Robotique Industrielle

UPJV, Département EEA

M1 3EA, Parcours RoVA, EC15

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

Lundi 13h30-16h30 (CM ou TD, salle CURI 304)
(TP, salle TP204)

Année Universitaire 2023-2024

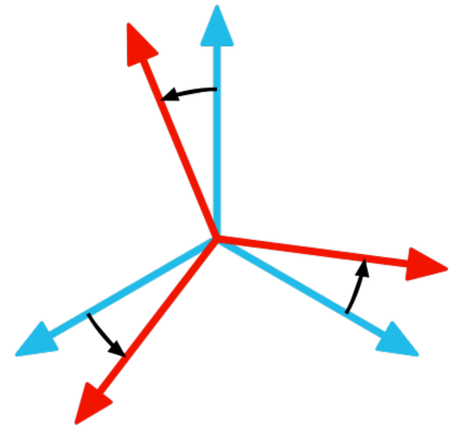
UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



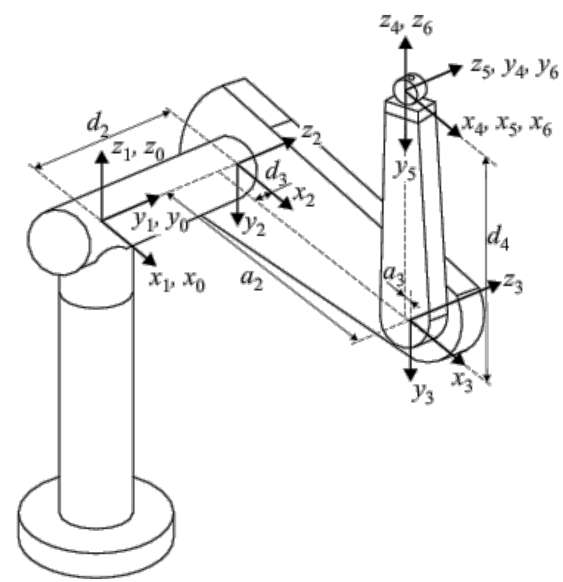
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse

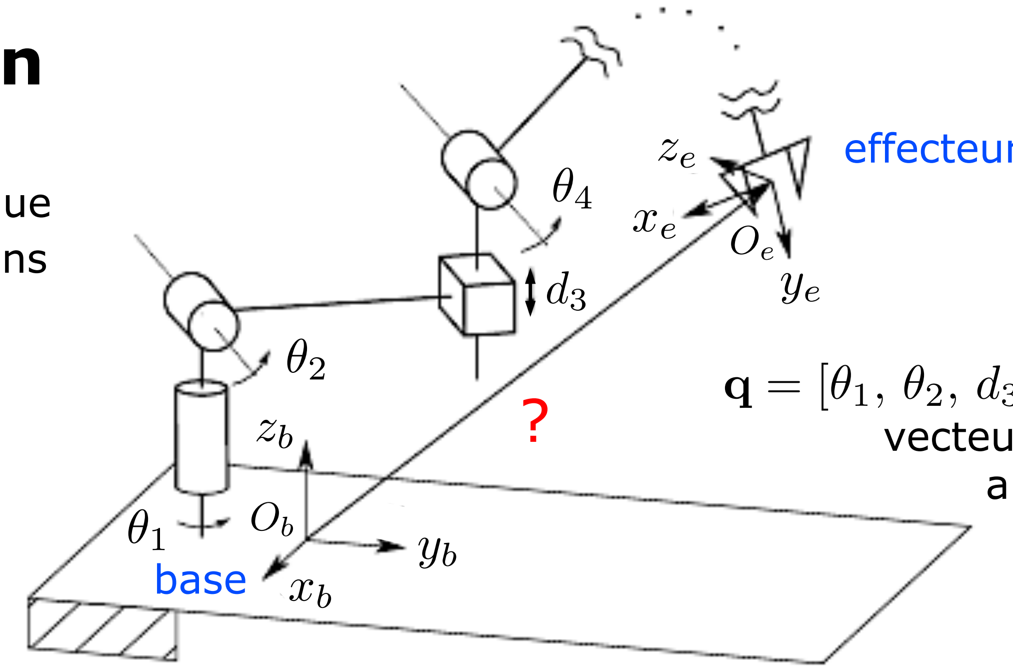


Notation

$a,\ \gamma,\ M \in \mathbb{R}$	scalaires (nombres réels)
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	vecteur *colonne* de dimension n, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$	matrice avec n lignes et m colonnes
$\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$	transposée de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$\det(\mathbf{A}),\ \mathbf{A}^{-1}$	déterminant et inverse de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$	matrice identité $n \times n$
$\mathbf{0}_{n\times m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$	matrice de zéros $n \times m$
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$	produit scalaire des vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
$\lVert\mathbf{x}\rVert = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$	norme euclidienne du vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$	produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

Motivation

Robot générique
à n articulations



$$\mathbf{q} = [\theta_1,\, \theta_2,\, d_3,\, \theta_4, \ldots]^T \in \mathbb{R}^n$$

vecteur des variables
articulaires

- Un manipulateur peut être représenté comme une *chaîne cinématique* de segments reliés par l'intermédiaire d'articulations rotoïdes ou prismatiques
- Le mouvement résultant de la structure est obtenu par *composition* des mouvements élémentaires de chaque segment par rapport au précédent
- Afin de manipuler un objet dans l'espace, il est nécessaire de décrire la *position* et l'*orientation* (**pose**) de l'effecteur

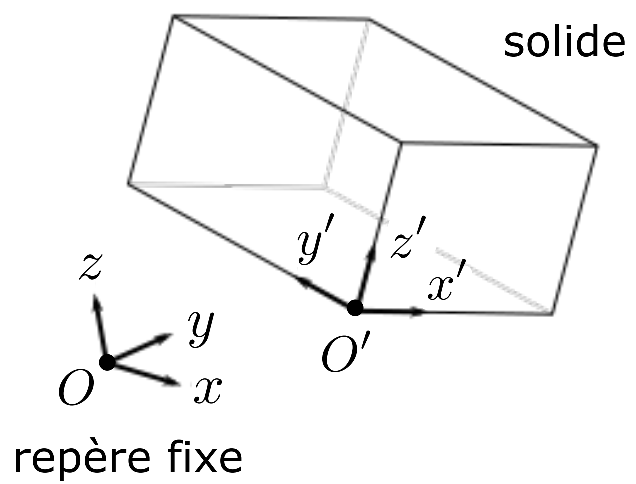
Objectif : exprimer la pose de l’effecteur en fonction des variables des articulations, par rapport à un repère donné (ex. le repère de la base)

