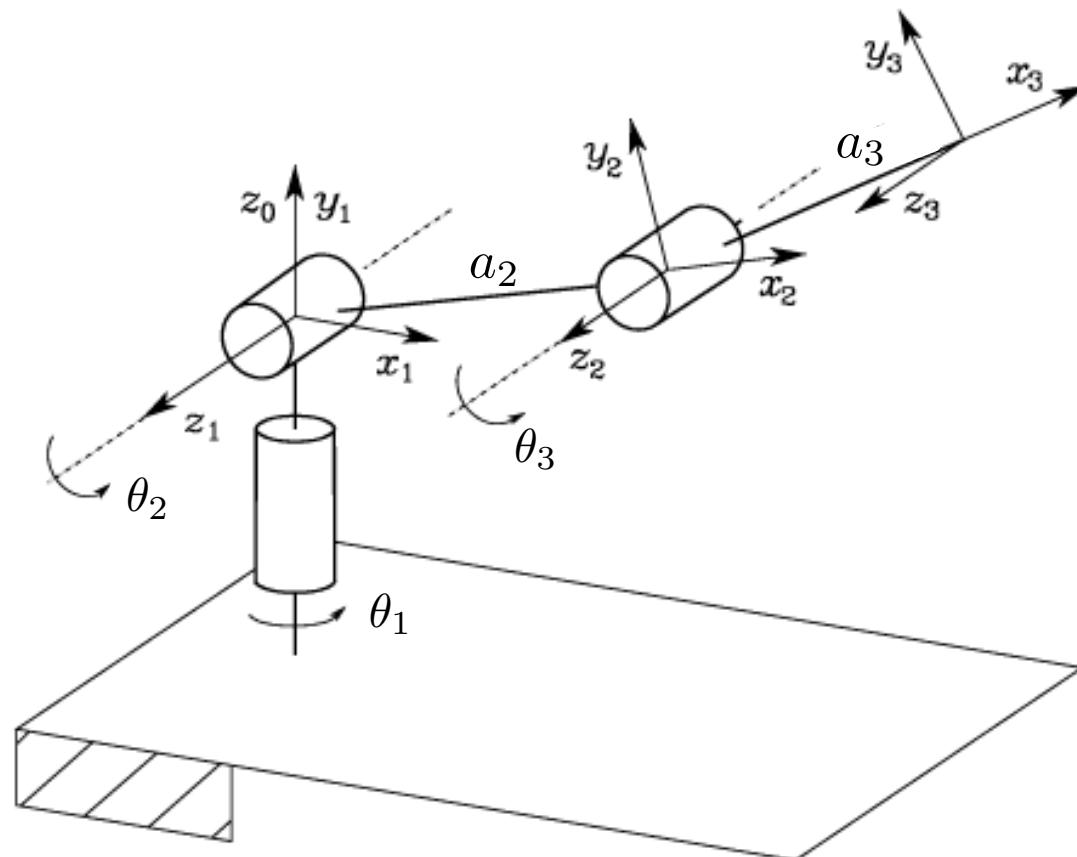
Conclusion:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque:

- Seulement les trois lignes du jacobien différentes de zéro sont importantes. Elles sont relatives aux composantes de la vitesse linéaire le long des axes x_0 et y_0 , et à la composante de la vitesse angulaire autour de l'axe z_0 . La dernière ligne du jacobien nous donne simplement la relation $\omega_z = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3$
- En effet, les 3 DDL du robot permettent de spécifier au maximum 3 variables de l'effecteur: v_z , ω_x , ω_y sont toujours zéro pour ce manipulateur

2 - Manipulateur anthropomorphe



Manipulateur anthropomorphe

Trois articulations rotoides. Le jacobien a encore la forme suivante:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

Cette fois-ci les vecteurs de position des segments du robot sont:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ a_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ a_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 (a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ \sin \theta_1 (a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}$$

et les vecteurs unitaires des axes des articulations rotoides sont:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Manipulateur anthropomorphe

