

Robotique Industrielle

UPJV, Département EEA

M1 3EA, Parcours RoVA, EC15

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

**Lundi 13h30-16h30 (CM ou TD, salle CURI 305)
(TP, salle TP204)**

Année Universitaire 2022-2023



Plan du cours

Chapitre 1 : Introduction

- 1.1 Définitions
- 1.2 Classification des robots
- 1.3 Constituants d'un robot
- 1.4 Caractéristiques d'un robot
- 1.5 Générations de robots
- 1.6 Programmation des robots
- 1.7 Utilisation des robots



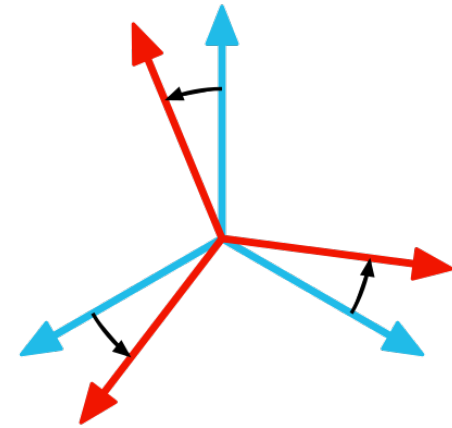
Chapitre 2 : Fondements Théoriques

- 2.1 Pose d'un corps rigide
 - Matrices de rotation et autres représentations de l'orientation
 - Transformations homogènes

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



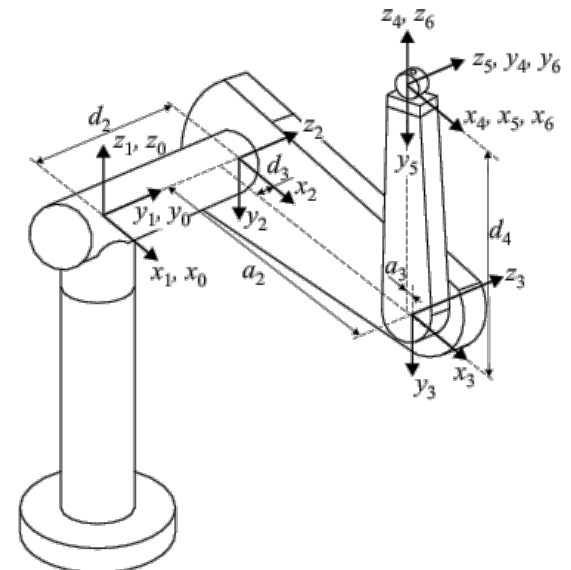
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



Notation

$$a, \gamma, M \in \mathbb{R}$$

scalaires (nombres réels)

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

vecteur *colonne* de dimension n , $\mathbf{x} =$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

matrice avec n lignes et m colonnes

$$\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

transposée de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\det(\mathbf{A}), \mathbf{A}^{-1}$$

déterminant et inverse de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

matrice identité $n \times n$

$$\mathbf{0}_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

matrice de zéros $n \times m$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

produit scalaire des vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

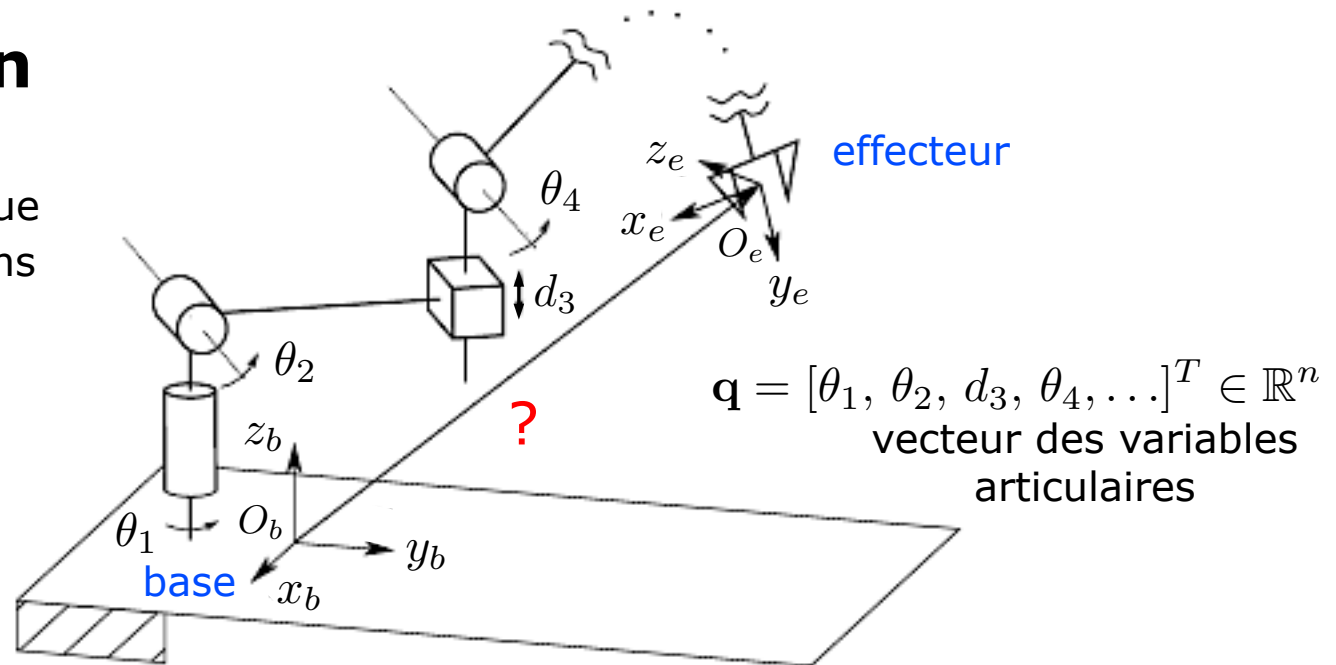
norme euclidienne du vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

Motivation

Robot générique
à n articulations



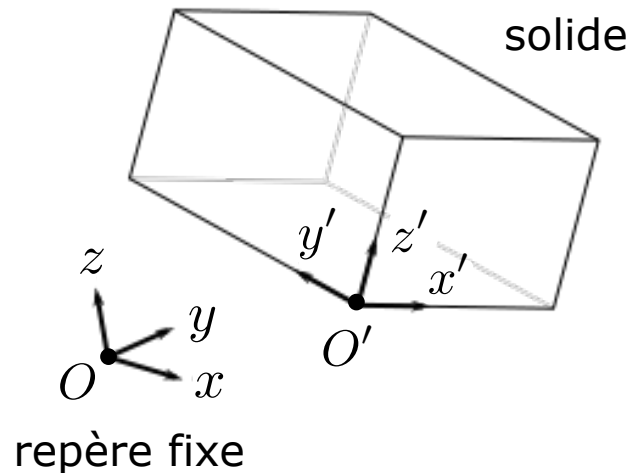
- Un manipulateur peut être représenté comme une *chaîne cinématique* de segments reliés par l'intermédiaire d'articulations rotoïdes ou prismatiques
- Le mouvement résultant de la structure est obtenu par *composition* des mouvements élémentaires de chaque segment par rapport au précédent
- Afin de manipuler un objet dans l'espace, il est nécessaire de décrire la *position* et l'*orientation* (**pose**) de l'effecteur