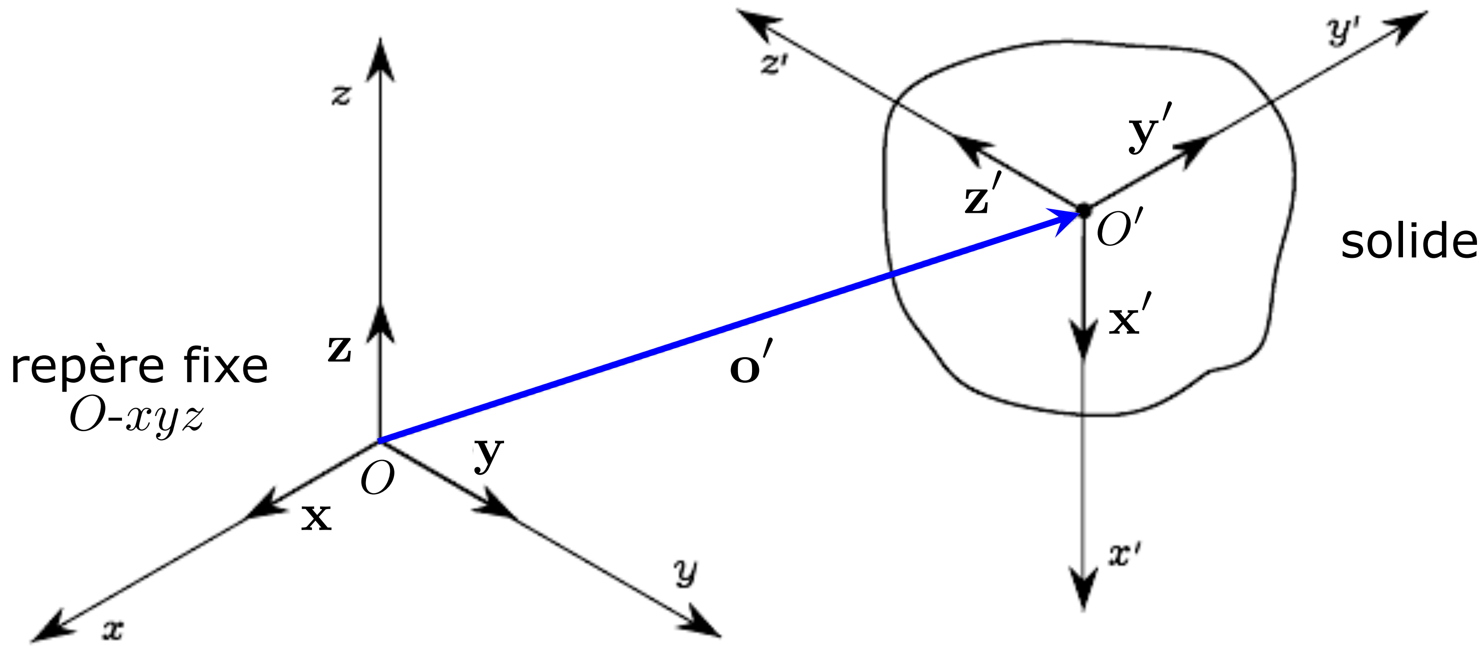
2.1 Pose d’un corps rigide

La **pose** d'un *corps rigide* (ou *solide*) dans l'espace 3D peut être complètement décrite par 6 paramètres indépendants :

- **3** paramètres indépendants définissent la **position** d'un point, noté O', du solide dans le repère fixe $O\text{-}xyz$ (ex. coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques)

- **3** paramètres indépendants déterminent l'**orientation** du solide autour du point O' (ex. les angles d’Euler)





La **position** du point O' du solide par rapport au repère fixe O-xyz s'exprime par l'équation:

$$\mathbf{o}' = o'_x\,\mathbf{x} + o'_y\,\mathbf{y} + o'_z\,\mathbf{z}$$

où $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sont les vecteurs unitaires (leurs norme est 1) des axes du repère O-xyz et $o'_x,\ o'_y,\ o'_z$ sont les composantes du vecteur $\mathbf{o}' \in \mathbb{R}^3$ le long de chacun des trois axes

• Afin de décrire l'**orientation** du solide, considérons un repère *attaché au corps* et exprimons ses vecteurs unitaires par rapport au repère $O\text{-}xyz$

• Soit $O'\text{-}x'y'z'$ un tel repère avec origine O' et soient $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$ les vecteurs unitaires des axes

• Ces vecteurs sont exprimés par rapport au repère $O\text{-}xyz$ par les équations :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= x'_x\,\mathbf{x} + x'_y\,\mathbf{y} + x'_z\,\mathbf{z} \\
\mathbf{y}' &= y'_x\,\mathbf{x} + y'_y\,\mathbf{y} + y'_z\,\mathbf{z} \\
\mathbf{z}' &= z'_x\,\mathbf{x} + z'_y\,\mathbf{y} + z'_z\,\mathbf{z}
\end{aligned}$$

• Sous forme compacte, les vecteurs unitaires $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$ qui décrivent l'orientation du solide par rapport à $O\text{-}xyz$, peuvent être combinés dans la matrice 3×3 :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T\mathbf{x} & \mathbf{y}'^T\mathbf{x} & \mathbf{z}'^T\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T\mathbf{y} & \mathbf{y}'^T\mathbf{y} & \mathbf{z}'^T\mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T\mathbf{z} & \mathbf{y}'^T\mathbf{z} & \mathbf{z}'^T\mathbf{z} \end{bmatrix}$$

qui est appelée **matrice de rotation**. On dit que x'_x est le *cosinus directeur* reliant $\mathbf{x}'$ à $\mathbf{x}$ (et de même pour les autres huit éléments de $\mathbf{R}$)

Propriétés des matrices de rotation

- Les colonnes d'une matrice de rotation sont *orthogonales* à deux à deux,

$$\mathbf{x}'^T\mathbf{y}' = 0, \quad \mathbf{y}'^T\mathbf{z}' = 0, \quad \mathbf{z}'^T\mathbf{x}' = 0$$

  est leur norme est égale à 1:

$$\mathbf{x}'^T\mathbf{x}' = 1, \quad \mathbf{y}'^T\mathbf{y}' = 1, \quad \mathbf{z}'^T\mathbf{z}' = 1$$

  Par conséquent, $\mathbf{R}$ est une **matrice orthogonale**, c'est-à-dire:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$$

  Si on multiplie à droite chaque côté de l'équation précédente par $\mathbf{R}^{-1}$
  on trouve que :

$$\boxed{\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}}$$

  c'est-à-dire, la *transposée d'une matrice de rotation est égale à son inverse.*

- En plus de conserver les *longueurs*, les matrices de rotation doivent également conserver l'*orientation*, donc il faut que $\det(\mathbf{R}) = 1$ (vrai, si le repère est *direct*)

$$\mathrm{SO}(3) \triangleq \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}_3,\ \det(\mathbf{R}) = 1\}$$

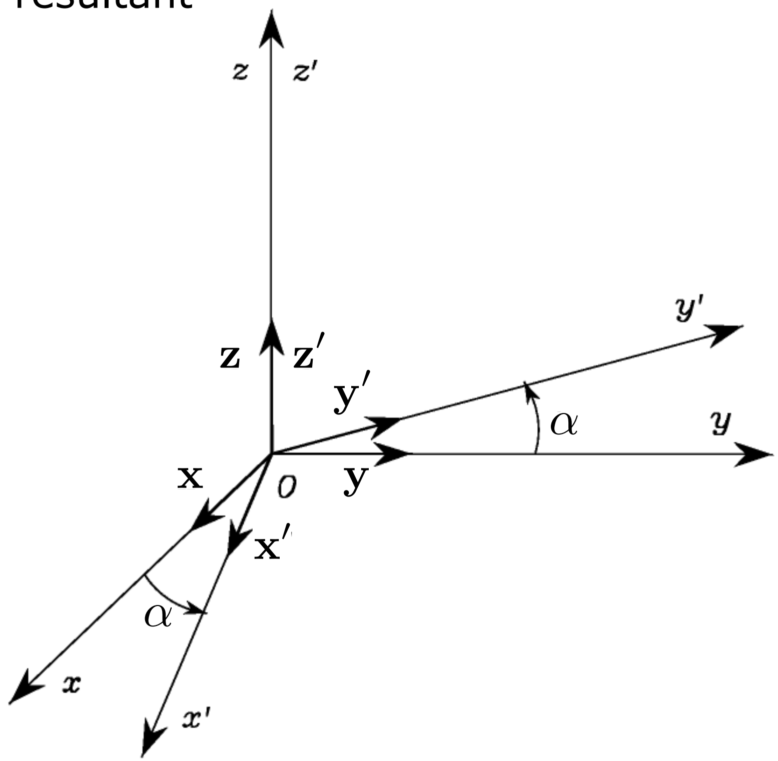
Groupe spécial orthogonal de dimension 3