Conclusion:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarques:

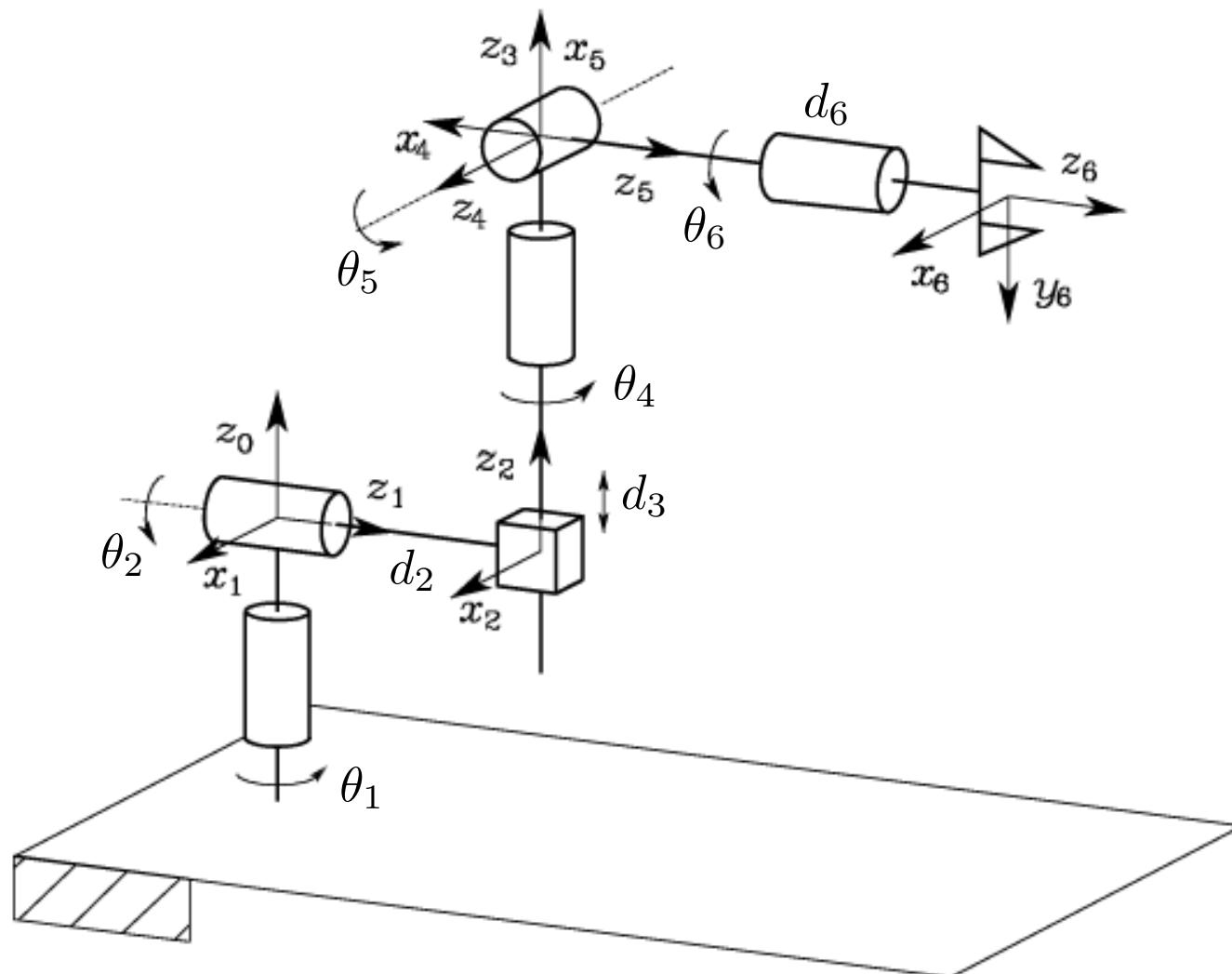
- Seulement 3 des 6 lignes du jacobien sont *linéairement indépendantes*
- La matrice

