Robotique Industrielle

UPJV, Département EEA

M1 3EA, Parcours RoVA, EC15

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

Lundi 13h30-16h30 (CM ou TD, salle CURI 305)
(TP, salle TP204)

Année Universitaire 2022-2023

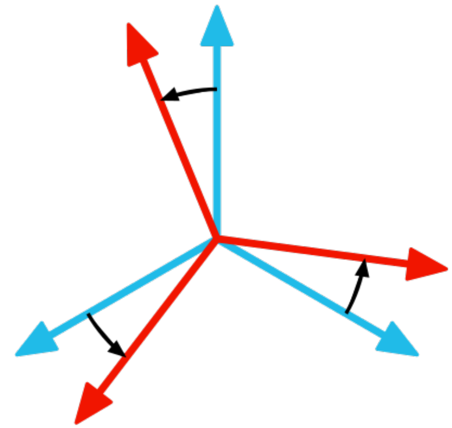
UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



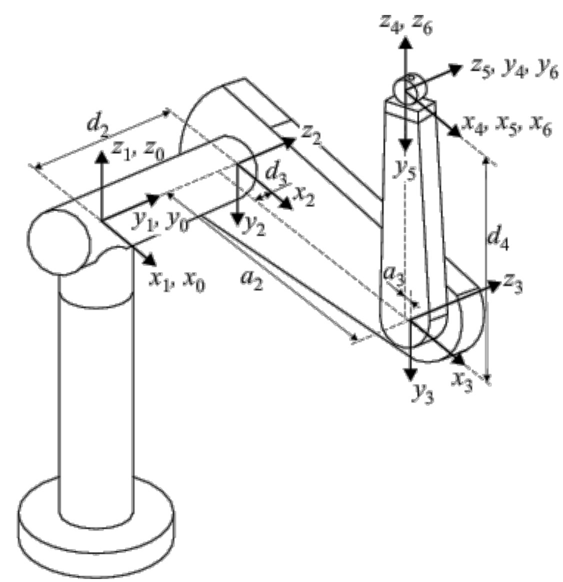
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



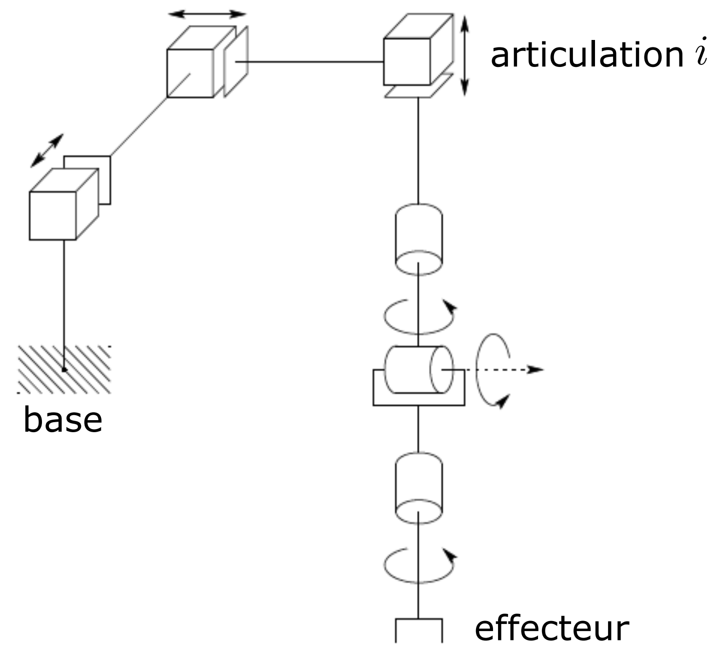
Introduction: nécessité d'un modèle

La *conception* et la *commande* d'un robot nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que:

- Les **modèles géométriques direct** et **inverse** qui expriment la *pose* de l'effecteur en fonction de la configuration du mécanisme et inversement

- Les **modèles cinématiques direct** et **inverse** qui expriment la *vitesse* de l'effecteur en fonction des vitesses articulaires et inversement

- Les **modèles dynamiques** définissant les *équations du mouvement* du robot, qui permettent d'établir les relations entre les *couples* ou *forces* exercées par les actionneurs, et les positions, vitesses et accélérations des articulations



Introduction: nécessité d’un modèle

Définir les différentes tâches d'un robot réclame de pouvoir positionner l’effecteur par rapport à un *repère de référence*