Rotations élémentaires

• Considérons les rotations qu'on peut obtenir à partir de **rotations élémentaires** autour des axes x, y, z

• Ces rotations sont **positives** si elles sont faites autour des axes relatifs, dans le sens *anti-horaire*

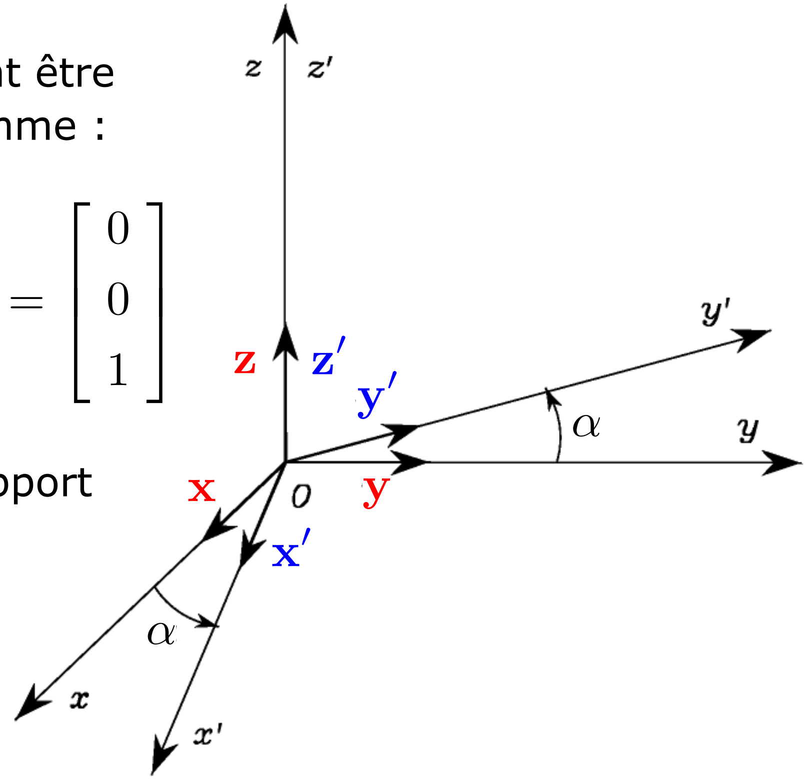
<u>Exemple</u> : le repère O-xyz est pivoté d'un angle α autour de l'axe z et O-$x'y'z'$ est le repère résultant



Rotations élémentaires

- Les vecteurs unitaires de O-$x'y'z'$ peuvent être exprimés par rapport au repère O-xyz comme :

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



- La matrice de rotation de O-$x'y'z'$ par rapport à O-xyz engendrée, est donc:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la même façon, on peut trouver la matrice de rotation autour de l'axe x d'un angle β et la matrice de rotation autour de l'axe y d'un angle γ

Remarque : Ces matrices seront utiles pour décrire des rotations dans l'espace 3D autour d'*axes quelconques*

Rotations élémentaires: sommaire

Slide à imprimer pour le DS

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe x d'un angle γ

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe y d'un angle β

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe z d'un angle α

Remarque :
Pour les rotations élémentaires, la propriété suivante est vérifiée :

$$\mathbf{R}_x(-\gamma) = \mathbf{R}_x^T(\gamma), \quad \mathbf{R}_y(-\beta) = \mathbf{R}_y^T(\beta), \quad \mathbf{R}_z(-\alpha) = \mathbf{R}_z^T(\alpha)$$

Représentation d'un vecteur

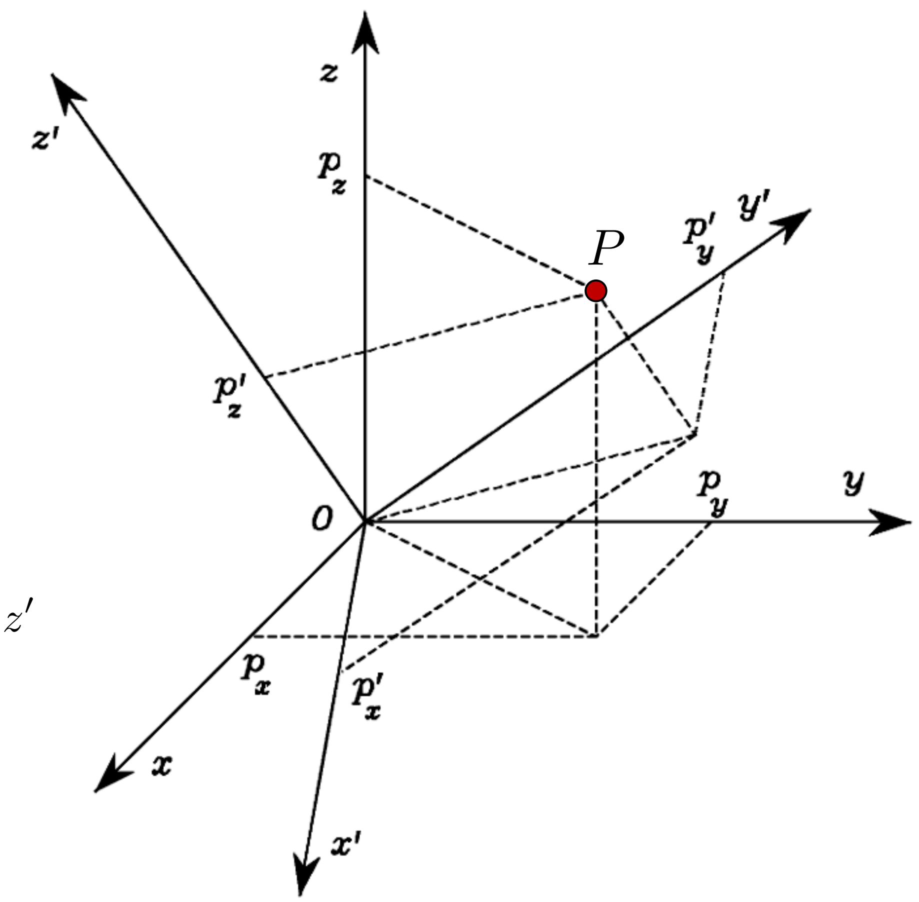
Hypothèse simplificatrice: l'origine du repère du solide coïncide avec l'origine du repère fixe. Donc $\mathbf{o}' = \mathbf{0}_{3\times1} = [0,\, 0,\, 0]^T$.