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}$$

décrit la relation entre les vitesses angulaires des trois articulations $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ et la vitesse linéaire $\dot{\mathbf{p}}_e$ de l'effecteur

- Ce manipulateur ne permet pas une vitesse angulaire *arbitraire*. En effet, les deux composantes ω_x, ω_y ne sont pas indépendantes: $\omega_y \sin \theta_1 = -\omega_x \cos \theta_1$

3 - Manipulateur Stanford



Manipulateur Stanford

Ce robot à 6 DDL est la combinaison d'un *manipulateur sphérique* (porteur) et d'un *poignet de type rotule*

Cinq articulations rotoïdes et une articulation prismatique (la 3^e):

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$$

Le jacobien est donc:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_4) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_5) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs de position des segments du robot sont:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} d_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - d_2 \sin \theta_1 \\ d_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + d_2 \cos \theta_1 \\ d_3 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

Segm.	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	d_2^*	θ_2
3	0	0	d_3	0
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	0	d_6^*	θ_6

Tableau des paramètres de DH

Manipulateur Stanford

et

$$\mathbf{p}_6 = \begin{bmatrix} d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 + d_6(c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) \\ d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 + d_6(s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) \\ d_3 c_2 + d_6(-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) \end{bmatrix}$$

Les vecteurs unitaires des axes des six articulations sont:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

Singularités cinématiques

- Le jacobien définit une application linéaire

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

entre le vecteur vitesse des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ et le vecteur vitesse de l'effecteur
 $\mathbf{v}_e = [\dot{\mathbf{p}}_e^T, \omega_e^T]^T$

Les configurations \mathbf{q} où le jacobien $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ n'est pas de **plein rang** sont appelées **singularités cinématiques** du robot

Trouver les singularités d'un manipulateur est important, car:

1. Les singularités sont des configurations où la *mobilité du robot est réduite*, c'est-à-dire il n'est pas possible d'imposer un mouvement arbitraire à l'effecteur. Au voisinage des positions singulières, le robot perd des degrés de liberté
2. Si le robot est sur une singularité, on peut avoir une *infinité de solutions* au problème géométrique inverse
3. Au voisinage d'une singularité, des *petites vitesses* dans l'espace opérationnel peuvent engendrer des *grandes vitesses* dans l'espace articulaire

Singularités cinématiques

Remarque:

Les configurations d'un robot qui sont singulières pour le MGI, les sont aussi pour le jacobien

Il existe **deux types** de singularités:

- 1) Les singularités **aux limites du volume de travail** ("type 1") qui apparaissent lorsque le bras est complètement étendu (ou rétracté)
 - Elles peuvent être évitées: elles ne constituent pas un véritable problème, en pratique
- 2) Les singularités **à l'intérieur du volume de travail** ("type 2") qui apparaissent lors de l'*alignement* de deux ou plus axes du robot, ou pour des configurations particulières de l'effecteur
 - Elles sont critiques car on peut les rencontrer partout dans le volume de travail

Singularités cinématiques

Exemple: Manipulateur planaire à 2 segments

On considère seulement les composantes de la vitesse linéaire \dot{p}_x, \dot{p}_y de l'effectuer dans le plan