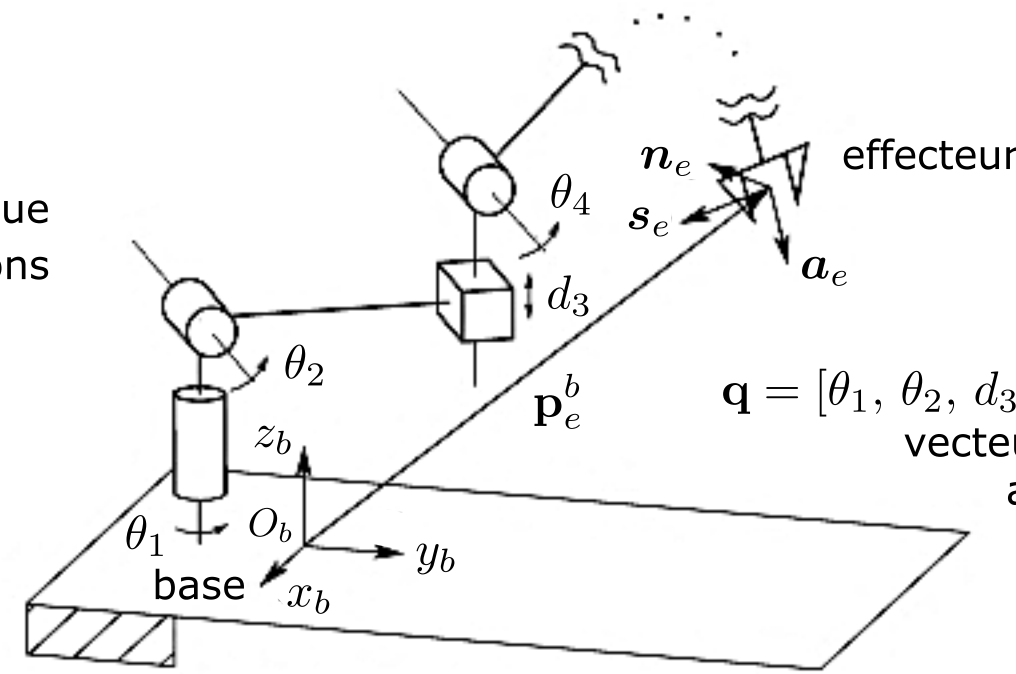
Mais …

- Les *informations proprioceptives* (issues du S.M.A.) sont généralement définies dans des repères liés aux différents segments du robot
- La *position à atteindre* est souvent définie dans un repère lié à la base du robot
- L'objet à saisir peut être défini dans un *repère mobile indépendant* du robot (ex. des pièces à prendre sur un convoyeur)
- Les *informations extéroceptives* (issues de l'environnement autour du robot) sont définies dans divers repères (repère caméra, laser, etc.)

Il faut donc un référentiel commun afin de ramener les diverses informations dans un même repère et pouvoir concevoir les consignes des actionneurs du robot

Modèle géométrique d'un robot

Robot générique
à n articulations

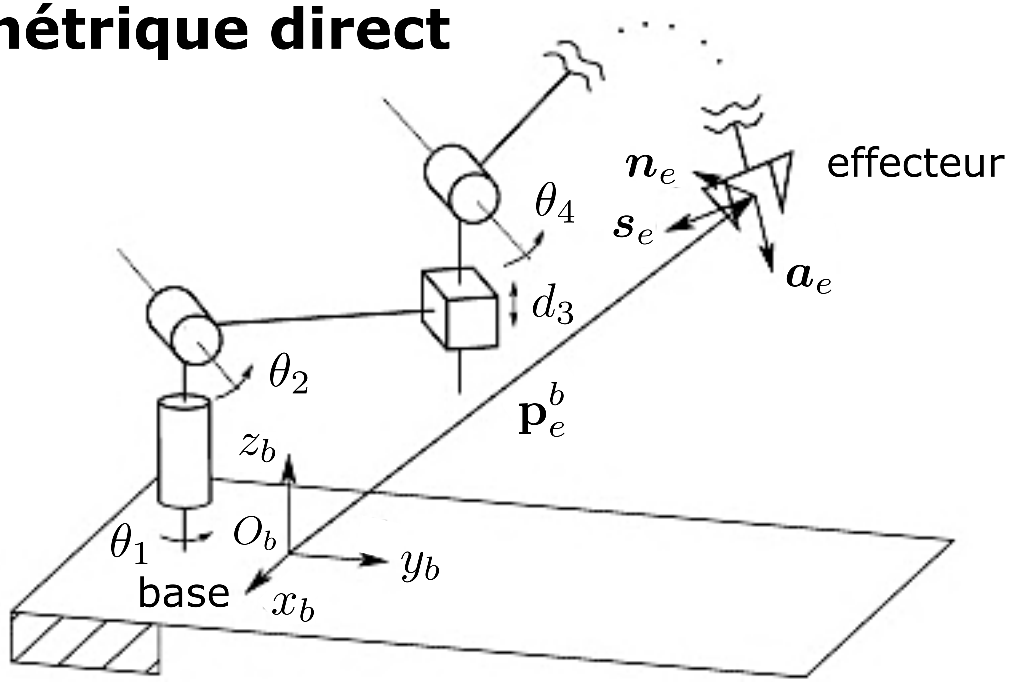


$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \ldots]^T \in \mathbb{R}^n$
vecteur des variables articulaires

Modèle géométrique direct (MGD): Étant données les positions articulaires (distance resp. angle pour une articulation prismatique resp. rotoïde) trouver la pose de l'effecteur par rapport à la base

Modèle géométrique inverse (MGI): Étant donnée une pose de l'effecteur par rapport à la base, trouver, *si elles existent*, l'ensembles de positions articulaires qui permettent de générer cette pose

Modèle géométrique direct



Par rapport au repère de la base O_b-$x_b y_b z_b$, le *modèle géométrique direct* est exprimé par la matrice de transformation homogène suivante:

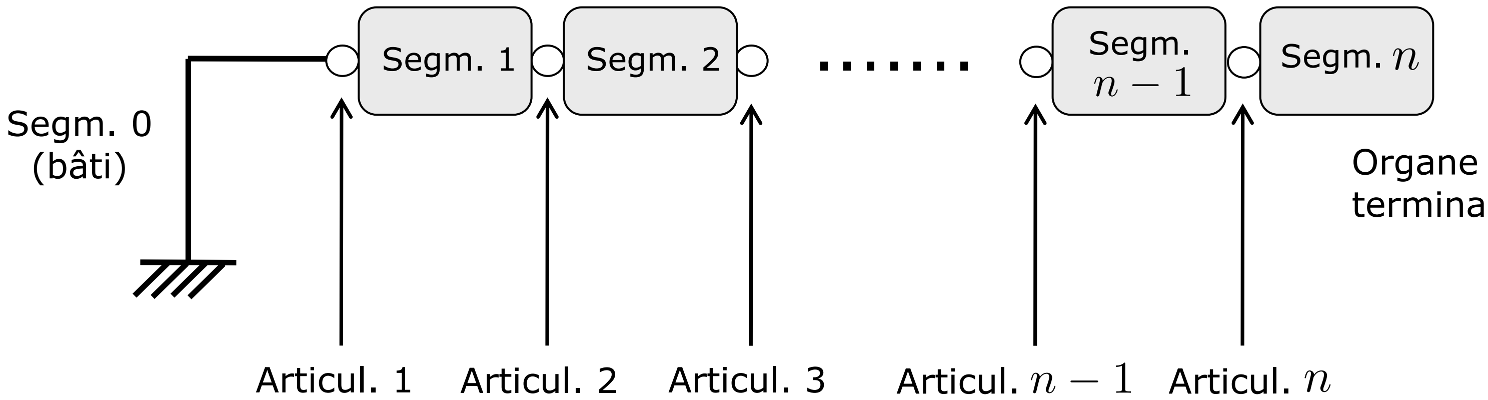
$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_e^b(\mathbf{q}) & \boldsymbol{s}_e^b(\mathbf{q}) & \boldsymbol{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{n}_e^b,\ \boldsymbol{s}_e^b,\ \boldsymbol{a}_e^b$: vecteurs unitaires du repère de l'effecteur exprimés par rapport à la base

$\mathbf{p}_e^b$: vecteur qui décrit l'origine du repère de l'effecteur par rapport à la base

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$: vecteur des variables articulaires

Modèle géométrique direct

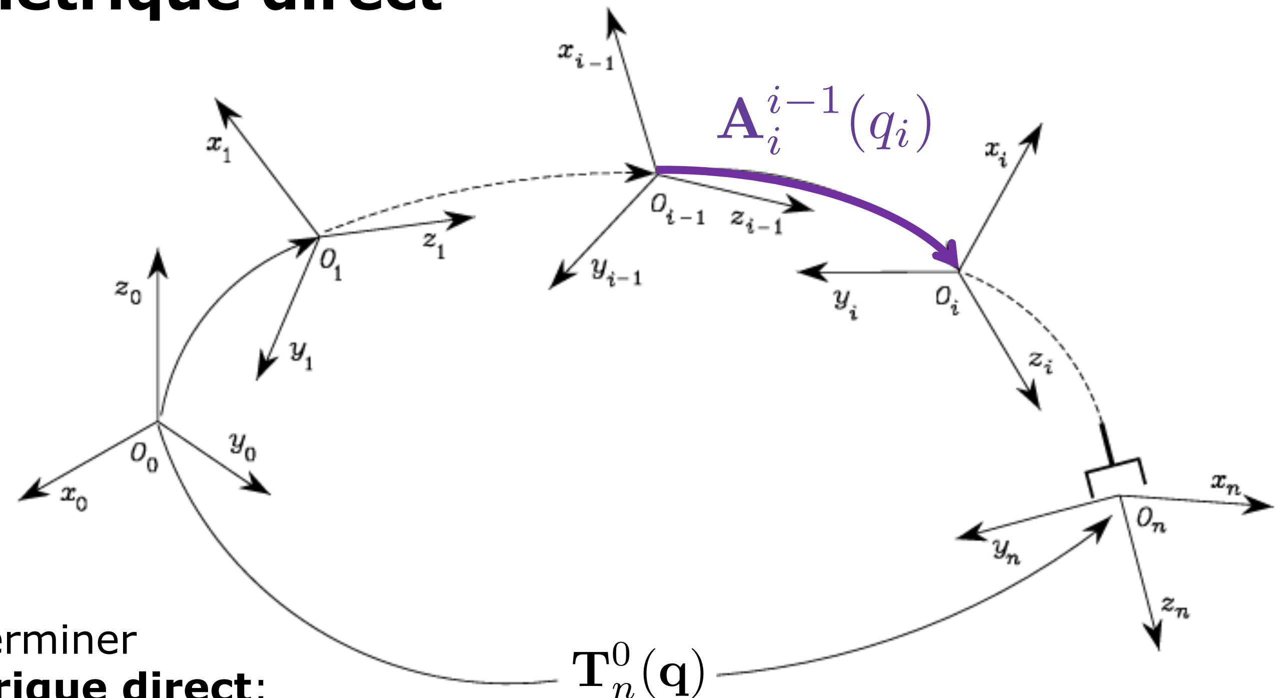


Nos hypothèses:

Manipulateur à **chaîne ouverte simple** avec $n+1$ segments liés par n articulations (rotoïdes ou prismatiques):

- Par convention, le segment 0 est fixé au sol
- Chaque articulation fournit au manipulateur 1 DDL qui correspond à la variable de l'articulation (θ ou d)