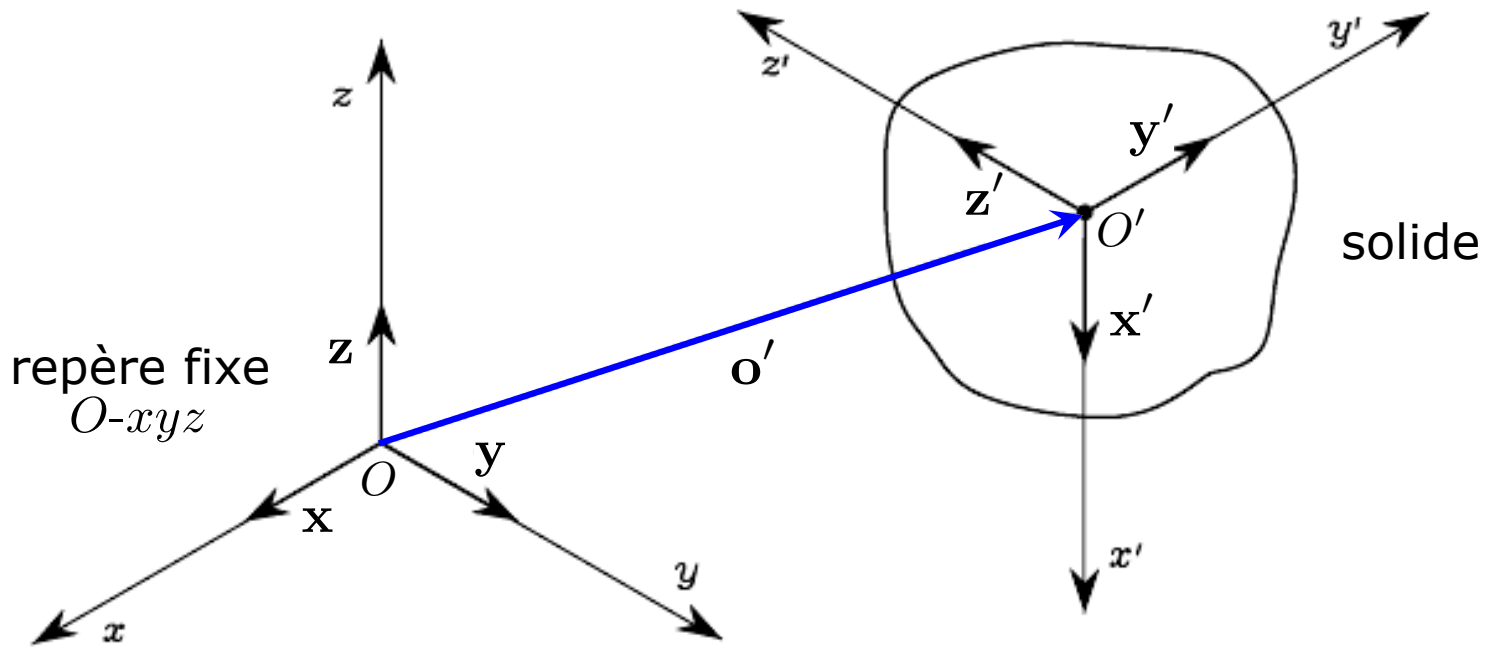
Objectif: exprimer la pose de l'effecteur en fonction des variables des articulations, par rapport à un repère donné (ex. le repère de la base)

2.1 Pose d'un corps rigide

La **pose** d'un *corps rigide* (ou *solide*) dans l'espace 3D peut être complètement décrite par **6 paramètres indépendants**:

- **3** paramètres indépendants définissent la **position** d'un point, noté O' , du solide dans le repère fixe $O-xyz$ (ex. coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques)
- **3** paramètres indépendants déterminent l'**orientation** du solide autour du point O' (ex. les angles d'Euler)





La **position** du point O' du solide par rapport au repère fixe $O-xyz$ s'exprime par l'équation:

$$\mathbf{o}' = o'_x \mathbf{x} + o'_y \mathbf{y} + o'_z \mathbf{z}$$

où \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} sont les vecteurs unitaires (leurs norme est 1) des axes du repère $O-xyz$ et o'_x , o'_y , o'_z sont les composantes du vecteur $\mathbf{o}' \in \mathbb{R}^3$ le long de chacun des trois axes

- Afin de décrire l'**orientation** du solide, considérons un repère *attaché au corps* et exprimons ses vecteurs unitaires par rapport au repère $O-xyz$
- Soit $O'-x'y'z'$ un tel repère avec origine O' et soient \mathbf{x}' , \mathbf{y}' , \mathbf{z}' les vecteurs unitaires des axes
- Ces vecteurs sont exprimés par rapport au repère $O-xyz$ par les équations:

$$\mathbf{x}' = x'_x \mathbf{x} + x'_y \mathbf{y} + x'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{y}' = y'_x \mathbf{x} + y'_y \mathbf{y} + y'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{z}' = z'_x \mathbf{x} + z'_y \mathbf{y} + z'_z \mathbf{z}$$

- Sous forme compacte, les vecteurs unitaires \mathbf{x}' , \mathbf{y}' , \mathbf{z}' qui décrivent l'orientation du solide par rapport à $O-xyz$, peuvent être combinés dans la matrice 3×3 :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}'] = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T \mathbf{x} & \mathbf{y}'^T \mathbf{x} & \mathbf{z}'^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{y} & \mathbf{y}'^T \mathbf{y} & \mathbf{z}'^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{z} & \mathbf{y}'^T \mathbf{z} & \mathbf{z}'^T \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

qui est appelée **matrice de rotation**. On dit que x'_x est le *cosinus directeur* reliant \mathbf{x}' à \mathbf{x} (et de même pour les autres huit éléments de \mathbf{R})

Propriétés des matrices de rotation

- Les colonnes d'une matrice de rotation sont *orthogonales* à deux à deux,

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{y}' = 0, \quad \mathbf{y}'^T \mathbf{z}' = 0, \quad \mathbf{z}'^T \mathbf{x}' = 0$$

est leur norme est égale à 1:

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = 1, \quad \mathbf{y}'^T \mathbf{y}' = 1, \quad \mathbf{z}'^T \mathbf{z}' = 1$$

Par conséquent, \mathbf{R} est une **matrice orthogonale**, c'est-à-dire:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$$

Si on multiplie à droite chaque côté de l'équation précédente par \mathbf{R}^{-1} on trouve que:

$$\boxed{\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}}$$

c'est-à-dire, la *transposée d'une matrice de rotation est égale à son inverse*.

