TD 3: Modèle cinématique direct et inverse

Exercice 1 : Propriétés du produit vectoriel

Soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et soit $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ la matrice antisymétrique associée au vecteur $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$, à savoir:

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérifier les propriétés suivantes du produit vectoriel, noté "×":

- $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $(\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ [Multiplication par un scalaire]
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{S}(\mathbf{b})\mathbf{a}$ [Anticommutativité]
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ [Distributivité]
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ [Identité de Jacobi]
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{d} = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{d}) + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}$ [Somme de produits vectoriels]
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$
- $\mathbf{S}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{S}(\mathbf{b}) - \mathbf{S}(\mathbf{b})\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T$
- $\mathbf{S}((\mathbf{M}\mathbf{a}) \times (\mathbf{M}\mathbf{b})) = \mathbf{M}\mathbf{S}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{M}^T$ où $\mathbf{M}$ est une matrice quelconque
- $(\mathbf{M}\mathbf{a}) \times (\mathbf{M}\mathbf{b}) = \det(\mathbf{M})(\mathbf{M}^{-1})^T (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ où $\mathbf{M}$ est une matrice inversible.

Remarque: Le produit vectoriel n'est pas associatif, mais il satisfait l'identité de Jacobi.

Exercice 2 : Calcul du jacobien géométrique

Calculer le jacobien géométrique $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ des manipulateurs suivants:

- Manipulateur SCARA à 4 DDL
- Manipulateur cylindrique
- Poignet de type rotule
- Manipulateur planaire RRP
- Manipulateur anthropomorphe avec poignet de type rotule
- Manipulateur DLR.

Exercice 3 : Étude des singularités cinématiques

Vérifier que les valeurs des variables articulaires suivantes correspondent à des singularités cinématiques pour les trois manipulateurs ci-dessous (*conseil*: étudier le rang du jacobien géométrique $\mathbf{J}$):

- $\theta_2 \in \{0, \pi\}$, pour le manipulateur SCARA à 4 DDL
- $\theta_5 = 0$ (à savoir, les axes z_3 et z_5 sont alignés), pour le poignet de type rotule
- $\theta_3 \in \{0, \pi\}$ et $\{\theta_2, \theta_3 : a_2 \cos\theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = 0\}$, pour le manipulateur anthropomorphe.

Dessiner chaque robot dans les configurations singulières.

<u>Exercice 4</u> : Modèle cinématique inverse

La vitesse linéaire de l'effecteur d'un manipulateur anthropomorphe (voir la Figure 1) est:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = [10,\ 5,\ 1]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{cm/s}$$

- Déterminer le vecteur des vitesses articulaires du manipulateur, si $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T = [0, \pi/4, \pi/4]^T$. Préciser si nous sommes face à un cas régulier, redondant ou singulier d'inversion cinématique
- Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée les valeurs de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et la vitesse linéaire de l'effecteur, et renvoie le vecteur des vitesses articulaires du robot.

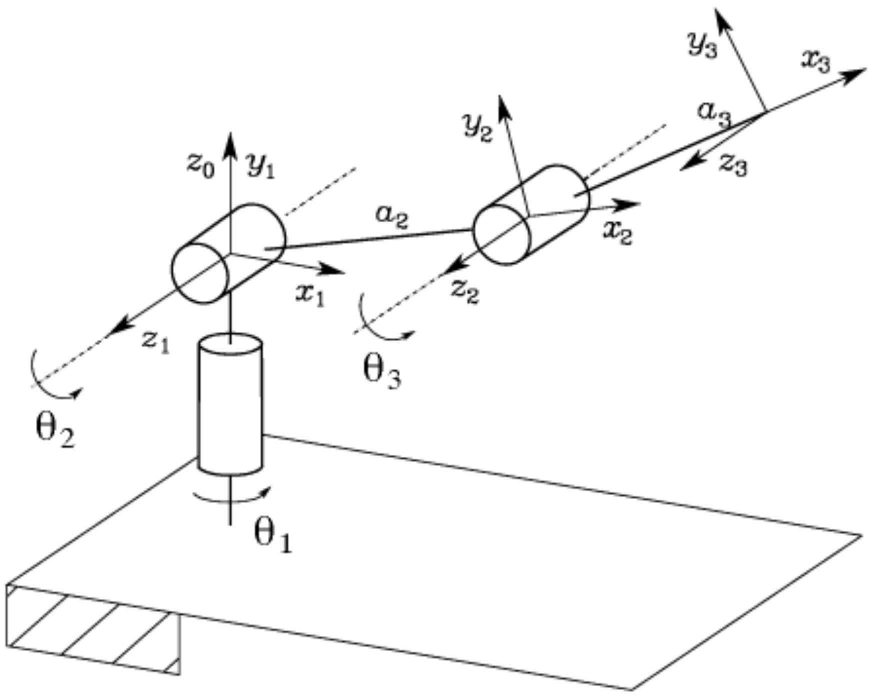

Figure 1: Manipulateur anthropomorphe.