Modèle géométrique direct

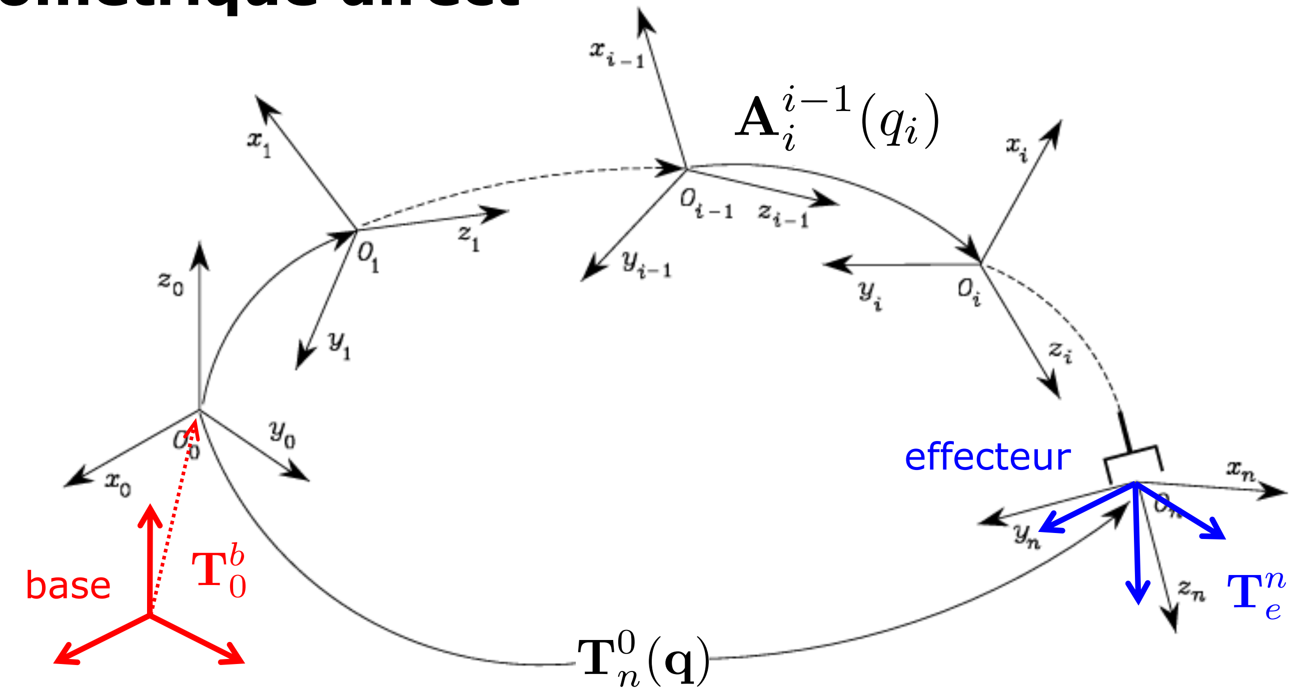


Procédure pour déterminer
le **modèle géométrique direct**:

1. Définir les repères associés à chacun des $n+1$ segments
2. Determiner la transformation de coordonnées entre deux segments consecutifs $\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$
3. Déterminer, de façon recursive, la transformation totale entre le repère n et le repère 0, c'est-à-dire:

$$\boxed{\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) \;=\; \mathbf{A}_1^0(q_1)\,\mathbf{A}_2^1(q_2)\;\cdots\;\mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)}$$

Modèle géométrique direct



Attention: la transformation de coordonnées *effective* qui décrit la pose de l'*effecteur* par rapport à la *base* est donnée par:

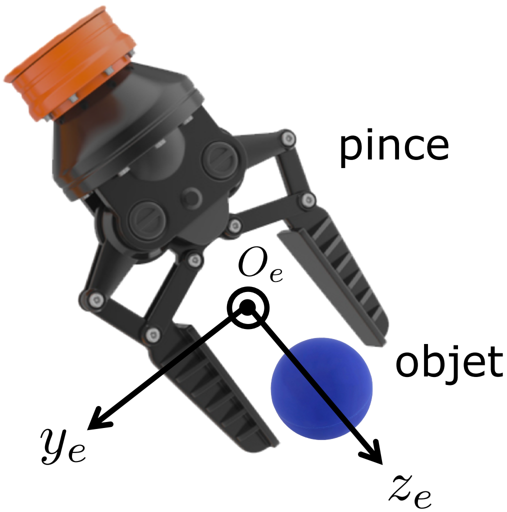
$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b\,\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q})\,\mathbf{T}_e^n$$

Matrice de transformation (*constante*) qui décrit la pose du *repère* 0 par rapport au *repère de la base*

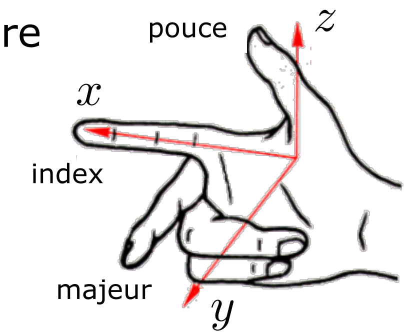
Matrice de transformation (*constante*) qui décrit la pose du *repère de l'effecteur* par rapport au *repère* n

Choix du repère de la pince

Si l'effecteur est une **pince**, comment positionner le repère ?



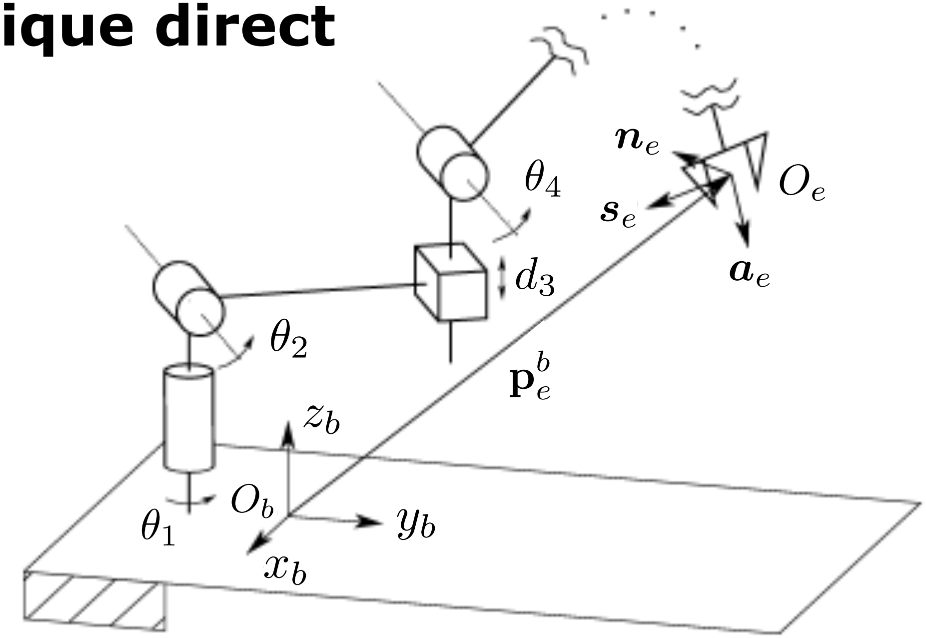
- Origin O_e : au centre de la pince
- Axe z_e : direction de rapprochement de l'objet à saisir
- Axe y_e : orthogonal à z_e dans le plan de glissement des becs de la pince
- Axe x_e : orthogonal aux autres axes, pour avoir un repère direct (selon la règle de la main droite)