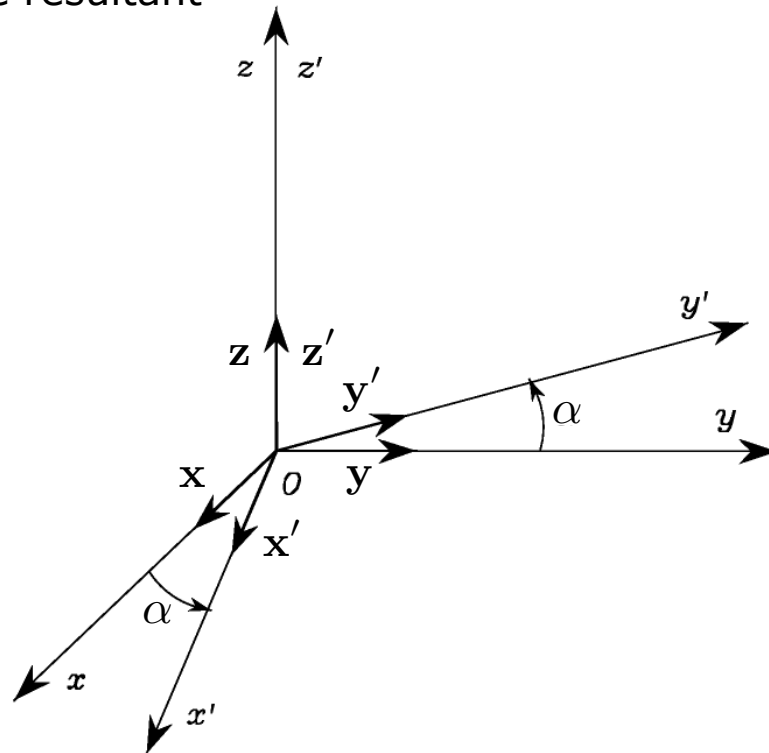
- En plus de conserver les *longueurs*, les matrices de rotation doivent également conserver l'*orientation*, donc il faut que $\det(\mathbf{R}) = 1$ (vrai, si le repère est *direct*)

$$\text{SO}(3) \triangleq \{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1 \} \quad \text{Groupe spécial orthogonal de dimension 3}$$

Rotations élémentaires

- Considérons les rotations qu'on peut obtenir à partir de **rotations élémentaires** autour des axes x , y , z
- Ces rotations sont **positives** si elles sont faites autour des axes relatifs, dans le sens *anti-horaire*

Exemple: le repère $O-xyz$ est pivoté d'un angle α autour de l'axe z et $O-x'y'z'$ est le repère résultant



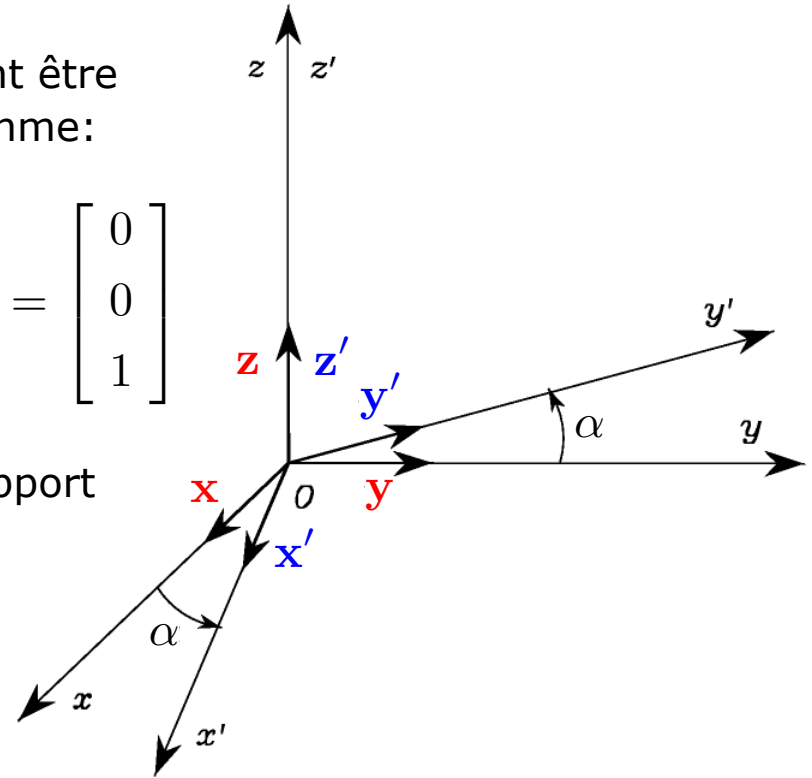
Rotations élémentaires

- Les vecteurs unitaires de $O-x'y'z'$ peuvent être exprimés par rapport au repère $O-xyz$ comme:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice de rotation de $O-x'y'z'$ par rapport à $O-xyz$ engendrée, est donc:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



De la même façon, on peut trouver la matrice de rotation autour de l'axe x d'un angle β et la matrice de rotation autour de l'axe y d'un angle γ

Remarque: Ces matrices seront utiles pour décrire des rotations dans l'espace 3D autour d'axes *quelconques*

Rotations élémentaires: sommaire

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour
de l'axe x d'un angle γ

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour
de l'axe y d'un angle β

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour
de l'axe z d'un angle α

Remarque:

Pour les rotations élémentaires, la propriété suivante est vérifiée:

$$\mathbf{R}_x(-\gamma) = \mathbf{R}_x^T(\gamma), \quad \mathbf{R}_y(-\beta) = \mathbf{R}_y^T(\beta), \quad \mathbf{R}_z(-\alpha) = \mathbf{R}_z^T(\alpha)$$

Représentation d'un vecteur

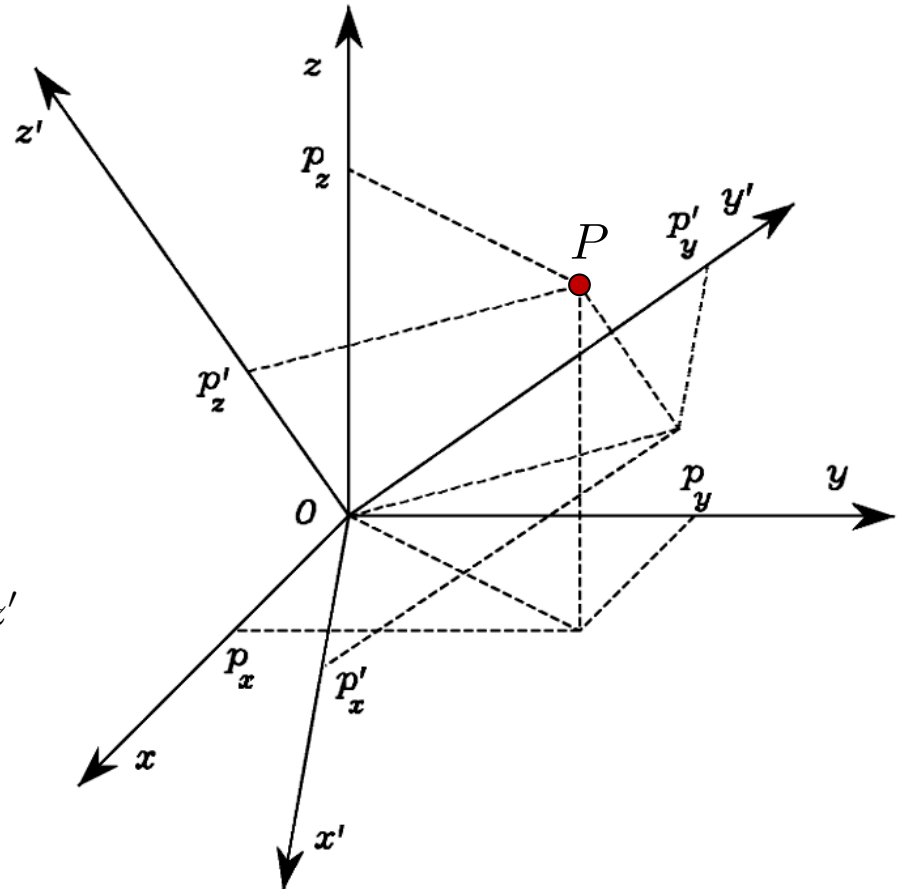
Hypothèse simplificatrice: l'origine du repère du solide coïncide avec l'origine du repère fixe. Donc $\mathbf{o}' = \mathbf{0}_{3 \times 1} = [0, 0, 0]^T$.