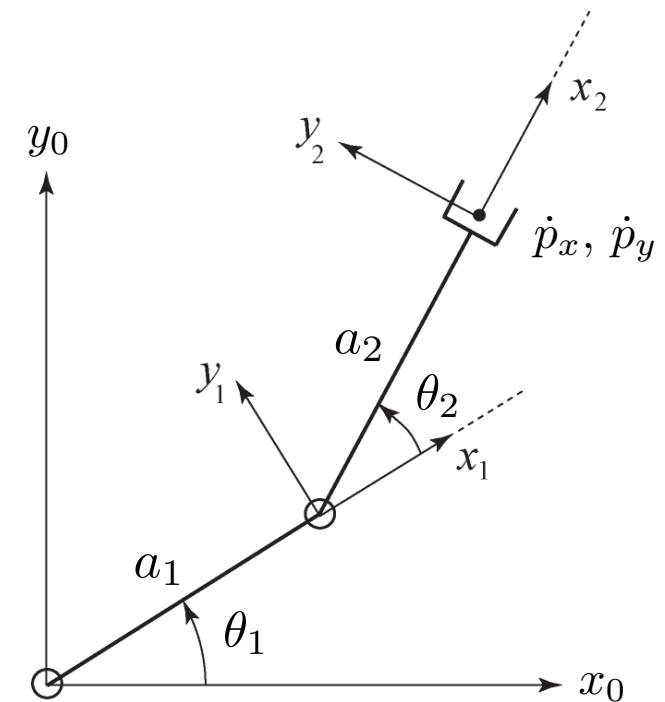
Le jacobien est donc la matrice 2×2 :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Étant une matrice carrée, pour étudier le rang de \mathbf{J} , on peut calculer son *déterminant*

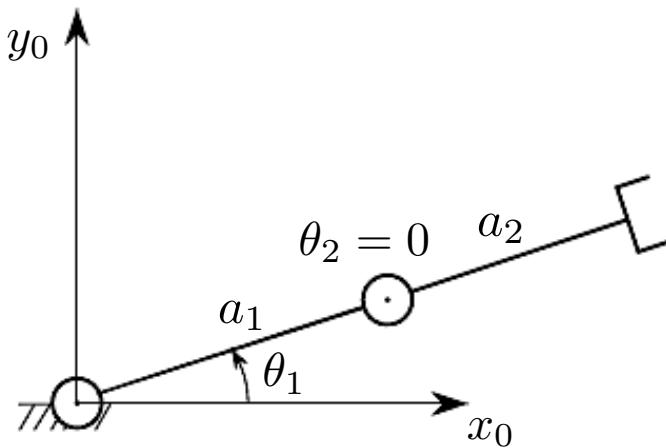
Rappel: Pour une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - cb$$



Singularités cinématiques

Exemple: Manipulateur planaire à 2 segments



- On trouve que:

$$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 \sin \theta_2$$

- Si $a_1, a_2 \neq 0$, le determinant est zéro lorsque:

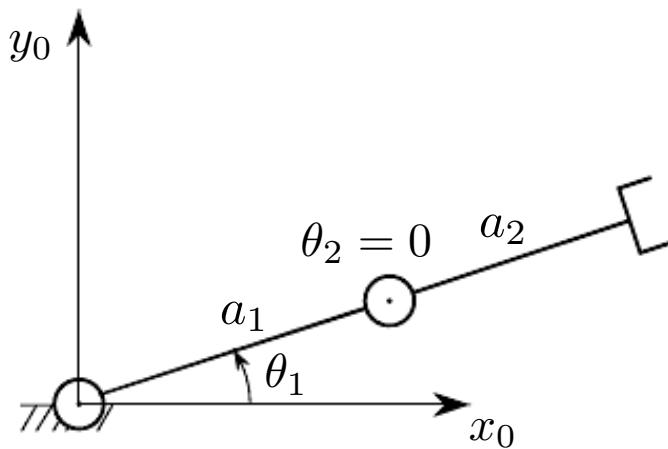
$$\theta_2 = 0, \quad \theta_2 = \pi \text{ (bras complètement étendu ou rétracté)}$$

et la valeur de θ_1 ne joue aucun rôle dans l'étude des configurations singulières

- Les deux singularités sont de **type 1** (aux limites du volume de travail)

Singularités cinématiques

Exemple: Manipulateur planaire à 2 segments



- Si on analyse le mouvement différentiel pour $\theta_2 = 0$, on observe que les deux colonnes du jacobien:

$$\begin{bmatrix} -(a_1 + a_2) \sin \theta_1 \\ (a_1 + a_2) \cos \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -a_2 \sin \theta_1 \\ a_2 \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

