

Modèle Cinématique Direct du Poignet de Type Rotule

Robotique Industrielle, M1 3EA (RoVA) – TD 3, Exercice 2 et 3

F. Morbidi – Avril 2019

Exercice:

1. Déterminer le jacobien géométrique $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ du poignet de type rotule (ou poignet sphérique) montré dans la Figure 1 ci-dessous.

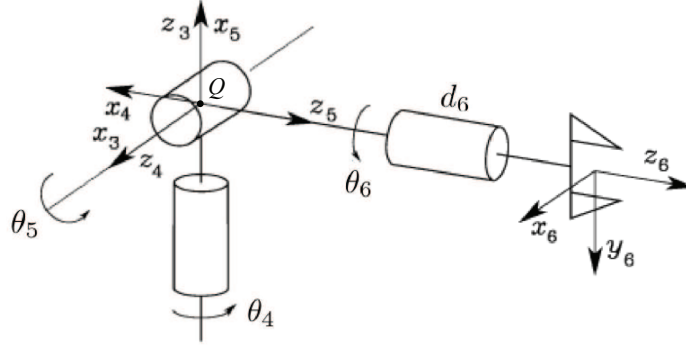


Figure 1: Poignet de type rotule.

2. Identifier les singularités cinématiques du poignet en étudiant le rang de la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{q})$. Préciser de quel type de singularité s'agit-il et dessiner le robot dans la configuration correspondante.

Solution:

1. Le modèle géométrique direct du poignet de type rotule a été calculé en cours. On rappelle ici que,

$$\mathbf{T}_6^3(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_4^3(\theta_4)\mathbf{A}_5^4(\theta_5)\mathbf{A}_6^5(\theta_6) = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

avec $\mathbf{q} = [\theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$. Le robot possède 3 articulations rotoïdes, donc le jacobien géométrique sera une matrice 6×3 avec la structure suivante,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_4} & \mathbf{J}_{P_5} & \mathbf{J}_{P_6} \\ \mathbf{J}_{O_4} & \mathbf{J}_{O_5} & \mathbf{J}_{O_6} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

La formule,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_i} \\ \mathbf{J}_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est prismatique,} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est rotoïde,} \end{cases} \quad i \in \{4, 5, 6\},$$

nous permet de récrire (2) de la façon suivante,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_4) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_5) \\ \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix}.$$

Pour compléter cette première partie de l'exercice, il nous reste à calculer les vecteurs \mathbf{z}_3 , \mathbf{z}_4 et \mathbf{z}_5 et les vecteurs \mathbf{p}_3 , \mathbf{p}_4 , \mathbf{p}_5 et \mathbf{p}_6 . Nous avons que:

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_6 = \begin{bmatrix} d_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 \\ d_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\ d_6 \cos \theta_5 \end{bmatrix},$$

où \mathbf{p}_4 , \mathbf{p}_5 et \mathbf{p}_6 sont donnés par les 3 premiers éléments de la 4^e colonne des matrices $\mathbf{T}_4^3 = \mathbf{A}_4^3$, \mathbf{T}_5^3 et \mathbf{T}_6^3 , respectivement (en réalité, le calcul de \mathbf{p}_3 , \mathbf{p}_4 et \mathbf{p}_5 est immédiat, car les repères 3, 4 et 5 ont la même origine de coordonnées (0, 0, 0), le point Q en Figure 1). Le vecteur \mathbf{p}_6 recherché a été marqué en bleu dans la matrice (1).