On peut représenter le point 3D P comme:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \text{ par rapport à } O\text{-}xyz$$

et

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \text{ par rapport à } O\text{-}x'y'z'$$



Représentation d'un vecteur

Mais \mathbf{p} et \mathbf{p}' sont deux représentations du même point P , donc

$$\mathbf{p} = p'_x \mathbf{x}' + p'_y \mathbf{y}' + p'_z \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} \mathbf{p}'$$

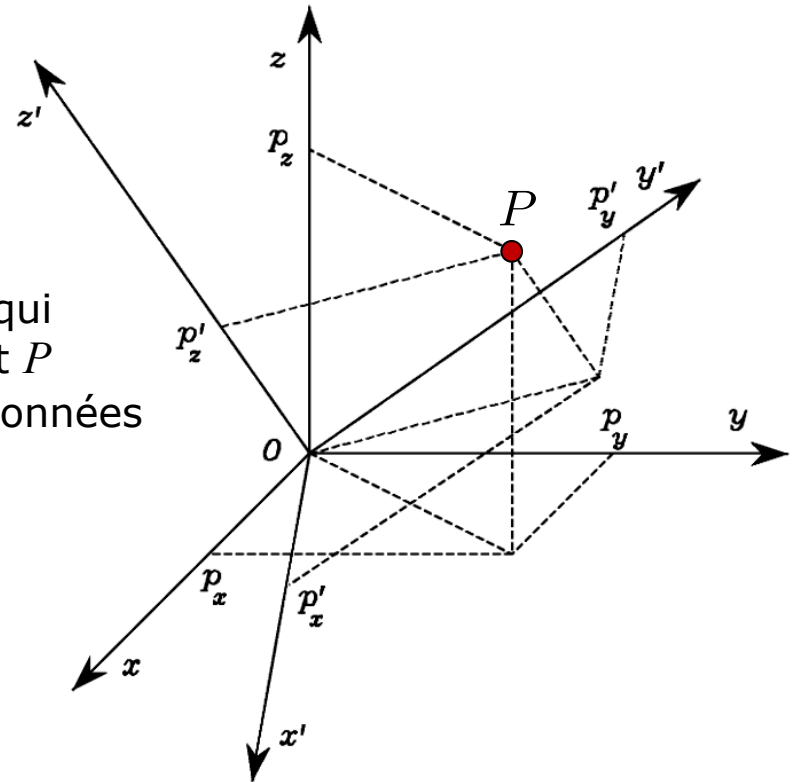
Mais cela signifie que (rappel les équations vues précédemment):

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{p}'$$

\mathbf{R} représente la matrice de transformation qui permet d'exprimer les coordonnées du point P dans le repère $O-xyz$, en fonction des coordonnées du même point dans le repère $O-x'y'z'$

\mathbf{R} est une *matrice orthogonale*. Donc la transformation inverse est simplement:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p}$$



Représentation d'un vecteur

Exemple:

Deux repères avec la même origine et une rotation relative d'un angle α autour de l'axe z

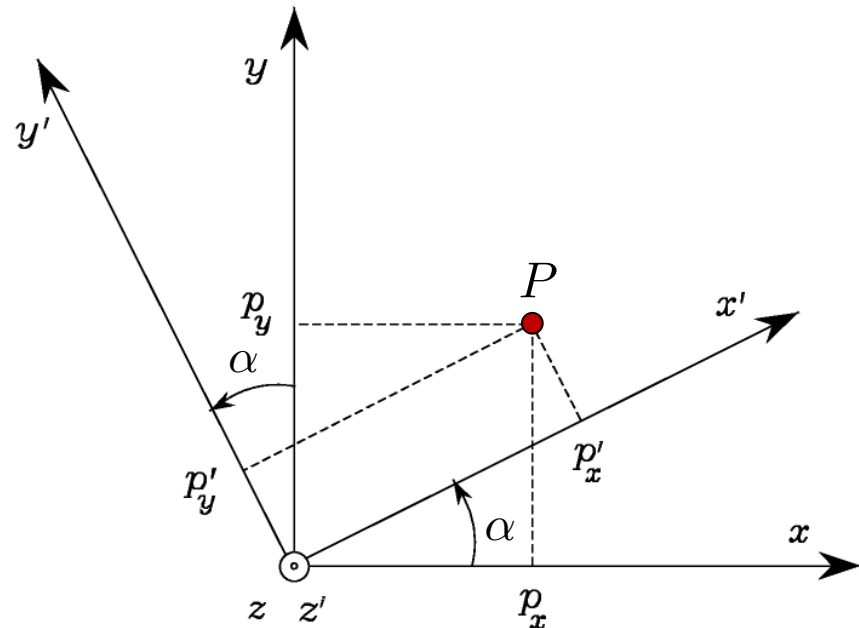
\mathbf{p} , \mathbf{p}' : coordonnées du point P dans les repères $O-xyz$ et $O-x'y'z'$

On trouve facilement que:

$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha$$

$$p_z = p'_z$$



Remarque:

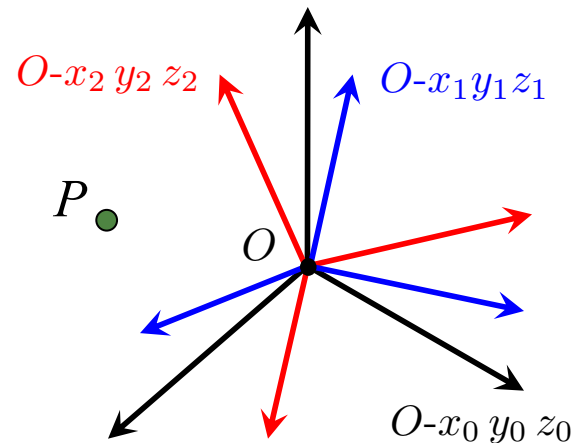
La matrice $\mathbf{R}_z(\alpha)$ représente non seulement l'orientation d'un repère par rapport à un autre, mais elle décrit également la *transformation d'un vecteur dans un repère en un autre avec la même origine*

Composition de matrices de rotation

Problème: comment composer plusieurs rotations ?