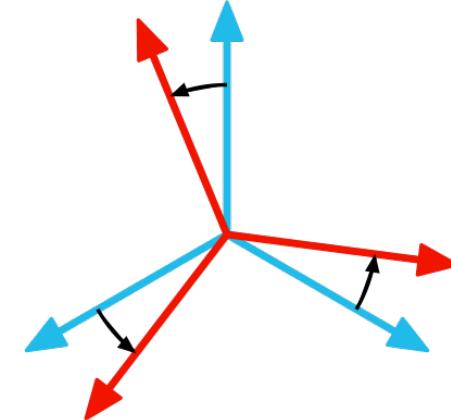
deviennent parallèles et que le rang du jacobien devient 1

- Cela veut dire que les composantes de la vitesse de l'effecteur \dot{p}_x, \dot{p}_y ne sont pas indépendantes

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



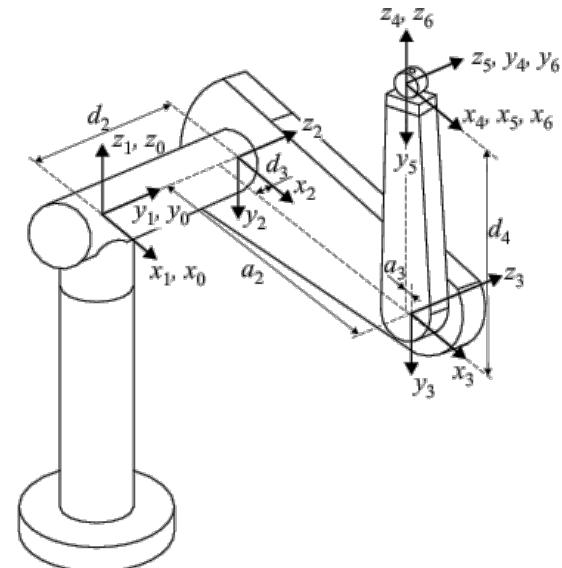
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



Modèle cinématique inverse

Problème cinématique inverse: déterminer les vitesses $\dot{\mathbf{q}}$ des articulations d'un robot afin d'atteindre une vitesse de l'effecteur \mathbf{v}_e donnée

1. Cas régulier: Si le jacobien est *carré* et de *plein rang*, on a que:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{v}_e$$

Remarque: si $\mathbf{q}(0)$ est connu, la position des articulations peut être obtenue par intégration des vitesses articulaires dans le temps:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau$$

On peut intégrer cette équation différentielle en temps discret en utilisant, par exemple la *méthode d'intégration d'Euler*. Si le pas d'intégration Δt et les positions et vitesses au temps t_k sont connues, les positions des articulations au temps $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ peuvent être calculées via:

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k)) \mathbf{v}_e(t_k) \Delta t$$

Ceci permet ainsi de trouver *une solution* au **problème géométrique inverse**

Modèle cinématique inverse

2. Cas redondant: si le robot est *cinématiquement redondant*, $r < n$ où n est le nombre de DDL du robot et r le nombre de variables de l'espace opérationnel nécessaires à spécifier une tâche donnée, alors le jacobien a plus de colonnes que de lignes et $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ a un *nombre infini* de solutions.

$n - r$ représente le **degré de redondance** du robot

$$\begin{array}{c|c} n & \\ \hline r & \mathbf{J} \end{array}$$

Plusieurs méthodes de résolution sont alors envisageables:

- a)** Ajouter $n - r$ *relations supplémentaires* pour que \mathbf{J} devienne carrée (par ex. blocage d'articulation, contrainte d'optimisation)

- b)** Trouver une *solution particulière* en ne considérant que r articulations (au lieu de n), puis calculer les valeurs de toutes les articulations en prenant en compte un critère d'optimisation

- c)** Utiliser la méthode de résolution basée sur la notion de **pseudo-inverse**

Modèle cinématique inverse

c) Résolution basée sur la notion de **pseudo-inverse**. On reformule le problème comme un *problème d'optimisation linéaire sous contraintes*