On peut représenter le point 3D P comme :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \text{ par rapport à } O\text{-}xyz$$

et

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \text{ par rapport à } O\text{-}x'y'z'$$



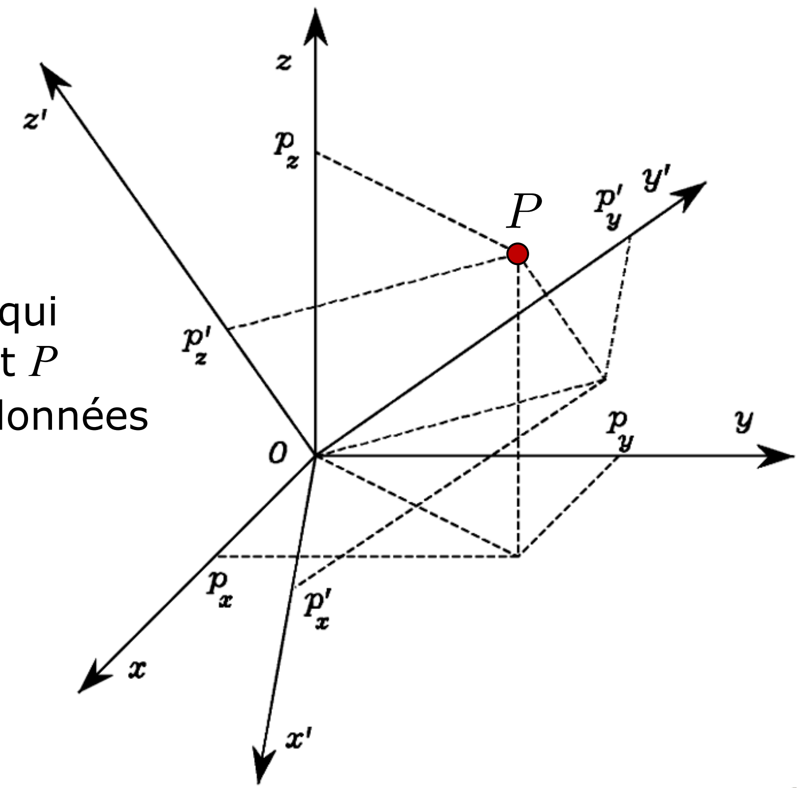
Représentation d'un vecteur

Mais $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ sont deux représentations du même point P, donc

$$\mathbf{p} = p'_x\,\mathbf{x}' + p'_y\,\mathbf{y}' + p'_z\,\mathbf{z}' = \begin{bmatrix}\mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}'\end{bmatrix}\mathbf{p}'$$

Mais cela signifie que (rappel les équations vues précédemment) :

$$\boxed{\mathbf{p} = \mathbf{R}\,\mathbf{p}'}$$



$\mathbf{R}$ représente la matrice de transformation qui permet d'exprimer les coordonnées du point P dans le repère O-xyz, en function des coordonnées du même point dans le repère O-$x'y'z'$

$\mathbf{R}$ est une *matrice orthogonale*. Donc la transformation inverse est simplement :

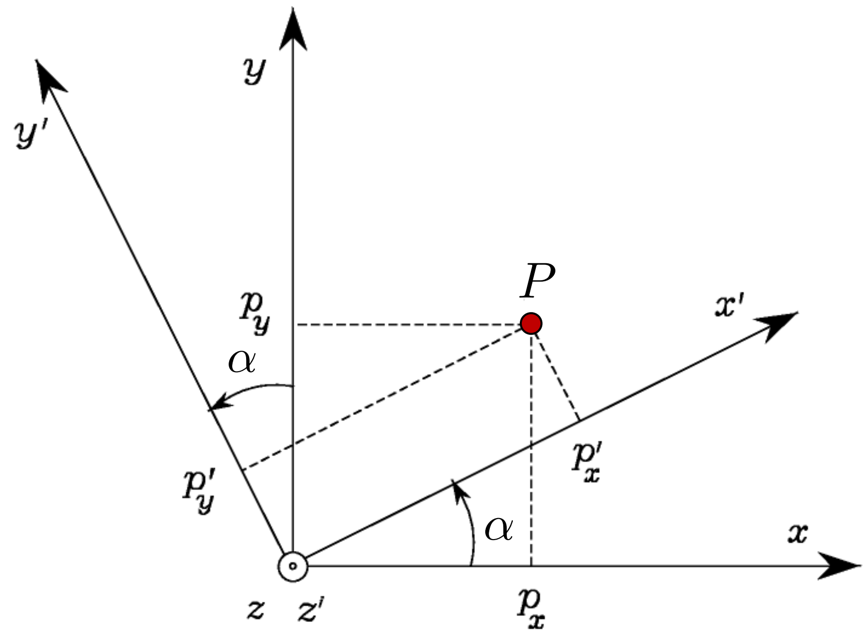
$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T\mathbf{p}$$

Représentation d'un vecteur

<u>**Exemple**</u> **:**

Deux repères avec la même origine et une rotation relative d'un angle α autour de l'axe z

$\mathbf{p}, \mathbf{p}'$: coordonnées du point P dans les repères $O\text{-}xyz$ et $O\text{-}x'y'z'$



On trouve facilement que:

$$
\begin{aligned}
p_x &= p'_x \cos\alpha - p'_y \sin\alpha \\
p_y &= p'_x \sin\alpha + p'_y \cos\alpha \\
p_z &= p'_z
\end{aligned}
$$

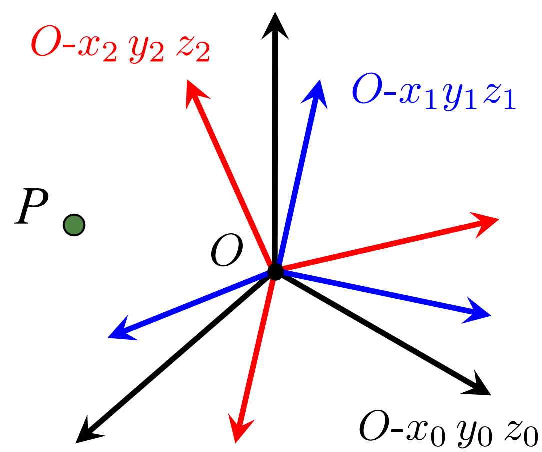
Remarque :
La matrice $\mathbf{R}_z(\alpha)$ représente non seulement l'orientation d'un repère par rapport à un autre, mais elle décrit également la *transformation d'un vecteur dans un repère en un autre avec la même origine*

Composition de matrices de rotation

Problème : comment composer plusieurs rotations ?