Considérons **trois repères** $O-x_0 y_0 z_0$, $O-x_1 y_1 z_1$, $O-x_2 y_2 z_2$ avec la *même origine* O

$\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2 \in \mathbb{R}^3$: coordonnées d'un point P dans les trois repères



Composition de matrices de rotation

Soit \mathbf{R}_i^j la matrice de rotation du repère i par rapport au repère j

Donc

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2$$

De même, nous avons:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2$$

Mais alors on peut déduire que:

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1$$

Composition de matrices de rotation

Considérons un repère initialement aligné avec $O-x_0 y_0 z_0$

La rotation définie par \mathbf{R}_2^0 peut être obtenue en **deux étapes**:

1. Tourne le repère avec \mathbf{R}_1^0 pour l'aligner avec $O-x_1 y_1 z_1$
2. Tourne le repère, maintenant aligné avec $O-x_1 y_1 z_1$, en utilisant \mathbf{R}_2^1 pour l'aligner avec $O-x_2 y_2 z_2$

Remarque [**Repère courant**]:

- De façon générale, une rotation d'ensemble peut être exprimée comme une séquence de n rotations partielles
- Chaque rotation est définie par rapport à la **précédente**
- Le repère par rapport à lequel la rotation se produit est appelé **repère courant**
- La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de rotation, en suivant l'ordre donné des rotations:

$$\mathbf{R}_n^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \cdots \mathbf{R}_{n-1}^{n-2} \mathbf{R}_n^{n-1}$$

→

Composition de matrices de rotation

Remarque [Repère fixe]:

- Les rotations successives peuvent aussi être spécifiées toujours par rapport au **repère initial**
- On dit que les rotations sont faites par rapport à un **repère fixe**
- La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à gauche** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations:

$$\mathbf{R}_n^0 = \mathbf{R}_n^{n-1} \mathbf{R}_{n-1}^{n-2} \cdots \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0$$

←

Remarque:

Conformément à notre notation, nous avons que:

$$\mathbf{R}_i^j = (\mathbf{R}_j^i)^{-1} = (\mathbf{R}_j^i)^T$$

Composition de matrices de rotation

Problème fondamental: le produit matriciel *n'est pas commutatif* !

En général, deux rotations ne commutent pas et la composition dépend de l'ordre de chaque rotation, à savoir:

$$\mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \neq \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0$$

Exemple:

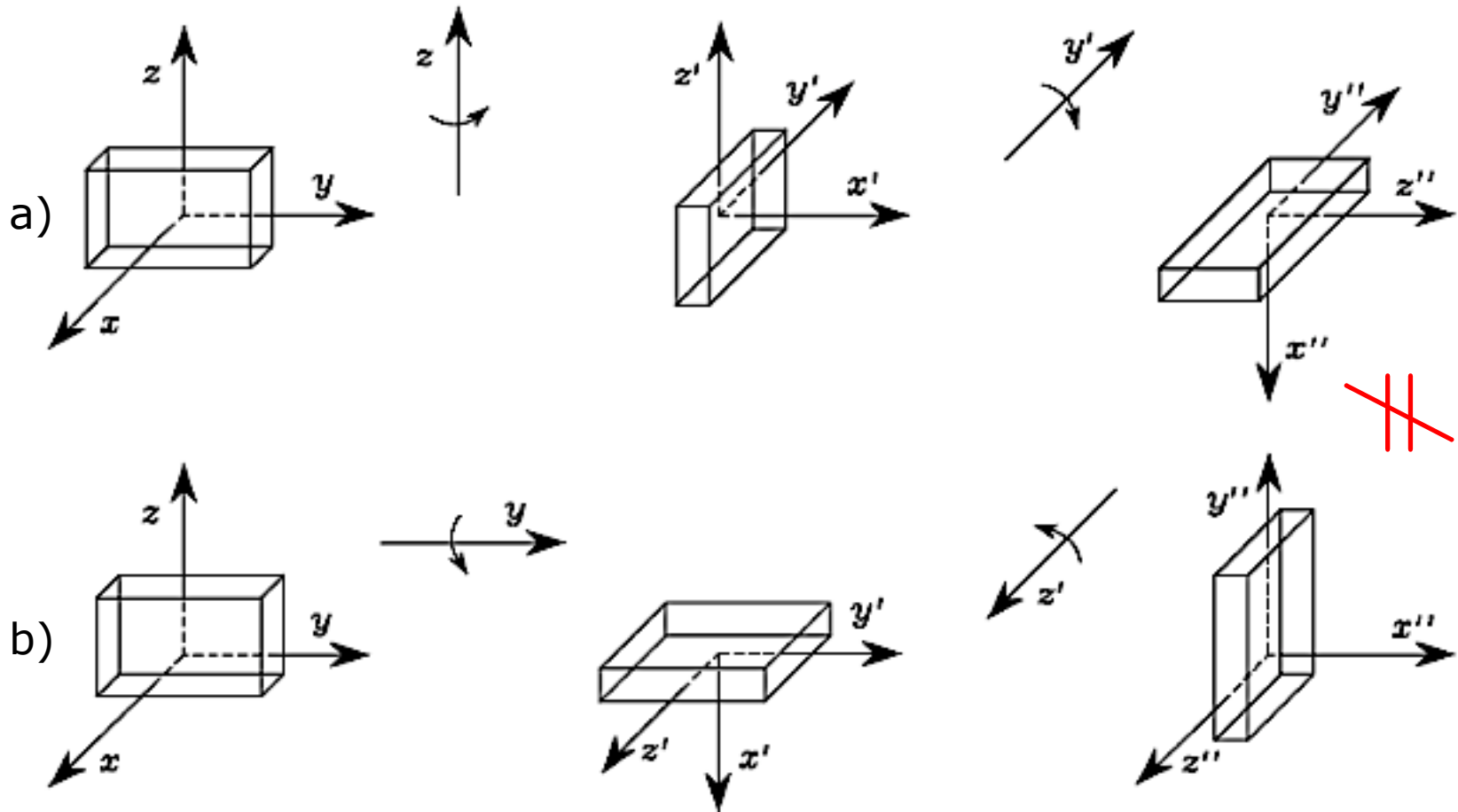
$$\mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\pi/6) \mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 & \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x(\pi/4) \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