Rappelez les symboles: $\odot$ la flêche sort de la page

$\otimes$ la flêche entre dans la page

Modèle géométrique direct



Procédure à suivre pour déterminer le **modèle géométrique direct**:

1. Définir les repères associés à chacun des $n + 1$ segments

   Mais ...

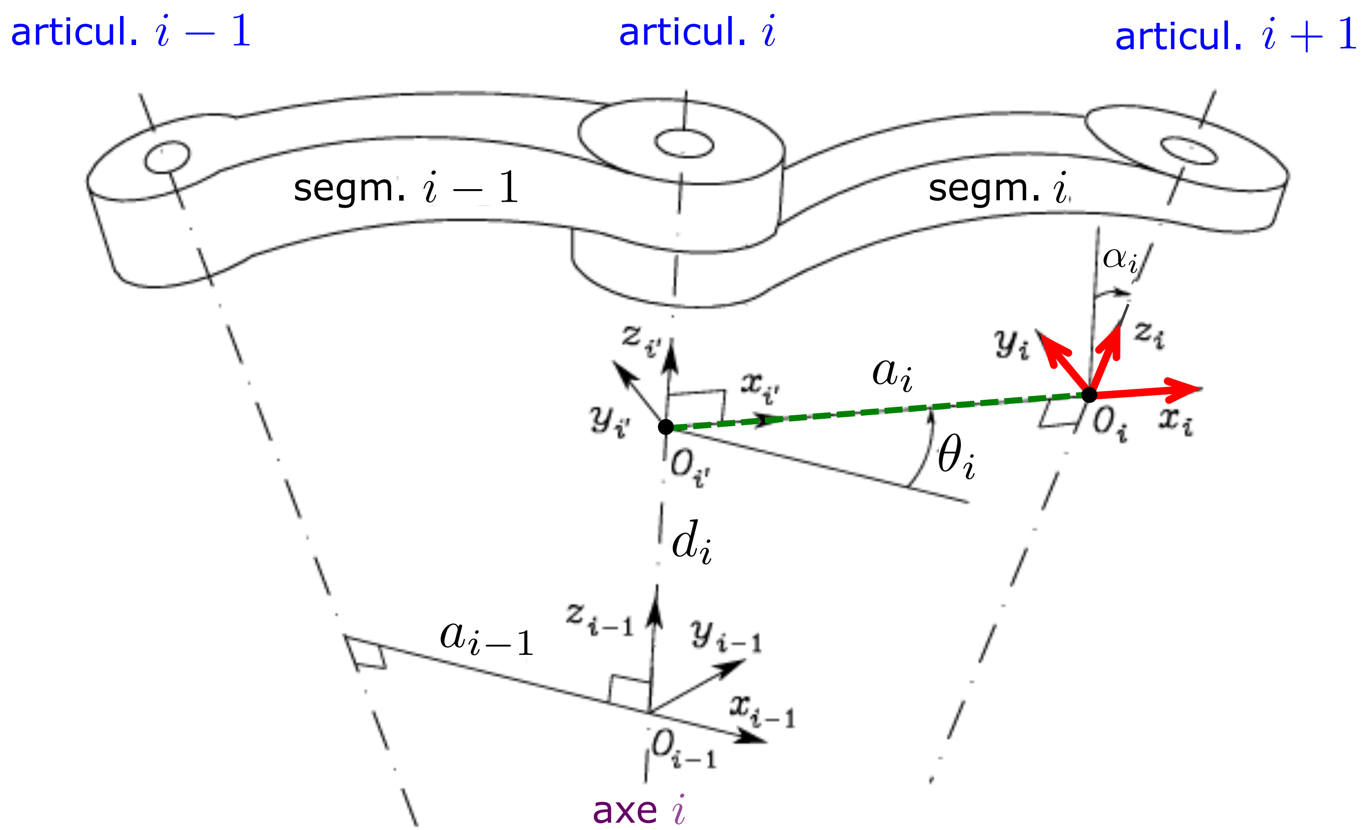
   Comment définir les repères pour des manipulateurs complexes, avec un grand nombre d'articulations ?