Considérons **trois repères** $O\text{-}x_0\,y_0\,z_0$, $O\text{-}x_1y_1z_1$, $O\text{-}x_2\,y_2\,z_2$ avec la *même origine* O

$\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{p}^2 \in \mathbb{R}^3$: coordonnées d'un point P dans les trois repères



Composition de matrices de rotation

Soit $\mathbf{R}_i^j$ la matrice de rotation du repère i par rapport au repère j

Donc

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2$$

De même, nous avons :

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2$$

Mais alors, on déduit que :

$$\boxed{\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1}$$

Composition de matrices de rotation

Considérons un repère initialement aligné avec $O\text{-}x_0\, y_0\, z_0$

La rotation définie par $\mathbf{R}_2^0$ peut être obtenue en **deux étapes** :

1. Tourne le repère avec $\mathbf{R}_1^0$ pour l'aligner avec $O\text{-}x_1 y_1 z_1$
2. Tourne le repère, maintenant aligné avec $O\text{-}x_1 y_1 z_1$, en utilisant $\mathbf{R}_2^1$ pour l'aligner avec $O\text{-}x_2\, y_2\, z_2$

Composition par rapport au repère courant :

- De façon générale, une rotation d'ensemble peut être exprimée comme une sequence de n *rotations partielles*
- Chaque rotation est définie par rapport à la **précédente**
- Le repère par rapport à lequel la rotation se produit est appelé **repère courant**
- La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de rotation, en suivant l'ordre donné des rotations :

$$\mathbf{R}_n^0 = \mathbf{R}_1^0 \, \mathbf{R}_2^1 \cdots \mathbf{R}_{n-1}^{n-2} \, \mathbf{R}_n^{n-1}$$

Composition de matrices de rotation

Composition par rapport à un repère fixe :

- Les rotations successives peuvent aussi être specifiées toujours par rapport au **repère initial**
- On dit que les rotations sont faites par rapport à un **repère fixe**
- La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à gauche** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations :

$$\mathbf{R}_n^0 = \mathbf{R}_n^{n-1}\,\mathbf{R}_{n-1}^{n-2}\cdots\mathbf{R}_2^1\,\mathbf{R}_1^0$$

Remarque :

Conformément à la notation que nous avons introduit, nous avons que :

$$\mathbf{R}_i^j = (\mathbf{R}_j^i)^{-1} = (\mathbf{R}_j^i)^T$$

Composition de matrices de rotation

Problème fundamental : le produit matriciel *n'est pas commutatif* !

En général, deux rotations ne commutent pas et la composition dépend de l'*ordre* de chaque rotation, à savoir :

$$\boxed{\mathbf{R}_1^0\,\mathbf{R}_2^1 \neq \mathbf{R}_2^1\,\mathbf{R}_1^0}$$

Exemple :

$$\mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\pi/6)\,\mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 & \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

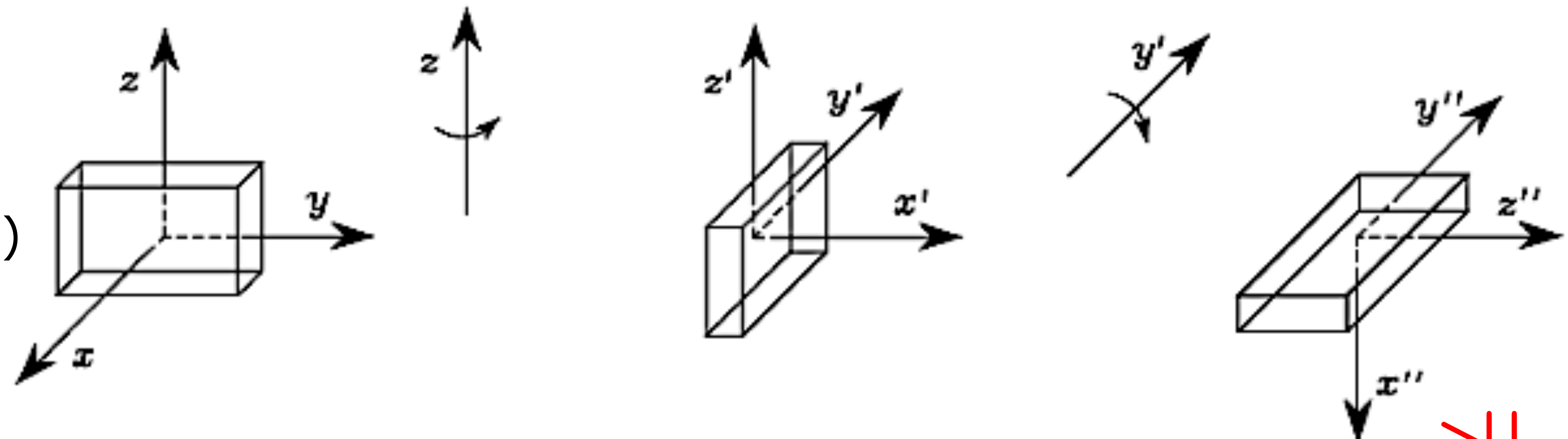
$$\nparallel$$

$$\mathbf{R}_x(\pi/4)\,\mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

Composition de matrices de rotation

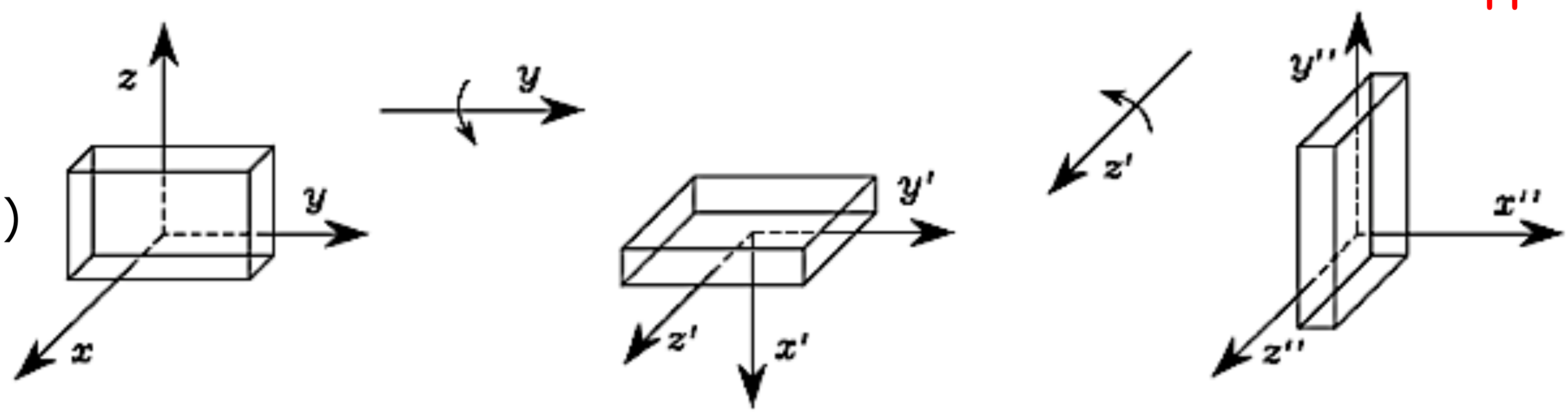
• Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère courant**

a)



$\neq$

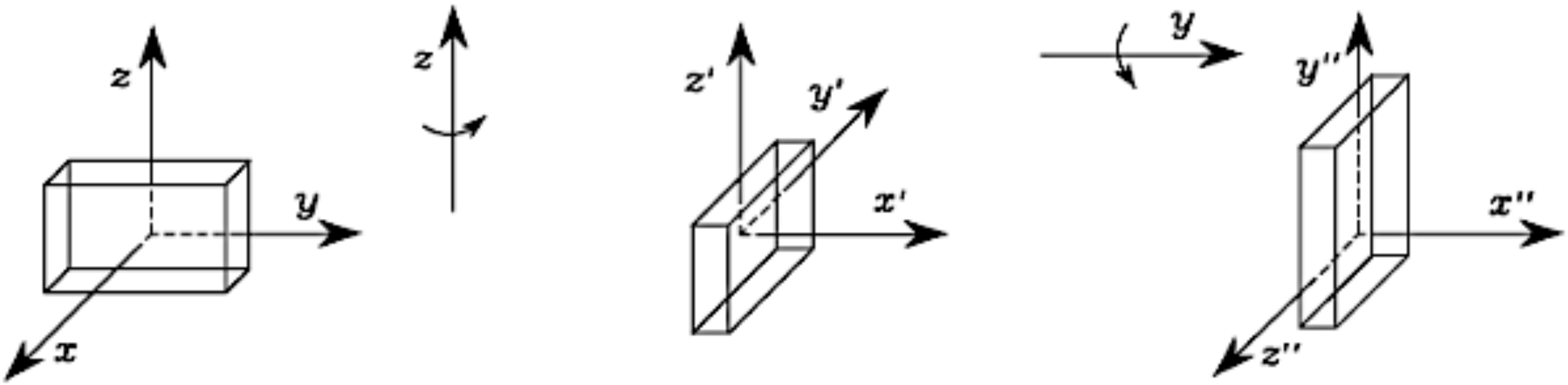
b)



