

Robotique Industrielle

UPJV, Département EEA

M1 3EA, Parcours RoVA, EC15

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

**Lundi 13h30-16h30 (CM ou TD, salle CURI 305)
(TP, salle TP204)**

Année Universitaire 2022-2023



Plan du cours

Chapitre 1 : Introduction

- 1.1 Définitions
- 1.2 Constituants d'un robot
- 1.3 Classification des robots
- 1.4 Caractéristiques d'un robot
- 1.5 Générations de robots
- 1.6 Programmation des robots
- 1.7 Utilisation des robots



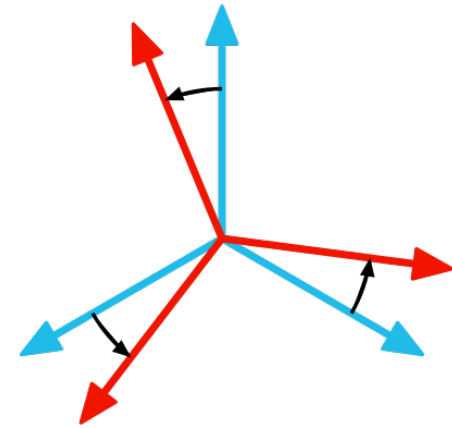
Chapitre 2 : Fondements Théoriques

- 2.1 Pose d'un corps rigide
 - Matrices de rotation et autres représentations de l'orientation
 - Transformations homogènes

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



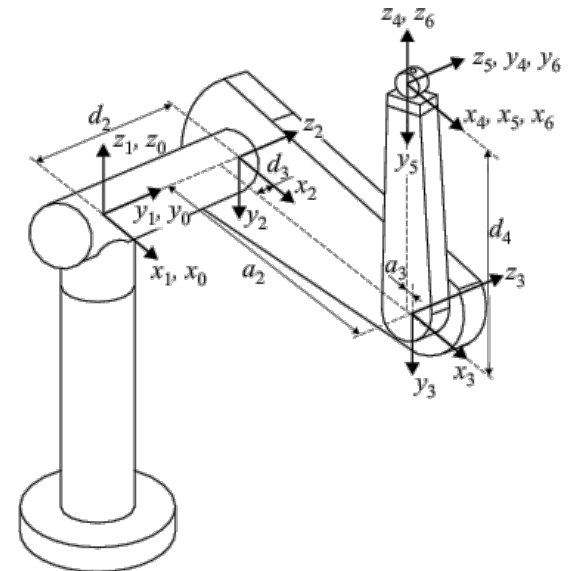
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

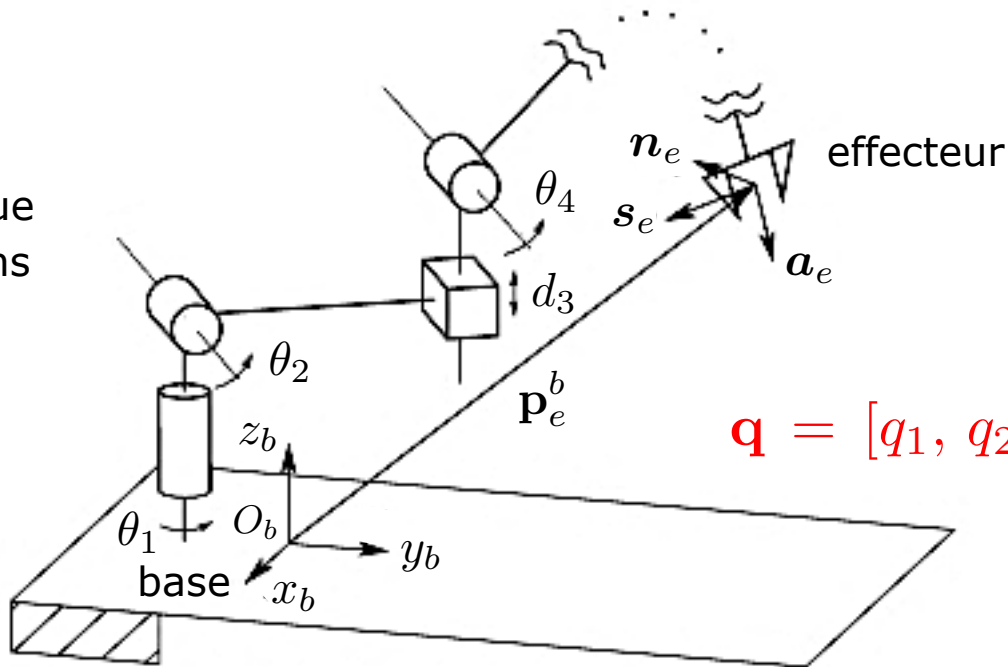
3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