   ➡ Il faut trouver une procédure **systématique** et **générale**

Solution : **Convention de Denavit-Hartenberg (DH)**

Convention de Denavit-Hartenberg

Objectif: 1) déterminer les repères associés à *deux segments consecutifs,* 2) calculer la transformation de coordonnées entre les deux repères



Notation:

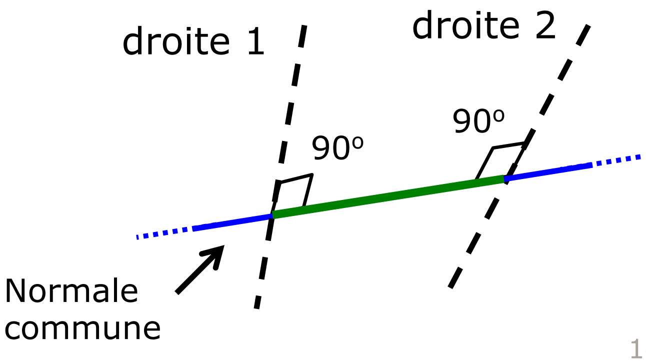
L'axe i dénote l'axe de l'articulation qui rélie le *segment* $i-1$ au *segment* i

Convention de Denavit-Hartenberg

La convention de Denavit Hartenberg (DH) est adoptée pour définir le **repère du segment** i:

1. Choisir l'axe z_i le long de l'axe de l'articulation $i+1$
2. Placer l'origine O_i à l'intersection de l'axe z_i avec la *normale commune** aux axes z_{i-1} et z_i . Placer aussi $O_{i'}$ à l'intersection de la normale commune avec l'axe z_{i-1}
3. Choisir l'axe x_i le long de la normal commune aux axes z_{i-1} et z_i avec sens de l'articulation i à l'articulation $i+1$
4. Choisir l'axe y_i pour completer le triplet d'un repère direct (on utilise la *règle de la main droite*)

*__Remarque__
La **normale commune** entre deux droites est la droite qui contient le **segment** à *distance minimale* entre les deux droites



Convention de Denavit-Hartenberg

Remarque [Cas particuliers]:

La convention de DH ne donne pas une définition **unique** de repère d'un segment dans les cas suivants:

- *Pour le repère* 0: seulement la direction de l'axe z_0 est specifiée. Par consequent, O_0 et x_0 peuvent être choisis arbitrairement

- *Pour le repère* n: puisqu'il n'y a pas l'articulation $n+1$, z_n n'est pas défini de manière unique, tandis que x_n doit être orthogonal à l'axe z_{n-1}. Typiquement, l'articulation n est rotoïde et donc z_n doit être aligné avec la direction de z_{n-1}

- Si deux axes consécutifs sont *parallèles* ($\alpha_i = 0$), la normale commune entre les deux n'est pas définie de manière unique. On place O_i tel que $d_i = 0$

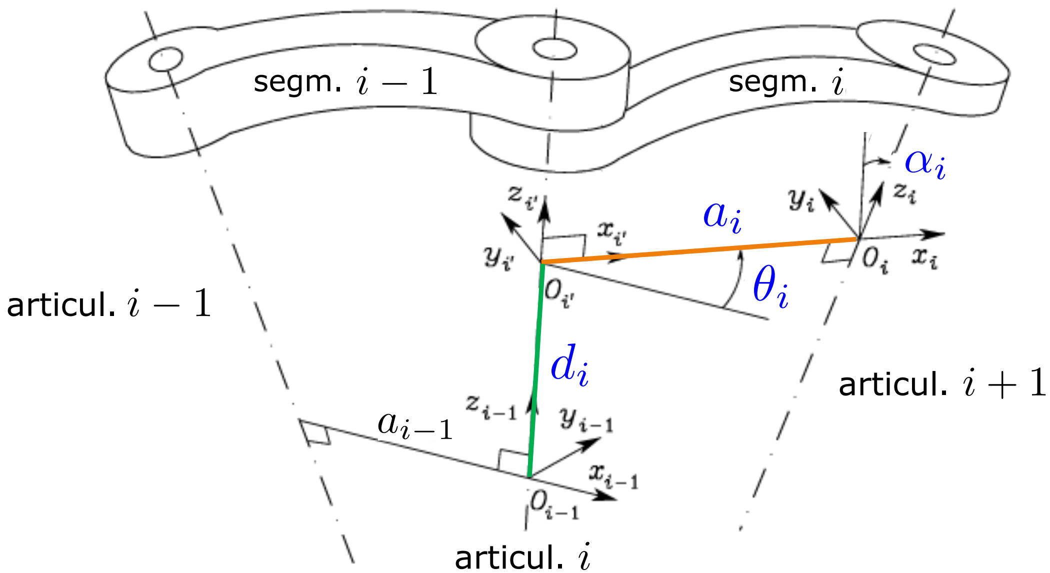
- Si deux axes consécutifs *se coupent* ($a_i = 0$), le sens de x_i est *arbitraire*. On place O_i à l'intersection des axes z_{i-1} et z_i

- Si l'articulation i est *prismatique*, la direction de z_{i-1} est *arbitraire*

Paramètres de Denavit-Hartenberg

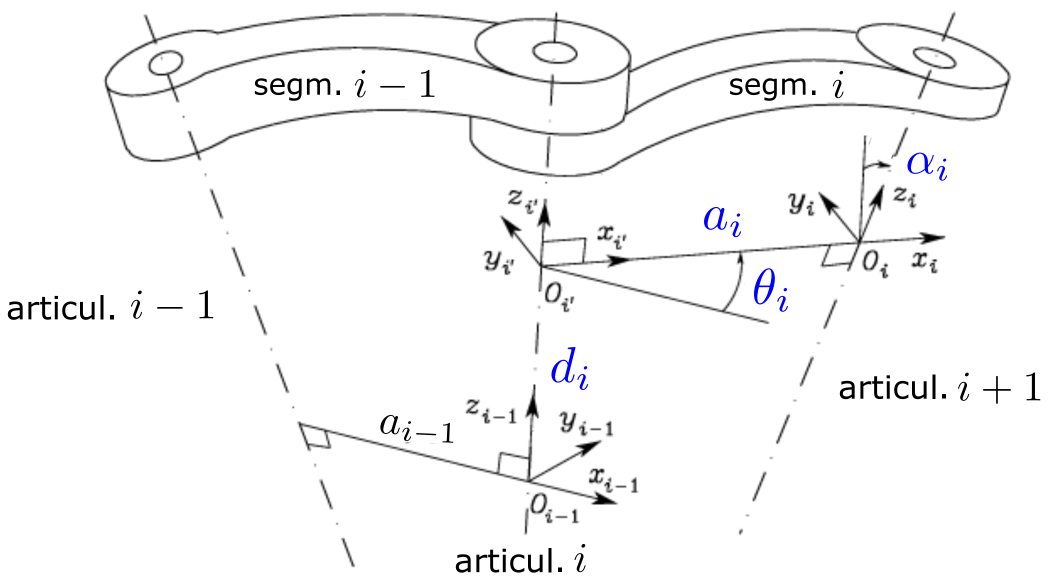
Une fois que les repères des segments ont été fixés, la position et l'orientation du repère i par rapport au repère $i-1$ est complètement spécifiée par les **quatre paramètres** suivants:

- a_i : distance entre O_i et $O_{i'}$
- d_i : coordonnées de $O_{i'}$ le long de l'axe z_{i-1}
- α_i : angle entre les axes z_{i-1} et z_i autour de l'axe x_i. $\alpha_i > 0$ si la rotation est faite dans le sens *antihoraire* ($\alpha_i = 0$ si les axes sont *parallèles*)
- θ_i : angle entre les axes x_{i-1} et x_i autour de l'axe z_{i-1}. $\theta_i > 0$ si la rotation est faite dans le sens *antihoraire*



Paramètres de Denavit-Hartenberg

- Deux des quatre paramètres (a_i and α_i) sont toujours *constants*: ils ne dépendent que de la *géométrie* de connection des articulations consecutives définie par le segment i
- Des paramètres restants, seulement un est *variable* et dépend du type d'articulation qui rélie le segment $i-1$ avec le segment i . En particulier:
    - Si l'articulation i est ***rotoïde***, la variable est θ_i
    - Si l'articulation i est ***prismatique***, la variable est d_i



Transformation homogène de DH

En conclusion, nous pouvons exprimer la *transformation de coordonnées* entre les repères i et $i-1$ selon les étapes suivantes:

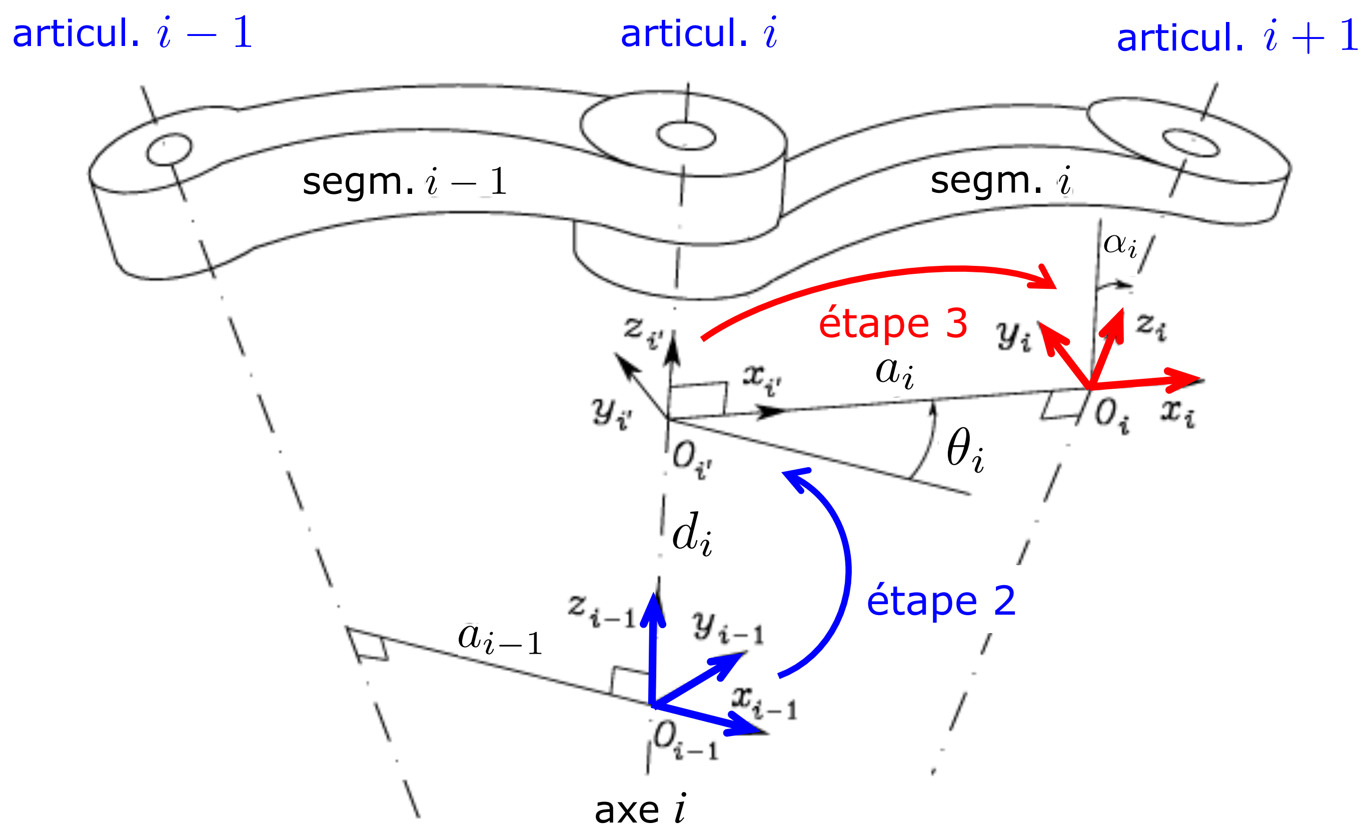
1. Choisir un repère aligné avec le repère $i-1$