- Les solutions du problème d'inversion sont:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}_e + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0$$

où \mathbf{J}^\dagger est la *pseudo-inverse* de Moore-Penrose (à droite) de \mathbf{J} , à savoir:

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1}$$

- Le **1^{er} terme**, $\mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}_e \in \text{Im}(\mathbf{J}^T)$, est la solution qui minimise $\|\mathbf{v}_e - \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}\|$ (l'erreur au sens des moindres carrés) et qui minimise aussi (localement) la norme du vecteur des vitesses articulaires, à savoir $\|\dot{\mathbf{q}}\|$
- Le **2^e terme**, $(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0$, s'appelle *solution homogène*. Le vecteur de vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}_0$ n'est pas unique: il peut être utilisé pour satisfaire des **contraintes supplémentaires** (avec une *priorité secondaire* par rapport à la contrainte cinématique primaire)

$\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}$ projette $\dot{\mathbf{q}}_0$ dans le $\ker(\mathbf{J})$ pour ne pas violer $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$

En fait, le noyau ou kernel de \mathbf{J} , $\ker(\mathbf{J})$, est le sous-espace des vitesses articulaires qui n'engendrent *aucune vitesse* sur l'effecteur, pour une posture donnée \mathbf{q} du robot

Modèle cinématique inverse

Problème: comment spécifier $\dot{\mathbf{q}}_0$ pour une utilisation convenable des DDL redondants du robot ?

- *Choix typique:* vecteur gradient d'une fonction scalaire de \mathbf{q} :

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = k_0 \left(\frac{\partial w(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T$$

où

$k_0 > 0$: paramètre (gain)

$w(\mathbf{q})$: fonction objectif (ou de coût) secondaire

Exemples de fonctions $w(\mathbf{q})$ possibles:

1. Mesure de manipulabilité:

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}))}$$

Nous avons que $w(\mathbf{q}) = 0$ dans une singularité. Ainsi, si on maximize cette mesure, la redondance du robot est utilisée pour s'écartier des singularités

Modèle cinématique inverse

2. Distance des butées mécaniques:

$$w(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_i^M - q_i^m} \right)^2$$

où q_i^M , q_i^m sont les valeurs maximales et minimales de l'articulation i et \bar{q}_i est sa valeur moyenne. Ici, en maximisant $w(\mathbf{q})$, on exploite la redondance du robot pour s'assurer que la distance qui sépare chaque articulation de sa position moyenne soit minimale

3. Distance d'un obstacle:

La redondance peut être utilisée pour éviter les collisions entre le manipulateur et un obstacle:

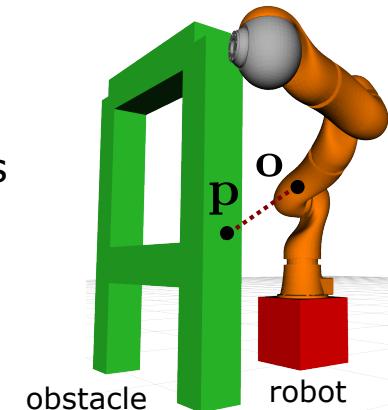
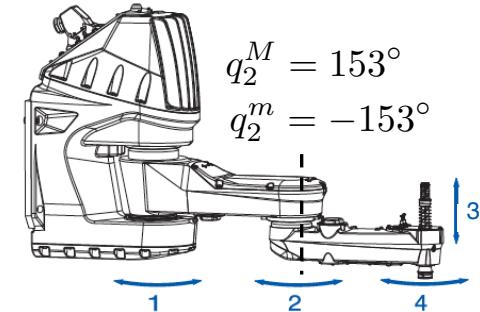
$$w(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{o}} \|\mathbf{p}(\mathbf{q}) - \mathbf{o}\|$$

où

\mathbf{p} : position d'un point sur l'obstacle (le centre pour des obstacles sphériques)