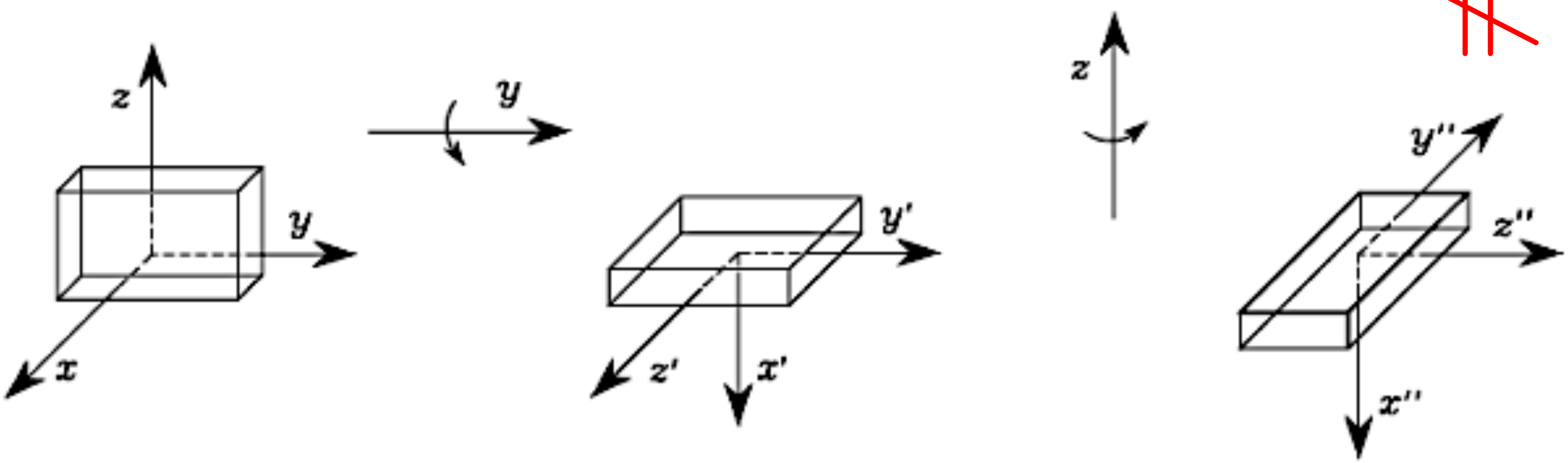
Composition de matrices de rotation

- Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère fixe**

a)



b)



Représentations minimales de l'orientation

- Les *matrices de rotation* fournissent une **description redondante** de l'orientation d'un corps

- En effet, une matrice de rotation $\mathbf{R}$ comprend 9 éléments :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

… mais nous avons 6 relations indépendantes entre ces éléments (les *contraintes d'orthogonalité* et *de normalité* des colonnes de $\mathbf{R}$) :

$$\begin{aligned} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 \\ r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{33}^2 &= 1 \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion : **3 paramètres** suffisent pour décrire l'orientation d'un corps

Une représentation de l'orientation en fonction de *3 paramètres indépendants* est dite une **représentation minimale**

Angles de Euler

• Une *représentation minimale* de l'orientation peut être obtenue en utilisant un ensemble de **trois angles** : $\boldsymbol{\phi} = [\varphi,\, \theta,\, \psi]^T$

• Une *matrice de rotation générique* peut être obtenue en composant une séquence opportune de 3 rotations élémentaires (Théor. d'Euler, 1776)

<u>Attention</u> : il faut garantir que deux rotations successives ne sont pas faites autour d'*axes parallèles*

Cela veut dire que *12 ensembles différents d'angles* sont admissibles parmi les 3^3 = 27 combinaisons possibles:

ZXZ, XYX, YZY, ZYZ, XZX, YXY (angles « propres »)
XYZ, YZX, ZXY, XZY, ZYX, YXZ (angles de Tait-Bryan)

Chaque ensemble constitue un triplet d'**angles d'Euler**

Leonhard Euler
(1707–1783)

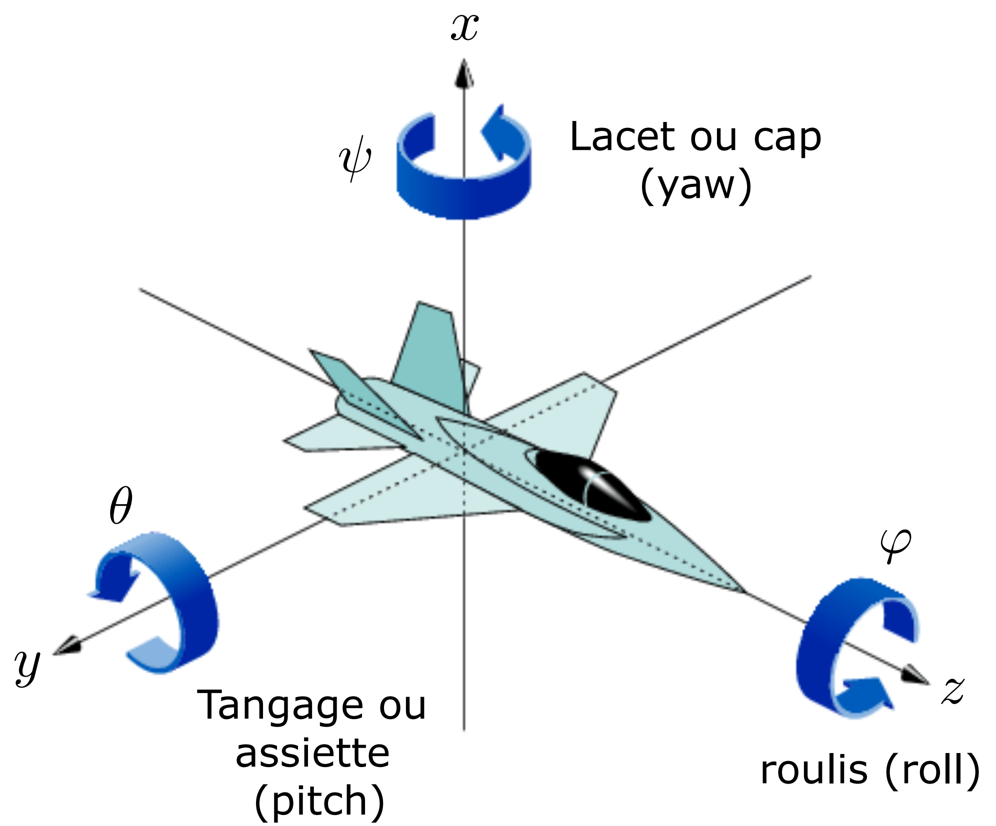
Deux triplets d'angles d'Euler très utilisés sont :