Modèle géométrique inverse

Robot générique
à n articulations



$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T ?$$

Modèle géométrique direct (MGD): étant données les positions articulaires (distance resp. angle pour une articulation prismatique resp. rotoïde) trouver la pose de l'effecteur par rapport à la base

Modèle géométrique inverse (MGI): étant donnée une pose de l'effecteur par rapport à la base, trouver, *si elles existent*, l'ensemble des positions articulaires qui permettent de générer cette pose

Modèle géométrique inverse

Problème direct

Si les variables des articulations (vecteur \mathbf{q}) sont connues, la pose de l'effecteur par rapport à la base peut être calculée de **manière unique** en utilisant la matrice de transformation homogène:

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \cdots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$$

Problème inverse

Il s'agit de déterminer les coordonnées articulaires permettant d'obtenir une situation désirée pour l'effecteur

Problème *beaucoup plus difficile* pour les raisons suivantes:

- Les équations à résoudre sont, en général, **non linéaires**. Par conséquent, il n'est pas toujours possible de trouver une solution de **forme fermée** (c'est-à-dire, une *solution explicite*)
- Le problème peut avoir des **solutions multiples**
- Le problème peut avoir un **nombre infini de solutions** (par ex. pour des robots cinématiquement redondants)
- Le problème peut n'avoir **aucune solution admissible** à cause de la structure cinématique du manipulateur

Modèle géométrique inverse

Solutions multiples du problème inverse

- L'existence de solutions multiples dépend du **nombre de DDL** du robot mais aussi du **nombre de paramètres de DH** qui sont différents de zéro
 - En général, plus le nombre de paramètres de DH différents de zéro est grand, plus le nombre de solutions admissibles est grand
- Pour un manipulateur à 6 DDL *sans butées mécaniques* sur les articulations, il y a, en général, **16 solutions admissibles**. On a donc besoin de trouver des critères pour choisir parmi ces solutions admissibles
 - La présence de *butées mécaniques* sur les articulations des robots réels peut, éventuellement, *reduire* le nombre de solutions multiples admissibles



Modèle géométrique inverse

Solutions de forme fermée

Pour trouver des solutions de forme fermée est nécessaire:

- *Intuition algébrique*: pour trouver les équations significatives qui contiennent les inconnues

ou

- *Intuition géométrique*: pour trouver des points significatifs sur le robot qui peuvent être utilisés pour exprimer la position et/ou l'orientation en fonction du nombre d'inconnues

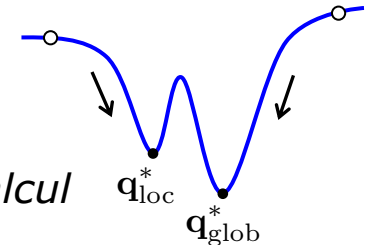
Solutions numériques

Lorsque il n'y a pas de solutions de forme fermée ou elles sont difficiles à déterminer, on peut calculer *une solution particulière* du problème inverse par des *procédures numériques* (méthodes itératives d'optimisation non linéaire, comme l'algorithme de Gauss-Newton ou de Levenberg-Marquardt)