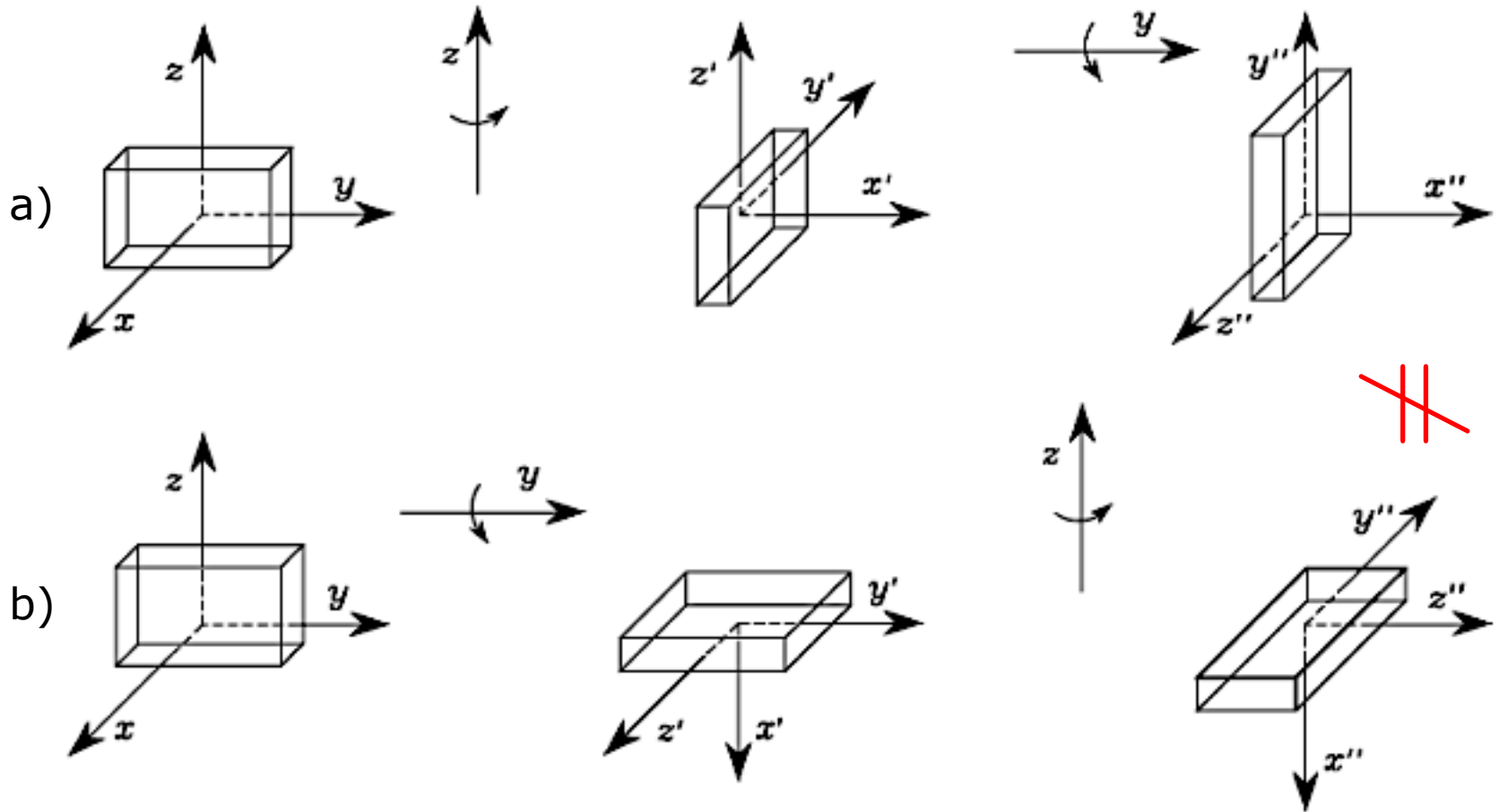
Composition de matrices de rotation

- Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère courant**



Composition de matrices de rotation

- Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère fixe**



Représentations de l'orientation

- Les *matrices de rotation* fournissent une **description redondante** de l'orientation d'un corps
- En effet, une matrice de rotation \mathbf{R} comprend 9 éléments:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Toutefois nous avons **6 relations indépendantes** entre ces éléments (les *contraintes d'orthogonalité* et de *normalité* des colonnes de \mathbf{R}):

$$\begin{aligned} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0 & r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 & r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1 \\ r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} &= 0 & r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion: **3 paramètres** sont suffisants pour décrire l'orientation d'un corps

Une représentation de l'orientation en fonction de *3 paramètres indépendants* est dite **représentation minimale**

Représentations de l'orientation

- Une *représentation minimale* de l'orientation peut être obtenue en utilisant un ensemble de **trois angles**: $\phi = [\varphi, \theta, \psi]^T$
- Une *matrice de rotation générique* peut être obtenue en composant une séquence opportune de **3 rotations élémentaires** (Théor. d'Euler, 1776)
Attention: il faut garantir que deux rotations successives ne sont pas faites autour d'*axes parallèles*

Cela veut dire que *12 ensembles différents d'angles* sont admissibles parmi les $3^3 = 27$ combinaisons possibles:

ZXZ, XYX, YZY, ZYZ, XZX, YXY (angles « propres »)
XYZ, YZX, ZXY, XZY, ZYX, YXZ (angles de Tait-Bryan)

Chaque ensemble constitue un triplet d'**angles d'Euler**

Deux triplets d'angles d'Euler très utilisés sont:

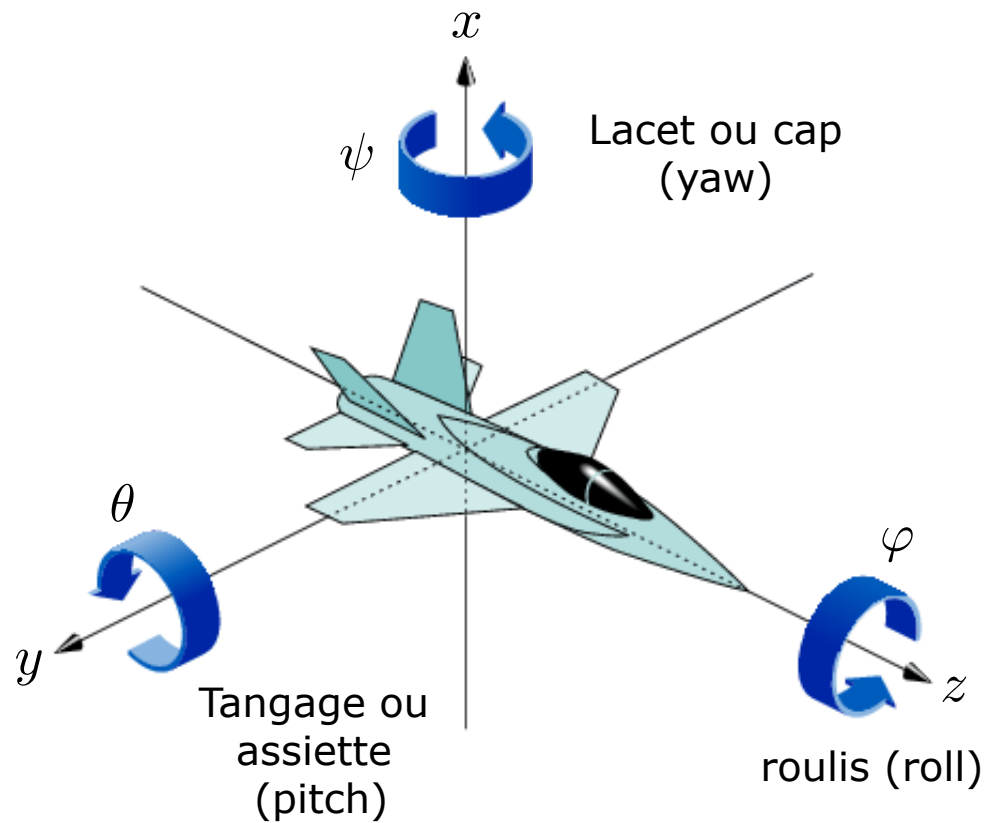
1. Les angles ZYZ
2. Les angles ZYX ou angles **roulis-tangage-lacet** (*roll-pitch-yaw*, en anglais)