\mathbf{o} : position d'un point générique sur la structure du robot

FAST picker TP80 de Stäubli



Modèle cinématique inverse

3. Cas singulier:

- Les solutions précédentes (*cas régulier* et *cas redondant*) peuvent être calculées seulement si le jacobien est de **plein rang**
- Ces solutions perdent toute signification lorsque le manipulateur se trouve dans une *configuration singulière*. Dans ce cas, le système:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

contient des *équations linéairement dépendantes*

- Pour résoudre le problème d'inversion du modèle cinématique *au voisinage d'une singularité*, on peut recourir à une *inversion par moindres carrés amortis*:

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T + k^2 \mathbf{I})^{-1}$$

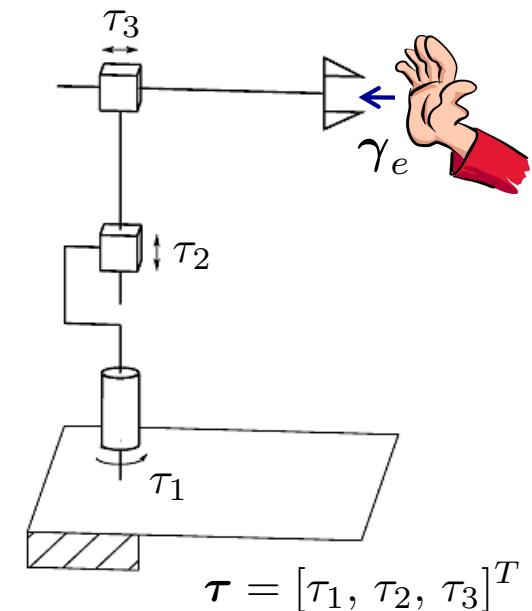
où $k \geq 0$ est un *facteur d'amortissement* qui rend l'inversion mieux conditionnée du point de vue numérique et \mathbf{I} est la matrice identité. On peut constater que si $k = 0$ alors $\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^\dagger$, c'est-à-dire, on retrouve la pseudo-inverse du jacobien \mathbf{J}

Statique

Objectif de la statique: étant donné un manipulateur dans une configuration d'**équilibre statique**, déterminer la relation entre les forces généralisées appliquées sur l'effecteur et les forces généralisées appliquées sur les articulations (forces pour les articulations prismatiques et couples pour les articulations rototoïdes)

Soit:

$\tau \in \mathbb{R}^n$: vecteur des forces généralisées exercées par les actionneurs sur les articulations du robot



$\gamma_e \in \mathbb{R}^r$: vecteur des forces généralisées agissant sur l'effecteur, où r est la dimension de l'espace opérationnel d'intérêt

- L'application du Principe des Travaux Virtuels permet d'écrire l'équation:

$$\boxed{\tau = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \gamma_e}$$

La **transposée du jacobien géométrique** d'un manipulateur met donc en relation les forces sur l'effecteur avec les forces sur les n articulations

Jacobien analytique

- Si la pose de l'effecteur du robot est spécifiée avec un nombre minimal de paramètres dans l'espace opérationnel, nous pouvons obtenir **analytiquement** l'équation de la cinématique en dérivant le MGD $\mathbf{x}_e = [\mathbf{p}_e^T, \phi_e^T]^T = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ par rapport au temps:

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

où

\mathbf{p}_e : origine du repère de l'effecteur par rapport à la base

ϕ_e : *représentation minimale* de l'orientation de l'effecteur (3 variables, par ex. les angles de Euler) dans l'espace opérationnel

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} : \text{jacobien analytique}$$

- Le *jacobien analytique* \mathbf{J}_A est **différent** du *jacobien géométrique* \mathbf{J} car la vitesse angulaire de l'effecteur par rapport à la base, ω_e , ne coïncide pas avec $\dot{\phi}_e$, en général

Pour un aperçu des algorithmes basés sur le jacobien analytique qui permettent de calculer le modèle cinématique inverse (MCI), voir le Ch. 3.7, pages 132-147, du livre de Siciliano, Sciavicco, Villani et Oriolo