1. Les angles ZYZ
2. Les angles ZYX ou angles **roulis-tangage-lacet** (*roll-pitch-yaw*, en anglais)

Angles roulis-tangage-lacet

• Représentation de l'orientation utilisée en (*aéro)nautique* pour décrire l’attitude d’un avion

• Les angles (φ, θ, ψ) représentent des rotations définies dans un repère fixe attaché au centre de masse de l’avion



Angles roulis-tangage-lacet

La rotation décrite par les angles de roulis, tangage et lacet est obtenue comme la composition de *3 rotations élémentaires* :

- Tourner le repère d'un angle ψ autour de l'axe x (lacet) : rotation définie par $\mathbf{R}_x(\psi)$

- Tourner le repère d'un angle θ autour de l'axe y (tangage) : rotation définie par $\mathbf{R}_y(\theta)$

- Tourner le repère d'un angle φ autour de l'axe z (roulis) : rotation définie par $\mathbf{R}_z(\varphi)$

L'orientation résultante du repère est obtenue en composant les rotations par rapport au *repère fixe*, et peut être calculée en *multipliant à gauche* les matrices de rotation élémentaires :

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{R}_z(\varphi)\,\mathbf{R}_y(\theta)\,\mathbf{R}_x(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

où, pour plus de simplicité, $c_\varphi = \cos\varphi$, $s_\theta = \sin\theta$

Angles roulis-tangage-lacet

Problème inverse : déterminer les angles de roulis, tangage et lacet qui correspondent à une matrice de rotation $\mathbf{R}$ donnée :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Si on compare cette expression avec $\mathbf{R}(\phi)$, on trouve que la solution, pour $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, est :

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \theta &= \mathrm{Atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi &= \mathrm{Atan2}(r_{32}, r_{33}) \end{aligned}$$

L'autre solution équivalente pour $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$, est :

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \theta &= \mathrm{Atan2}(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi &= \mathrm{Atan2}(-r_{32}, -r_{33}) \end{aligned}$$

Angles roulis-tangage-lacet

Remarque 1 :

• Si $\cos\theta = 0$ les solutions précédentes sont *dégénérées*: dans ce cas, on peut uniquemment déterminer la somme ou la différence de φ et ψ (les angles sont liés)

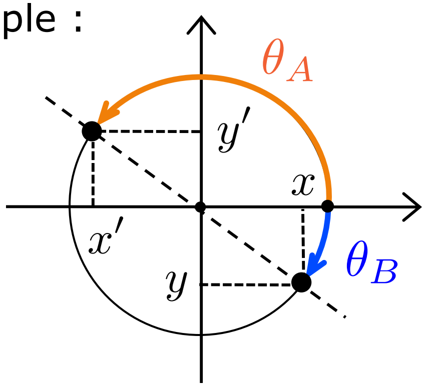
• Les configurations qui correspondent aux angles $\theta = \pm\pi/2$ caractérisent les singularités de représentation des angles r.t.l. (blocage de cardan ou *gimbal lock*)

Remarque 2 :

• $\mathrm{Atan2}(y,\, x)$ est la *fonction arc tangente à deux arguments*

• $\mathrm{Atan2}(y,\, x)$ calcule l'arc tangente du rapport y/x mais elle utilise le *signe* des arguments pour déterminer le bon quadrant de l'angle

Exemple :



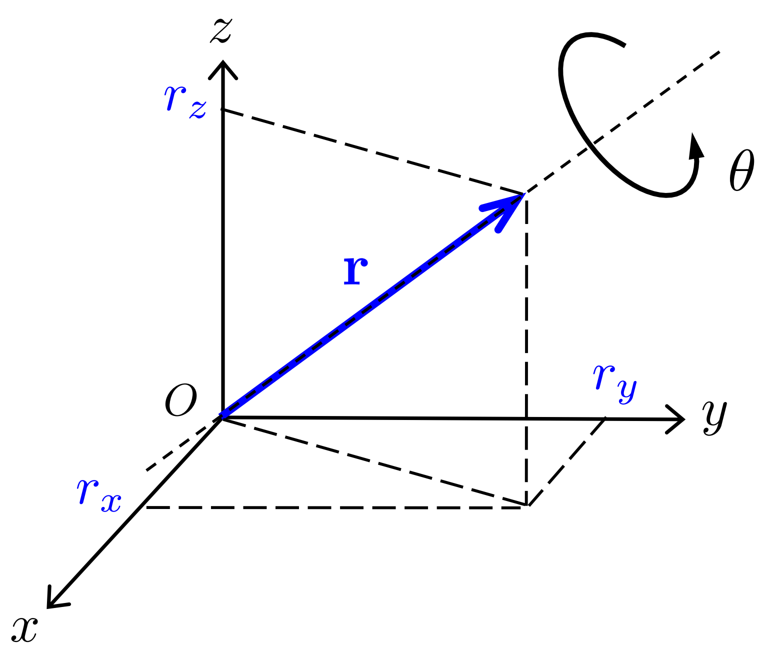
$$\mathrm{Atan2}(y,\, x) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, & y \geq 0,\ x < 0 \\ \arctan(y/x) - \pi, & y < 0,\ x < 0 \\ +\pi/2, & y > 0,\ x = 0 \\ -\pi/2, & y < 0,\ x = 0 \\ \text{non définie}, & y = 0,\ x = 0 \end{cases}$$

$\arctan(y/x) = \arctan(y'/x')$ … mais angle θ_A ou θ_B ?

Angle et axe

• Une représentation *non minimale* de l'orientation peut être obtenue en utilisant **4 parametrès** qui expriment une rotation d'un angle θ autour d'un axe générique dans l'espace 3D

• Cette représentation peut être utile, par exemple, pour *planifier la trajectoire* de l'effecteur d'un manipulateur



$$\mathbf{r} = [r_x, r_y, r_z]^T$$

vecteur unitaire ($\|\mathbf{r}\| = 1$) de l'axe de rotation dans le repère O-xyz

L'angle θ est considéré comme *positif* si la rotation autour de l'axe $\mathbf{r}$ est faite dans le sens anti-horaire

Angle et axe

- Matrice de rotation qui correspond à un angle θ et à un axe $\mathbf{r}$ donnés :

$$\mathbf{R}(\theta,\,\mathbf{r}) \;=\; \begin{bmatrix} r_x^2(1-c_\theta)+c_\theta & r_xr_y(1-c_\theta)-r_zs_\theta & r_xr_z(1-c_\theta)+r_ys_\theta \\ r_xr_y(1-c_\theta)+r_zs_\theta & r_y^2(1-c_\theta)+c_\theta & r_yr_z(1-c_\theta)-r_xs_\theta \\ r_xr_z(1-c_\theta)-r_ys_\theta & r_yr_z(1-c_\theta)+r_xs_\theta & r_z^2(1-c_\theta)+c_\theta \end{bmatrix}$$

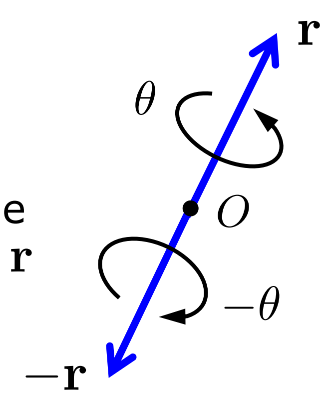
  où, à nouveau, pour plus de simplicité, $c_\theta = \cos\theta,\; s_\theta = \sin\theta$