Leonhard Euler
(1707–1783)

Angles roulis-tangage-lacet

- Représentation de l'orientation utilisée en (*aéro*)nautique pour décrire l'attitude d'un avion
- Les angles (φ , θ , ψ) représentent des rotations définies dans un repère fixe attaché au centre de masse de l'avion



Angles roulis-tangage-lacet

La rotation décrite par les angles de roulis, tangage et lacet est obtenue comme la composition de *3 rotations élémentaires*:

- Tourner le repère d'un angle ψ autour de l'axe x (lacet):
rotation définie par $\mathbf{R}_x(\psi)$
- Tourner le repère d'un angle θ autour de l'axe y (tangage):
rotation définie par $\mathbf{R}_y(\theta)$
- Tourner le repère d'un angle φ autour de l'axe z (roulis):
rotation définie par $\mathbf{R}_z(\varphi)$

L'orientation résultante du repère est obtenue en composant les rotations par rapport au *repère fixe*, et peut être calculée en *multipliant à gauche* les matrices de rotation élémentaires:

$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

où, pour plus de simplicité, $c_\varphi = \cos \varphi$, $s_\theta = \sin \theta$

Angles roulis-tangage-lacet

Problème inverse: déterminer les angles de roulis, tangage et lacet qui correspondent à une matrice de rotation \mathbf{R} donnée:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Si on compare cette expression avec $\mathbf{R}(\phi)$, on trouve que la solution, pour $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, est:

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{21}, r_{11})$$

$$\theta = \text{Atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2})$$

$$\psi = \text{Atan2}(r_{32}, r_{33})$$

L'autre solution équivalente pour $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$, est:

$$\varphi = \text{Atan2}(-r_{21}, -r_{11})$$

$$\theta = \text{Atan2}(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2})$$

$$\psi = \text{Atan2}(-r_{32}, -r_{33})$$

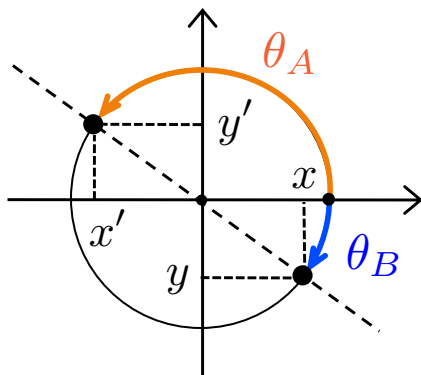
Angles roulis-tangage-lacet

Remarque 1:

- Si $\cos \theta = 0$ les solutions précédentes sont *dégénérées*: dans ce cas, on peut uniquement déterminer la somme ou la différence de φ et ψ
- Les configurations qui correspondent aux angles $\theta = \pm \pi/2$ caractérisent les *singularités de représentation* des angles d'Euler

Remarque 2:

- $\text{Atan2}(y, x)$ est la *fonction arc tangente à deux arguments*
- $\text{Atan2}(y, x)$ calcule l'arc tangente du rapport y/x mais elle utilise le *signe* des arguments pour déterminer le bon quadrant de l'angle

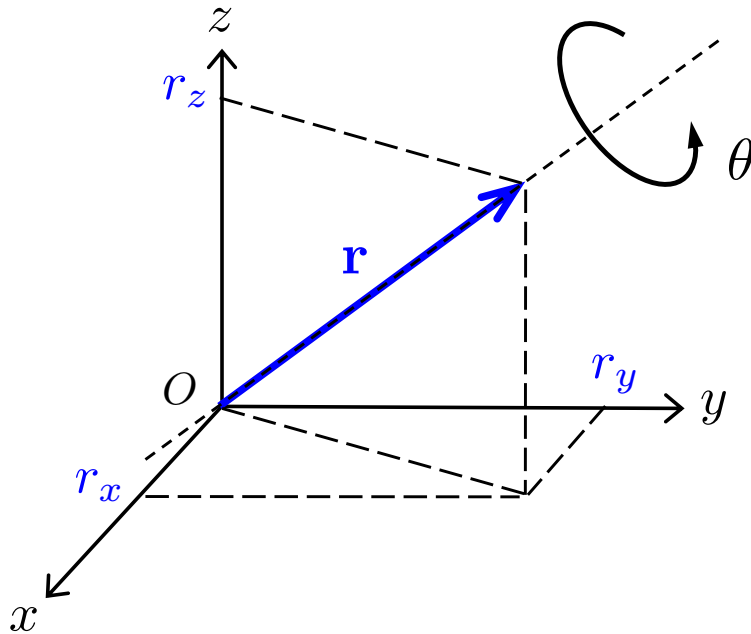


$$\text{Atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan(y/x) - \pi, & y < 0, x < 0 \\ +\pi/2, & y > 0, x = 0 \\ -\pi/2, & y < 0, x = 0 \\ \text{non définie,} & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

$\arctan(y/x) = \arctan(y'/x')$... mais angle θ_A ou θ_B ?

Angle et axe

- Une représentation *non minimale* de l'orientation peut être obtenue en utilisant **4 paramètres** qui expriment une rotation d'un angle θ autour d'un axe générique dans l'espace 3D
- Cette représentation peut être utile, par exemple, pour *planifier la trajectoire* de l'effecteur d'un manipulateur



$$\mathbf{r} = [r_x, r_y, r_z]^T$$

vecteur unitaire ($\|\mathbf{r}\| = 1$)
de l'axe de rotation dans
le repère $O-xyz$

L'angle θ est considéré comme *positif*
si la rotation autour de l'axe \mathbf{r} est
faite dans le sens anti-horaire

Angle et axe

- Matrice de rotation qui correspond à un angle θ et à un axe \mathbf{r} donnés:

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & r_x r_y(1 - c_\theta) - r_z s_\theta & r_x r_z(1 - c_\theta) + r_y s_\theta \\ r_x r_y(1 - c_\theta) + r_z s_\theta & r_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & r_y r_z(1 - c_\theta) - r_x s_\theta \\ r_x r_z(1 - c_\theta) - r_y s_\theta & r_y r_z(1 - c_\theta) + r_x s_\theta & r_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{bmatrix}$$

où, à nouveau, pour plus de simplicité, $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$

- Une formule plus compacte mais équivalente, est (*formule de Rodrigues*):

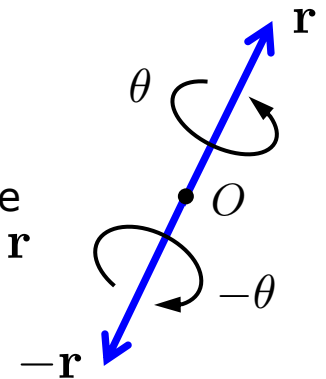
$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{r}) = \mathbf{I}_3 + \hat{\mathbf{r}} \sin \theta + \hat{\mathbf{r}}^2 (1 - \cos \theta) \text{ avec } \hat{\mathbf{r}} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété :

$$\mathbf{R}(-\theta, -\mathbf{r}) = \mathbf{R}(\theta, \mathbf{r})$$

- Ça veut dire que une rotation d'un angle $-\theta$ autour de l'axe $-\mathbf{r}$ ne peut pas être distinguée d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe \mathbf{r}