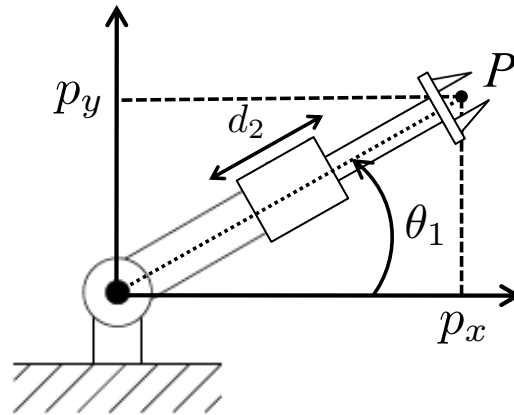
- **Avantage**: les méthodes numériques sont applicables à *tous les robots*

- **Inconvénients**: les méthodes numériques ne trouvent pas, en général, *toutes* les solutions admissibles. Ils trouvent une **solution locale** au sens où elle dépend des *conditions initiales*.

Ces méthodes sont pénalisantes du point de vue du *temps de calcul*



Exemple 1 - Manipulateur planaire à 2 segments (RP)



Problème:

Étant donné $[p_x, p_y]^T$,
déterminer $\mathbf{q} = [\theta_1, d_2]^T$

Nous avons le modèle géométrique direct suivant:

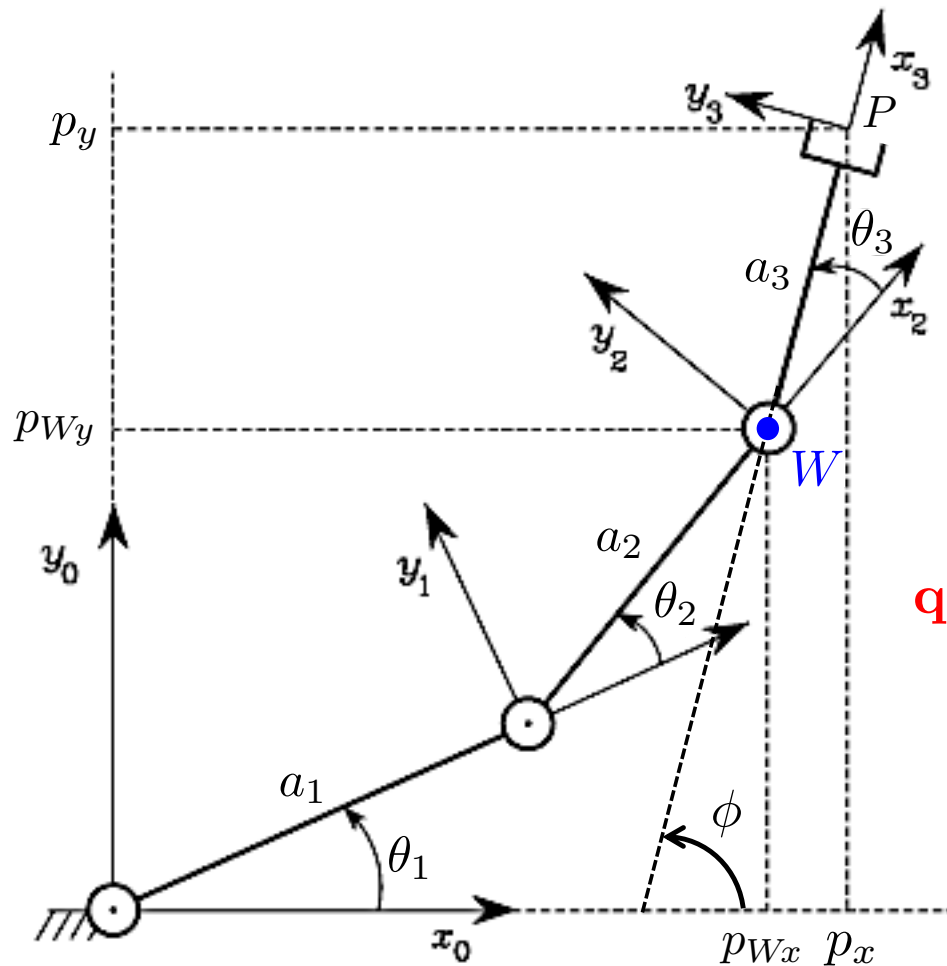
$$p_x = d_2 \cos \theta_1$$

$$p_y = d_2 \sin \theta_1$$

Une démarche analytique simple permet de déterminer le modèle géométrique inverse. En effet, nous avons que:

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{p_y}{p_x} \right), \quad d_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments



$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T ?$$

Problème: étant données la position et l'orientation de l'effecteur, déterminer les variables $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ des trois articulations rotoïdes

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- On a déjà vu que la matrice de transformation homogène entre le repère 3 et le repère 0 du manipulateur est (cf. la 1^{re} partie du Ch. 3.1):

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ et $c_1 = \cos \theta_1$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

-
- Il est pratique de spécifier la position et orientation de l'effecteur en utilisant un **nombre minimal de paramètres**
 - On peut utiliser les coordonnées p_x , p_y et l'angle ϕ entre l'effecteur et l'axe x_0 :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Élément (1, 4) de } \mathbf{T}_3^0 \\ \longleftarrow \text{Élément (2, 4) de } \mathbf{T}_3^0 \\ \longleftarrow \text{Somme des 3 variables} \\ \text{articulaires} \end{array}$$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

1 - Solution algébrique

Si ϕ est spécifié, la 1^{re} équation du système à résoudre est:

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

En revanche si ϕ n'est pas spécifié, le manipulateur est redondant et il y a un *nombre infini de solutions* du problème inverse

- À partir du modèle direct, on trouve que:

$$\left. \begin{aligned} p_{Wx} &= p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ p_{Wy} &= p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Coordonnées du point } W \\ \text{(l'origine du repère 2)} \end{array}$$

- On calcule le carré des deux expressions précédentes et on les additionne:

$$p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2$$

Donc

$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}$$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- Pour avoir une solution admissible, il faut que:

$$-1 \leq c_2 \leq 1$$

- Donc, on impose

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

où le signe "+" correspond à la posture "coude en bas" et le signe "-" correspond à la posture "coude en haut" du robot

- Par conséquent:

$$\theta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

- Maintenant, il faut déterminer θ_1 . Si on substitue l'expression de θ_2 trouvée dans les équations de p_{Wx} , p_{Wy} on obtient un système de deux équations à deux inconnues, s_1 , c_1 , avec solution:

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wy} - a_2 s_2 p_{Wx}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$$

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wx} + a_2 s_2 p_{Wy}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$$

Par conséquent: $\theta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1)$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- Enfin, pour trouver l'angle θ_3 , on utilise l'équation:

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

Remarque:

Si $s_2 = 0$ on a que $\theta_2 \in \{0, \pi\}$: dans cette posture le manipulateur est dans une **singularité cinématique**. On peut encore déterminer θ_1 **d'une manière unique** sauf si $a_1 = a_2$ et on requiert que $p_{Wx} = p_{Wy} = 0$

2 - Solution géométrique

- On utilise à nouveau les trois équations vues auparavant:

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

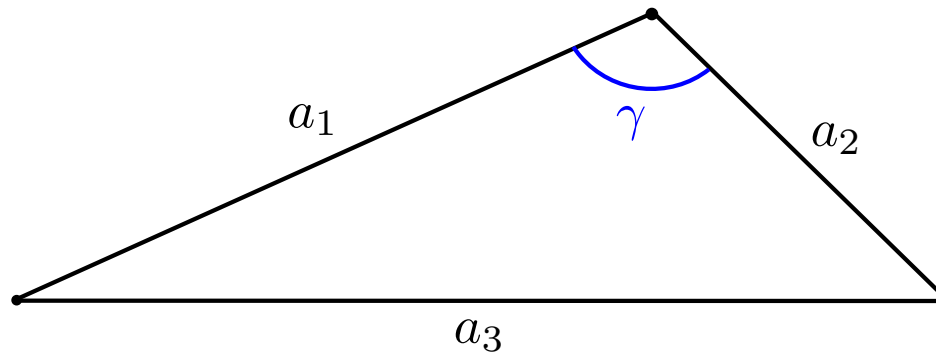
$$p_{Wx} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$p_{Wy} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