2. Faire une translation de d_i du repère choisi le long de l'axe z_{i-1} et faire une rotation de θ_i autour de l'axe z_{i-1}

   Cette séquence aligne le repère courant avec le repère i' et elle est décrite par la matrice homogène suivante:

$$\mathbf{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation homogène de DH



Transformation homogène de DH

3. Faire une translation du repère aligné avec le repère i' de a_i le long de l'axe $x_{i'}$ et faire une rotation de α_i autour de l'axe $x_{i'}$. Cette séquence aligne le repère courant avec le repère i et elle est décrite par la matrice homogène:

$$\mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. La *transformation finale* est obtenue en multipliant à *droite* les deux transformations précédentes:

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1}\,\mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonction seulement de q_i

$q_i = \theta_i$ si l'articulation est *rotoïde*

$q_i = d_i$ si l'articulation est *prismatique*

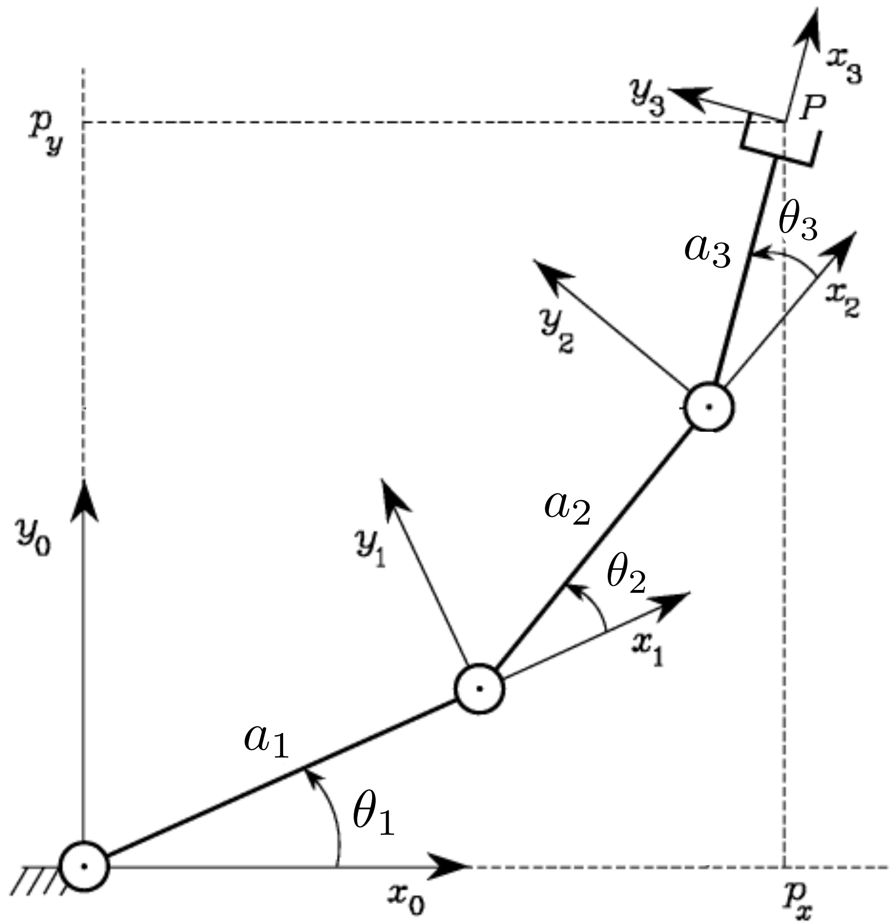
Comme d'habitude:

$c_{\theta_i} = \cos\theta_i,\ s_{\theta_i} = \sin\theta_i$

Exemples

Modèle géométrique direct d’un manipulateur

1 – Manipulateur planaire à 3 segments



- Les axes des articulations rotoïdes sont tous *parallèles*
- Choix le plus simple des repères: axes x_i le long de la direction des segments correspondants (la direction de x_0 est arbitraire) et tous situés dans le plan $(x_0,\, y_0)$

Manipulateur planaire à 3 segments

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

Tableau des paramètres de DH

Toutes les articulations sont rotoïdes, donc la matrice de transformation homogène a la même structure pour chaqu'une des trois articulations:

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & a_i\sin\theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i \in \{1,2,3\}$$

Manipulateur planaire à 3 segments

La matrice de transformation totale (à savoir, le modèle géometrique) est donc:

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) \,=\, \mathbf{A}_1^0\,\mathbf{A}_2^1\,\mathbf{A}_3^2 \,=\, \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{q} = [\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3]^T$ et $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2),\; s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

Remarque:
Le repère 3 ne coïncide pas avec le *repère de l'effecteur*: en effet, la direction de rapprochement de l'object à saisir par la pince est alignée avec le vecteur unitaire $\mathbf{x}_3^0$ et pas avec $\mathbf{z}_3^0$ (cf. la diapo "Choix du repère de la pince")

Il faudra donc calculer:

$$\mathbf{T}_e^0(\mathbf{q}) \,=\, \mathbf{T}_3^0(\mathbf{q})\,\mathbf{T}_e^3$$

où, si les deux repères ont la même origine, la *transformation constante* $\mathbf{T}_e^3$ (une rotation pure autour de l'axe y) est:

$$\mathbf{T}_e^3 \,=\, \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y(\pi/2) & \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$