- La représentation angle et axe **n'est pas unique !**



Angle et axe

Problème inverse: déterminer l'angle et l'axe qui correspondent à une matrice de rotation \mathbf{R} donnée:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

• Si $\sin \theta \neq 0$, on obtient:

$$\theta = \arccos \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \quad \text{Angle}$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad \text{Axe}$$

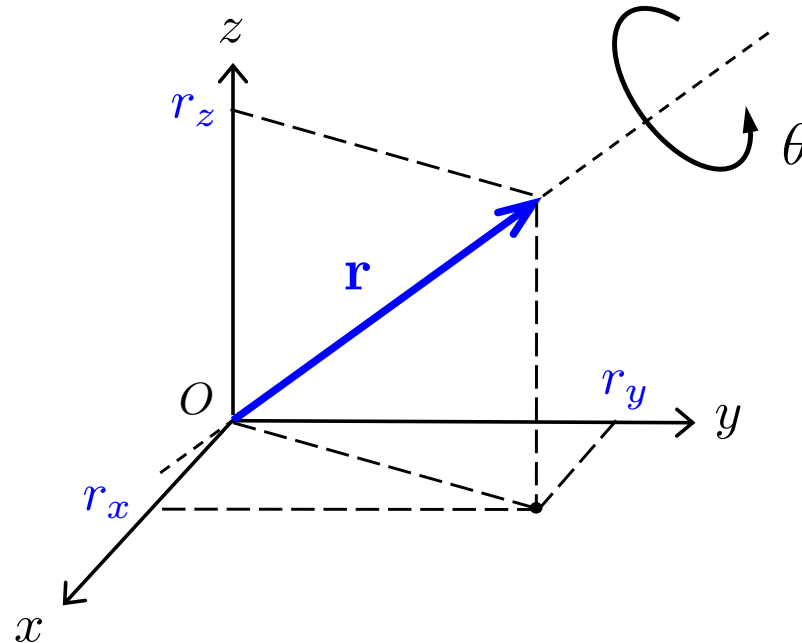
Remarques:

- Les deux expressions précédentes décrivent la rotation en fonction de *quatre paramètres*: l'angle et les trois composantes du vecteur unitaire de l'axe
- Cependant, on peut constater que les trois composantes r_x, r_y, r_z du vecteur \mathbf{r} ne sont pas indépendantes mais elles sont contraintes par la condition:

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$$

Angle et axe

- Si $\sin \theta = 0$, les équations précédentes *ne sont pas définies*
 - Pour résoudre le problème inverse, il faut travailler avec l'expression particulière de la matrice \mathbf{R} dont on dispose et trouver des formules de résolution pour les deux cas: $\theta = \pi$ et $\theta = 0$
 - Si $\theta = 0$ (rotation nulle), le vecteur unitaire \mathbf{r} est *arbitraire* (*singularité de représentation*)



Quaternion unitaire

- Les inconvénients de la représentation angle et axe peuvent être surmontés par une autre représentation à 4 paramètres, le **quaternion unitaire**, défini par:

où
$$Q = \{\eta, \epsilon\}$$

$\eta = \cos(\theta/2)$: *partie scalaire* du quaternion

$\epsilon = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z]^T = \sin(\theta/2) \mathbf{r}$: *partie vectorielle* du quaternion

avec la contrainte $\eta^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1$ dont le nom de quaternion *unitaire*.

Les paramètres \mathbf{r} et θ sont les mêmes que pour la représentation angle et axe



$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
$$q = \eta + \epsilon_x i + \epsilon_y j + \epsilon_z k$$

Broom Bridge (Dublin)



(16 octobre 1843)



William R. Hamilton
(1805–1865)

Quaternion unitaire

Remarque:

Contrairement à la représentation angle et axe, une rotation de $-\theta$ autour de $-\mathbf{r}$ donne le même quaternion que celui associé à une rotation de θ autour de \mathbf{r}

- Matrice de rotation qui correspond à un quaternion unitaire $Q = \{\eta, \epsilon\}$ donné:

$$\mathbf{R}(\eta, \epsilon) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_x^2) - 1 & 2(\epsilon_x\epsilon_y - \eta\epsilon_z) & 2(\epsilon_x\epsilon_z + \eta\epsilon_y) \\ 2(\epsilon_x\epsilon_y + \eta\epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_y^2) - 1 & 2(\epsilon_y\epsilon_z - \eta\epsilon_x) \\ 2(\epsilon_x\epsilon_z - \eta\epsilon_y) & 2(\epsilon_y\epsilon_z + \eta\epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_z^2) - 1 \end{bmatrix}$$

- Les quaternions Q et $-Q$ décrivent la *même* matrice de rotation (les quaternions fournissent un double recouvrement du groupe $SO(3)$).

En dehors de cette ambiguïté, les quatre paramètres d'un quaternion décrivent une *rotation unique*

Quaternion unitaire

Problème inverse: déterminer le quaternion qui correspond à une matrice de rotation \mathbf{R} donnée:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Nous avons que:

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{21} - r_{12}) \sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix}$$

où la fonction *signe* est définie comme suit:

$$\operatorname{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Quaternion unitaire

Remarque:

- Dans la première équation de la diapo précédente nous avons supposé implicitement que $\eta = \cos(\theta/2) \geq 0$. Cela correspond à un angle $\theta \in [-\pi, \pi]$. Par conséquent, *toute rotation peut être décrite*
- Par rapport aux formules d'inversion de la représentation angle et axe, il n'y a *pas de singularités* dans les deux équations de la diapo précédente

Inverse d'un quaternion et produit de quaternions

- Le quaternion extrait de la matrice $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ est noté Q^{-1} et on peut le calculer ainsi:

$$Q^{-1} = \{\eta, -\epsilon\}$$

- Soient $Q_1 = \{\eta_1, \epsilon_1\}$ et $Q_2 = \{\eta_2, \epsilon_2\}$ les quaternions qui correspondent aux matrices de rotation \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 , respectivement. Le quaternion qui correspond à leur *produit* $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ est donné par:

$$Q_1 * Q_2 = \{\eta_1\eta_2 - \epsilon_1^T \epsilon_2, \eta_1\epsilon_2 + \eta_2\epsilon_1 + \epsilon_1 \times \epsilon_2\}$$

Si $Q_2 = Q_1^{-1}$, la formule précédente nous donne $\{1, \mathbf{0}\}$, l'*élément neutre* (ou identité) du produit. Comme le produit matriciel, le produit de quaternions n'est pas commutatif, à savoir $Q_1 * Q_2 \neq Q_2 * Q_1$

Représentations de l'orientation

Sommaire des propriétés des 4 représentations de l'orientation d'un corps rigide dans l'espace 3D

Représentation	Matrice de rotation	Angles d'Euler (ZYZ, ZYX, etc.)	Angle et axe	Quaternion unitaire
Globale	Oui	Non	Non	Oui
Unique	Oui	Non	Non	Non
Minimale	Non	Oui	Non	Non

Remarque:

Une représentation de l'orientation est dite *globale*, s'il n'y a pas de singularités dans le problème inverse