Rappel:

Théorème d'Al-Kashi (ou loi des cosinus):



Soit un triangle dans lequel on utilise les notations exposées sur la figure ci-dessus, alors:

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos \gamma$$

Le théorème d'Al-Kashi généralise le *théorème de Pythagore* aux triangles non rectangles. En effet, pour $\gamma = \pi/2$ on trouve $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$, c'est-à-dire le théorème de Pythagore

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- Si on applique le *théorème d'Al-Kashi* au triangle rouge en figure, on obtient:

$$p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - \theta_2)$$

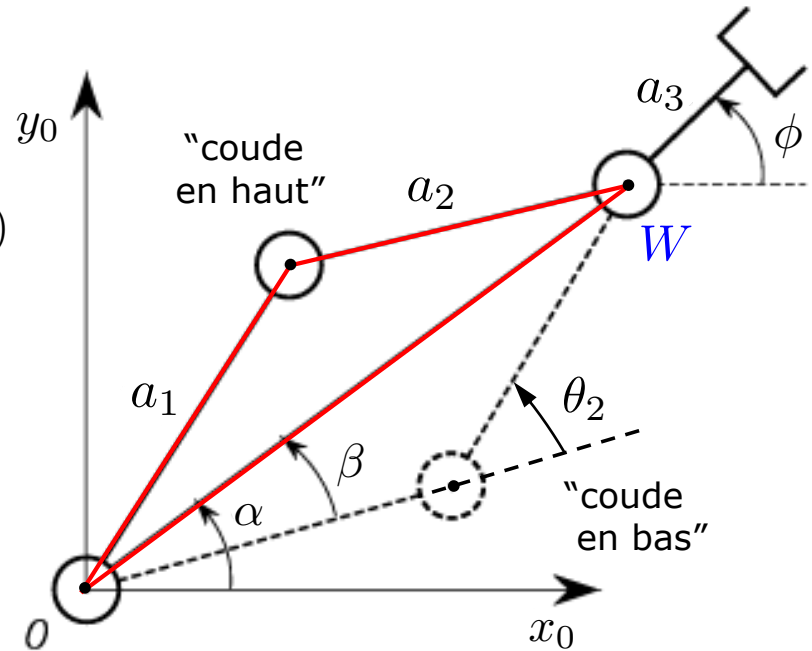
- En effet, nous avons deux configurations possibles du triangle (voir le trait pointillé noir en figure)

- Puisque $\cos(\pi - \theta_2) = -\cos \theta_2$, on trouve:

$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

- En raison de l'inégalité triangulaire, il faut que:

$$\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} \leq a_1 + a_2$$



- Sous cette inégalité, on trouve que:

$$\theta_2 = \pm \arccos(c_2)$$

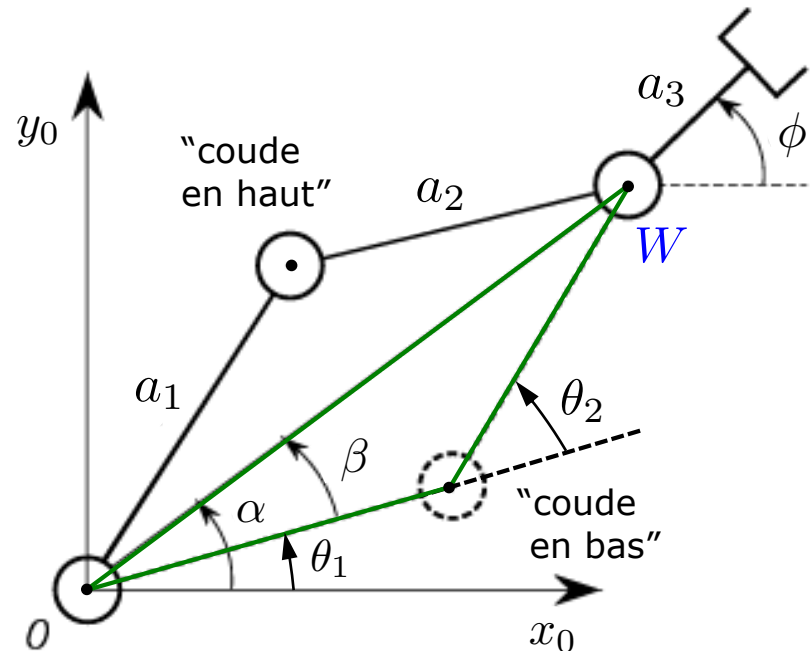
Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- La posture "coude en bas" est obtenue avec $\theta_2 \in (0, \pi)$
- La posture "coude en haut" est obtenue avec $\theta_2 \in (-\pi, 0)$
- Pour déterminer θ_1 , il faut considérer les angles α et β en figure
- La valeur de α dépend du signe de p_{Wx} , p_{Wy} . Il faut donc calculer α comme:

$$\alpha = \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx})$$

- Pour trouver β , on applique encore le *théorème d'Al-Kashi* au triangle vert dans la figure, ce qui nous donne l'équation:

$$a_2^2 = p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + a_1^2 - 2a_1 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} \cos \beta \implies c_\beta \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} = a_1 + a_2 c_2$$



Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- Si on utilise l'expression de c_2 trouvée auparavant, on obtient:

$$\beta = \arccos \left(\frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}} \right)$$

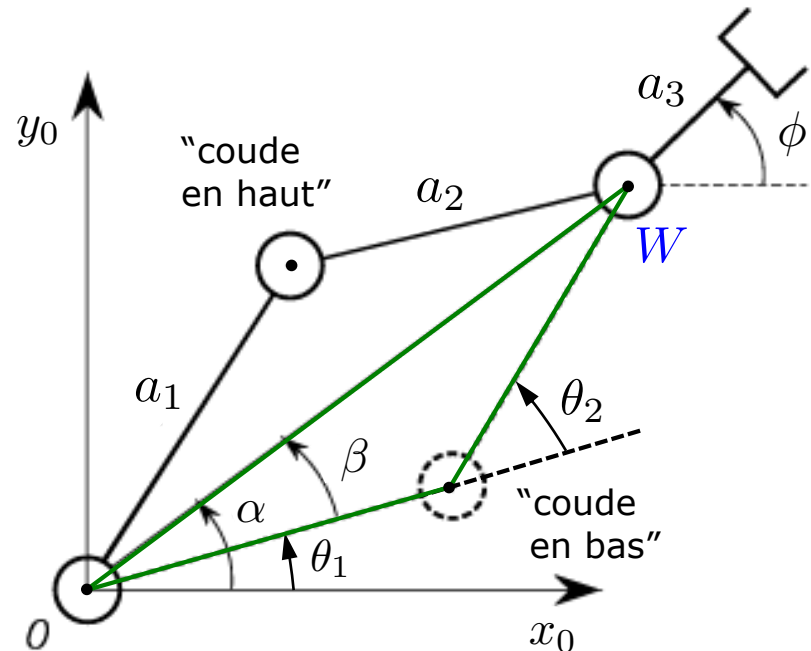
avec $\beta \in (0, \pi)$ pour garantir, à nouveau, l'inégalité triangulaire

- Donc

$$\theta_1 = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{si } \theta_2 < 0 \\ \alpha - \beta & \text{si } \theta_2 > 0 \end{cases}$$

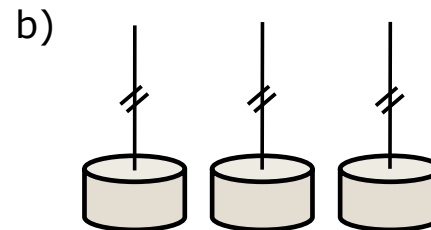
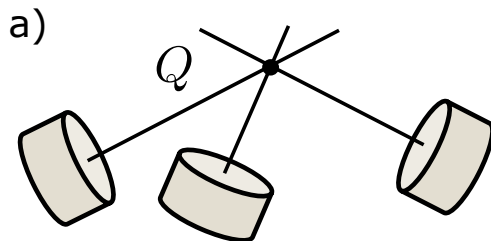
- Enfin pour trouve θ_3 , on utilise l'équation:

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$



Solutions de forme fermée: généralités

- La plupart des manipulateurs existant sont *cinématiquement simples*
- En effet ils sont typiquement composés d'un *porteur* et d'un *poignet de type rotule* (avec ce poignet, le point W est choisi à l'intersection des trois axes des articulations rotoïdes)
- Ce choix est motivé par la difficulté à déterminer des solutions du problème inverse dans le *cas général*
- En particulier, un **manipulateur à 6 DDL** admet des solutions de *forme fermée* du problème géométrique inverse si l'une des conditions suivantes est remplie:
 - a) Les axes de trois articulations rotoïdes consécutives *se croisent en un seul point* (trois axes concourants), comme dans le cas du poignet de type rotule
 - b) Les axes de trois articulations rotoïdes consécutives sont *parallèles*



Méthode de Paul

- Dans le cas de robots à *géométrie simple* (pour lesquels la plupart des distances a_i et d_i sont nulles et les angles θ_i et α_i sont égaux à 0 ou à $\pm\pi/2$), le MGI peut être obtenu de façon systématique avec la **méthode de Paul**

- Le MGI est obtenu en résolvant l'équation matricielle suivante:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \cdots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$$

où $\mathbf{U}_0 = \mathbf{T}_n^0$ (*connue*) décrit la situation du repère n par rapport au repère 0 de la base

- La méthode de Paul permet la détermination de q_1 , puis de q_2 et ainsi de suite jusqu'à q_n

- Il s'agit de déplacer l'une après l'autre chacune des variables articulaires q_1, \dots, q_n dans le membre de gauche de l'équation

- Pour cela, on multiplie à gauche par $\mathbf{A}_{j-1}^j(q_j)$ l'équation ci-dessus, en prenant successivement $j \in \{1, \dots, n-1\}$

Méthode de Paul

Exemple: appliquons la méthode de Paul à un **robot à 6 DDL** ($n = 6$)

1) Multiplier à gauche l'équation précédente par $\mathbf{A}_0^1(q_1)$, soit:

$$\mathbf{A}_0^1(q_1)\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_2^1(q_2) \cdots \mathbf{A}_6^5(q_6) \quad (*)$$

Les éléments situés dans le membre de gauche sont soit indépendants, soit fonctions de q_1 . Les éléments situés dans le membre de droite sont soit constants, soit fonctions de q_2, \dots, q_6

2) Dédire q_1 de l'équation (*) ci-dessus

3) Multiplier à gauche l'équation (*) par $\mathbf{A}_1^2(q_2)$, soit :

$$\mathbf{A}_1^2(q_2)\mathbf{A}_0^1(q_1)\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_3^2(q_3) \cdots \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

4) En déduire q_2

5) Continuer cette procédure pour en déduire q_3, \dots, q_6

Méthode de Paul

En résumé, on utilise les équations suivantes pour calculer les variables articulaires q_1, \dots, q_6 :

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \mathbf{A}_3^2(q_3) \mathbf{A}_4^3(q_4) \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_0^1(q_1) \mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_2^1(q_2) \mathbf{A}_3^2(q_3) \mathbf{A}_4^3(q_4) \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_1^2(q_2) \mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_3^2(q_3) \mathbf{A}_4^3(q_4) \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_2^3(q_3) \mathbf{U}_2 = \mathbf{A}_4^3(q_4) \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_3^4(q_4) \mathbf{U}_3 = \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_4^5(q_5) \mathbf{U}_4 = \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\text{avec } \mathbf{U}_j = \mathbf{A}_6^j = \mathbf{A}_{j-1}^j \mathbf{U}_{j-1}, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

La résolution de ces équations est *intuitive*, mais fait intervenir (en principe) quelques types d'équations dont la solution analytique est *connue*