Les autres trois vecteurs manquants sont,

$$\mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_4 \\ \cos \theta_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \sin \theta_5 \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\ \cos \theta_5 \end{bmatrix},$$

où \mathbf{z}_4 et \mathbf{z}_5 sont donnés par la 3^e colonne des matrices de rotation \mathbf{R}_4^3 et \mathbf{R}_5^3 , respectivement. Cette dernière matrice n'a pas été déterminée auparavant, et nous devons la calculer pour trouver \mathbf{z}_5 (marqué en rouge ci-dessous):

$$\mathbf{R}_3^5 = \mathbf{R}_4^3(\theta_4) \mathbf{R}_5^4(\theta_5) = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \cos \theta_5 & -\sin \theta_4 & \textcolor{red}{\cos \theta_4 \sin \theta_5} \\ \sin \theta_4 \cos \theta_5 & \cos \theta_4 & \textcolor{red}{\sin \theta_4 \sin \theta_5} \\ -\sin \theta_5 & 0 & \textcolor{red}{\cos \theta_5} \end{bmatrix}.$$

Si on assemble toutes les pièces, nous avons que,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_6 c_4 s_5 \\ d_6 s_4 s_5 \\ d_6 c_5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -s_4 \\ c_4 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_6 c_4 s_5 \\ d_6 s_4 s_5 \\ d_6 c_5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_4 s_5 \\ s_4 s_5 \\ c_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_6 c_4 s_5 \\ d_6 s_4 s_5 \\ d_6 c_5 \end{bmatrix} \\ 0 & -s_4 & c_4 s_5 \\ 0 & c_4 & s_4 s_5 \\ 1 & 0 & c_5 \end{bmatrix}.$$

On voit facilement que le dernier produit vectoriel est zéro (en effet, les deux vecteurs sont proportionnels), et on obtient enfin,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -d_6 \sin \theta_4 \sin \theta_5 & d_6 \cos \theta_4 \cos \theta_5 & 0 \\ d_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 & d_6 \sin \theta_4 \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & -d_6 \sin \theta_5 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 \sin \theta_5 \\ 0 & \cos \theta_4 & \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\ 1 & 0 & \cos \theta_5 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Il est à noter que la troisième variable articulaire, θ_6 , n'apparaît pas dans (3).

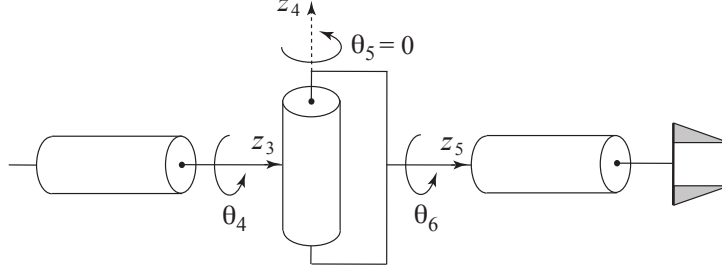


Figure 2: Singularité cinématique du poignet de type rotule: pour $\theta_5 = 0$, les axes z_3 et z_5 sont alignés.

2. Pour déterminer les singularités cinématiques du poignet de type rotule, il faut étudier le rang de la matrice (3). On voit assez facilement que $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ est toujours de plein rang (à savoir, rang 3) sauf si $\theta_5 \in \{0, \pi\}$. Par exemple, pour $\theta_5 = 0$, la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ devient,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & d_6 \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & d_6 \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_4 & 0 \\ 0 & \cos \theta_4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et son rang est 2 (en effet, la première colonne est égale à la troisième et $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ a uniquement deux colonnes linéairement indépendantes).

En conclusion, les singularités cinématiques du poignet de type rotule sont tous les vecteurs $\mathbf{q} = [\theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$ avec θ_4, θ_6 quelconques et $\theta_5 \in \{0, \pi\}$. Du point de vue géométrique, si on prend le cas de $\theta_5 = 0$, cela veut dire que les axes des articulations 3 et 5 sont alignés, comme montré dans la Figure 2. En pratique, cette dernière est la seule singularité cinématique critique du poignet de type rotule (une singularité de **type 2**). Elle est inévitable sans imposer, dans la phase de conception, des butées mécaniques au poignet pour restreindre son mouvement et éviter l'alignement de z_3 et z_5 .

Remarque: En général, chaque fois que les axes de deux articulations rotoïdes d'un robot sont alignés (colinéaires), une singularité apparaît. En fait, une rotation égale et opposée autour des deux axes ne produit aucun mouvement net.