

Modèle Géométrique Direct d'un Manipulateur à 3 DDL

Robotique Industrielle, M1 3EA (RoVA)

F. Morbidi – Mars 2019

Exercice :

1. Positionner les repères et déterminer les paramètres de Denavit-Hartenberg du manipulateur PRR à 3 DDL montré dans la Figure 1 ci-dessous.

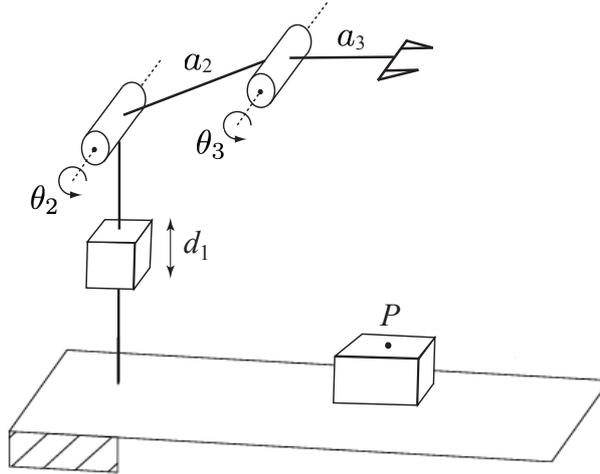


FIGURE 1 – Manipulateur à 3 DDL.

2. Calculer le modèle géométrique direct du manipulateur.
3. En sachant que les coordonnées du point P en Figure 1 sont $\mathbf{p}^3 = [0, -1, 0]^T$ dans le repère de l'effecteur du robot, déterminer les coordonnées du même point dans le référentiel de la deuxième et de la troisième articulation du robot.

Solution :

1. La Figure 2 montre les 4 repères du manipulateur (en rouge), positionnés en suivant la convention de Denavit-Hartenberg. Il est à noter que le choix de la direction de x_0 et de la position de l'origine O_0 du repère "0", est arbitraire.
2. Notre manipulateur est un robot de type PRR et le vecteur des variables articulaires est $\mathbf{q} = [d_1, \theta_2, \theta_3]^T$ (il s'agit, en effet, d'un manipulateur anthropomorphe, où la première articulation rotoïde a été remplacée par une articulation prismatique). Les paramètres de Denavit-Hartenberg du robot sont présentés dans le Tableau 1. Pour calculer le modèle géométrique direct du manipulateur, nous devons déterminer trois matrices de transformation : $\mathbf{A}_1^0(d_1)$, $\mathbf{A}_2^1(\theta_2)$ et $\mathbf{A}_3^2(\theta_3)$. La première matrice, $\mathbf{A}_1^0(d_1)$, correspond à la première ligne du tableau des paramètres de Denavit-Hartenberg et elle est donnée par,

$$\mathbf{A}_1^0(d_1) = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ \mathbf{R}_x(\pi/2) & & & 0 \\ & & & d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{R}_x(\pi/2)$ dénote la matrice de rotation élémentaire d'un angle $\pi/2$ autour de l'axe z .

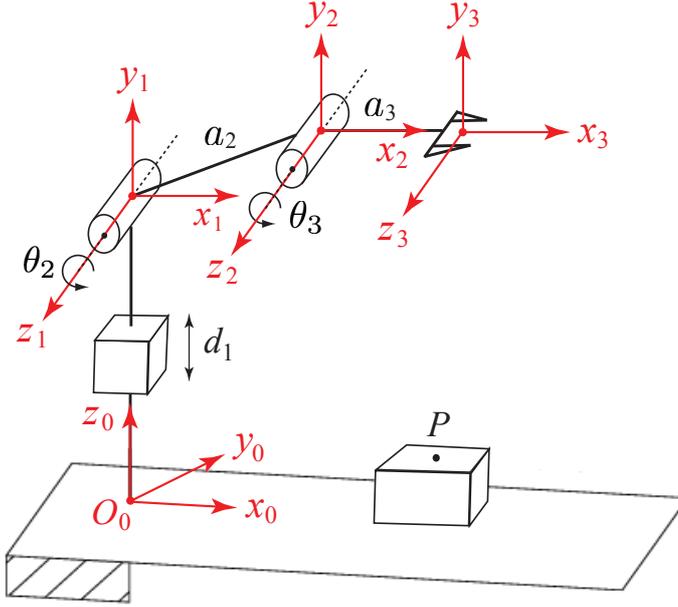


FIGURE 2 – Repères (rouges) positionnés sur le manipulateur à 3 DDL.

La deuxième transformation, la transformation rigide entre le repère 2 et le repère 1, a la forme suivante,

$$\mathbf{A}_2^1(\theta_2) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{R}_z(\theta_2) & a_2 \cos \theta_2 & a_2 \sin \theta_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La troisième transformation est similaire à la précédente (en fait, il faut juste remplacer “ θ_2 ” avec “ θ_3 ” et “ a_2 ” avec “ a_3 ”). On obtient donc,

$$\mathbf{A}_3^2(\theta_3) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{R}_z(\theta_3) & a_3 \cos \theta_3 & a_3 \sin \theta_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_3 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & a_3 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En conclusion, le modèle géométrique direct du manipulateur, c’est-à-dire la matrice de

| Segment | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|----------|-------|------------|-------|------------|
| 1 | 0 | $\pi/2$ | d_1 | 0 |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | θ_2 |
| 3 | a_3 | 0 | 0 | θ_3 |

TABLE 1 – Paramètres de Denavit-Hartenberg du manipulateur à 3 DDL.

transformation homogène $\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q})$ entre le repère 3 et le repère 0, est,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) &= \mathbf{A}_1^0(d_1)\mathbf{A}_2^1(\theta_2)\mathbf{A}_3^2(\theta_3) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) & 0 & a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + d_1 + a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'axe z_3 est aligné avec l'axe z_2 , donc le repère 3 n'est pas un repère admissible pour l'effecteur. Pour y remédier, il faut introduire la transformation constante,

$$\mathbf{T}_e^3 = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_y(\pi/2) \mathbf{R}_z(-\pi/2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour plus de simplicité, nous omettrons par la suite la transformation \mathbf{T}_e^3 et nous ferons l'assumption que le repère 3 coïncide avec le repère de la pince.

3. Les coordonnées homogènes du point P dans le repère de la deuxième articulation du robot (à savoir, le repère 1) sont,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}^1 &= \mathbf{T}_3^1(\theta_2, \theta_3) \tilde{\mathbf{p}}^3 = \mathbf{A}_2^1(\theta_2)\mathbf{A}_3^2(\theta_3) \tilde{\mathbf{p}}^3 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_3 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & a_3 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}^3 \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) & 0 & a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \cos \theta_2 \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \cos \theta_2 \\ -\cos(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \cos \theta_2 \\ -\cos(\theta_2 + \theta_3) + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De façon similaire, les coordonnées homogènes du point P dans le repère de la troisième articulation du robot (le repère 2) sont,

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{A}_3^2(\theta_3) \tilde{\mathbf{p}}^3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_3 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & a_3 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_3 + a_3 \cos \theta_3 \\ -\cos \theta_3 + a_3 \sin \theta_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$