Méthode de Paul: application au robot Stäubli TX60

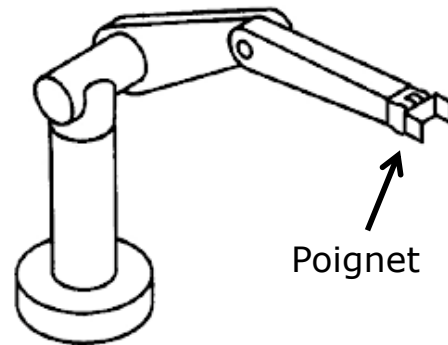
- Si nous appliquons la méthode de Paul au robot **Stäubli TX60** (un robot à 6 DDL avec porteur anthropomorphe et poignet de type rotule), nous trouvons qu'il existe **8 solutions** du problème inverse dans le cas général (avec 1 butée mécanique)
- Certaines positions dites *singulières* du robot occasionnent un *nombre infini de solutions*. C'est par exemple le cas de la configuration initiale "sans offset" du robot ($\theta_1 = \dots = \theta_6 = 0$) où les arguments de la fonction arc tangente utilisés pour déterminer le paramètre θ_4 sont nuls, ce qui rend ce paramètre indéterminé
- Le choix de la valeur de ce paramètre étant libre, on assigne typiquement la *valeur courante* θ_4 du robot. Ce choix fixe alors la valeur du paramètre θ_6



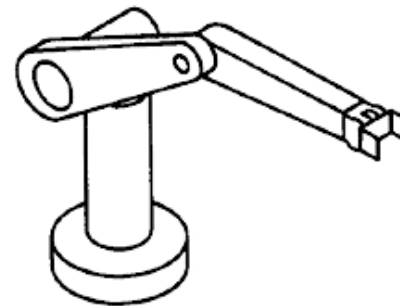
Robot
Stäubli TX60

- Les solutions de forme fermée du MGI du *manipulateur anthropomorphe* et *sphérique*, et du *poignet de type rotule* sont présentées dans les pages 94-100 du livre de Siciliano, Sciavicco, Villani et Oriolo

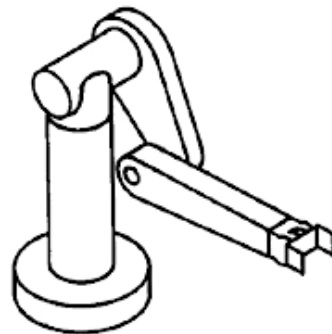
- À titre d'exemple, les quatre postures compatibles avec une pose donnée du poignet d'un *manipulateur anthropomorphe* sont montrées ci-dessous:



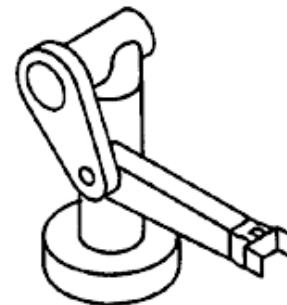
1) Bras à gauche et en haut



2) Bras à droite et en haut



3) Bras à gauche et en bas



4) Bras à droite et en bas

Remarques

- Nous avons vu que le modèle géométrique direct d'un robot peut se représenter aussi à l'aide de l'application:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{q})$$

Cette application est définie de l'*espace articulaire* (EA) vers l'*espace opérationnel* (EO), tous les deux de dimension $n \leq 6$, en général

- Cette application **n'est pas biunivoque**, c'est-à-dire, à un élément de l'EA correspond une seule image dans l'EO, mais par contre un élément de l'EO pourra être l'image de plusieurs éléments de l'EA
 - Dans le cas du robot Stäubli TX60 avec 1 butée mécanique, il existe (au maximum) 8 solutions possibles pour atteindre un point de l'EO
 - Dans la pratique, cette "non propriété" peut poser des problèmes, par exemple, dans le cas où des *obstacles* sont à proximité du robot
 - En effet, la réalisation d'une trajectoire rectiligne peut s'avérer irréalisable physiquement ou le bras du robot peut être amené à se *reconfigurer*, ce qui peut induire des comportements "intempestifs" du manipulateur