- Une formule plus compacte, mais équivalente, est la *formule de Rodrigues* :

$$\mathbf{R}(\theta,\,\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{I}_3 \,+\, \widehat{\mathbf{r}}\sin\theta \,+\, \widehat{\mathbf{r}}^2(1-\cos\theta) \;\text{avec}\; \widehat{\mathbf{r}} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété :

$$\mathbf{R}(-\theta,\,-\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{R}(\theta,\,\mathbf{r})$$



- Ça veut dire que une rotation d'un angle $-\theta$ autour de l'axe $-\mathbf{r}$ ne peut pas être distinguée d'un rotation d'un angle θ autour de l'axe $\mathbf{r}$

- La représentation angle et axe **n'est pas unique !**

Angle et axe

Problème inverse : déterminer l'angle et l'axe qui correspondent à une matrice de rotation $\mathbf{R}$ donnée :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

• Si $\sin\theta \neq 0$, on obtient :

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \qquad \text{Angle}$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \qquad \text{Axe}$$

Remarques :

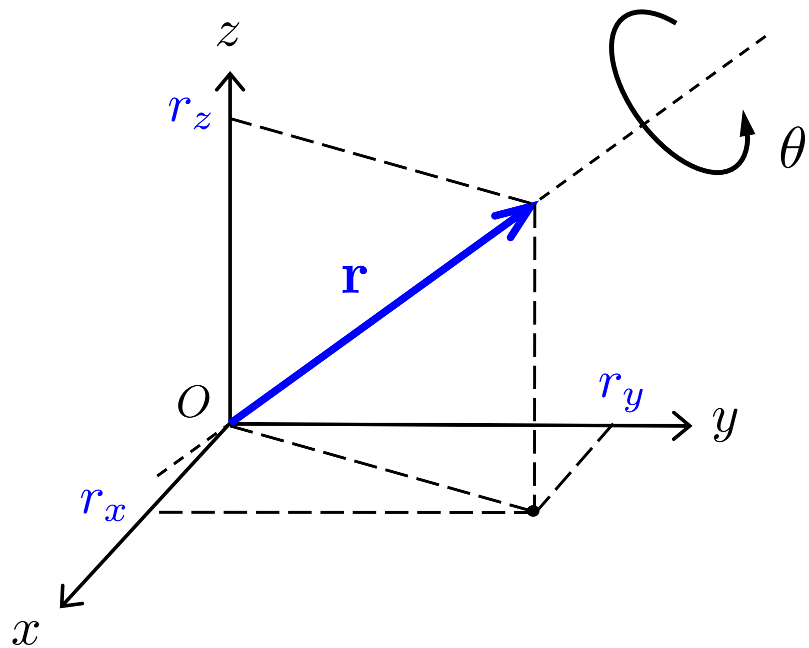
• Les deux expressions précédentes décrivent la rotation en fonction de *quatre paramètres* : l'angle et les trois composantes du vecteur unitaire de l'axe

• Cependant, on peut constater que les trois composantes r_x, r_y, r_z du vecteur $\mathbf{r}$ *ne sont pas indépendantes* mais elles sont contraintes par la condition :

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$$

Angle et axe

- Si $\sin\theta = 0$, les équations précédentes *ne sont pas définies*
  - Pour résoudre le problème inverse, il faut travailler avec l'expression particulière de la matrice $\mathbf{R}$ dont on dispose et trouver des formules de résolution pour les deux cas : $\theta = \pi$ et $\theta = 0$
  - Si $\theta = 0$ (rotation nulle), le vecteur unitaire $\mathbf{r}$ est *arbitraire* (*singularité de représentation*)



Quaternion unitaire

- Les inconvénients de la représentation angle et axe peuvent être surmontés par une autre représentation à 4 paramètres, le **quaternion unitaire**, défini par :

$$\mathcal{Q} = \{\eta,\, \boldsymbol{\epsilon}\}$$

avec

$\eta = \cos(\theta/2)$: *partie scalaire* du quaternion

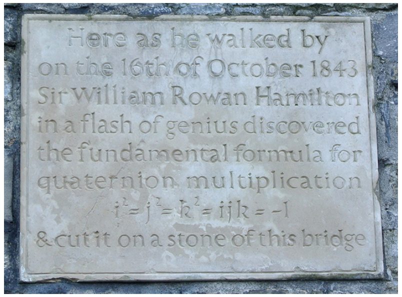
$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x,\, \epsilon_y,\, \epsilon_z]^T = \sin(\theta/2)\,\mathbf{r}$: *partie vectorielle* du quaternion

avec la contrainte $\eta^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1$ dont le nom de quaternion *unitaire.*

Les paramètres $\mathbf{r}$ et θ sont les mêmes que pour la représentation angle et axe

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
$$q = \eta + \epsilon_x i + \epsilon_y j + \epsilon_z k$$

Broom Bridge (Dublin)



16 octobre 1843

William R. Hamilton
(1805–1865)

Quaternion unitaire

Remarque :

Contrairement à la représentation angle et axe, une rotation de $-\theta$ autour de $-\mathbf{r}$ donne le même quaternion que celui associé à une rotation de θ autour de $\mathbf{r}$

- Matrice de rotation qui correspond à un quaternion unitaire $\mathcal{Q} = \{\eta,\, \boldsymbol{\epsilon}\}$ donné :

$$\mathbf{R}(\eta,\, \boldsymbol{\epsilon}) \;=\; \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_x^2) - 1 & 2(\epsilon_x \epsilon_y - \eta\epsilon_z) & 2(\epsilon_x \epsilon_z + \eta\epsilon_y) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_y + \eta\epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_y^2) - 1 & 2(\epsilon_y \epsilon_z - \eta\epsilon_x) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_z - \eta\epsilon_y) & 2(\epsilon_y \epsilon_z + \eta\epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_z^2) - 1 \end{bmatrix}$$

- Les quaternions $\mathcal{Q}$ et $-\mathcal{Q}$ décrivent la *même* matrice de rotation (les quaternions fournissent un double recouvrement du groupe $\mathrm{SO}(3)$).

    En dehors de cette ambiguité, les quatre paramètres d'un quaternion décrivent une rotation unique

Quaternion unitaire

Problème inverse : déterminer le quaternion qui correspond à une matrice de rotation $\mathbf{R}$ donnée :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Nous avons que :

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix}$$

où la fonction *signe* est définie comme suit :

$$\operatorname{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Quaternion unitaire

Remarque :

• Dans la première équation de la slide précédente nous avons supposé implicitement que $\eta = \cos(\theta/2) \geq 0.$ Cela correspond à un angle $\theta \in [-\pi,\, \pi].$ Par conséquent, *toute rotation peut être décrite*

• Par rapport aux formules d'inversion de la représentation angle et axe, il n'y a *pas de singularités* dans les deux équations de la slide précédente

Inverse d'un quaternion et produit de deux quaternions

• Le quaternion extrait de la matrice $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ est noté $\mathcal{Q}^{-1}$ et on peut le calculer ainsi :

$$\mathcal{Q}^{-1} = \{\eta,\, -\boldsymbol{\epsilon}\}$$

• Soient $\mathcal{Q}_1 = \{\eta_1,\, \boldsymbol{\epsilon}_1\}$ et $\mathcal{Q}_2 = \{\eta_2,\, \boldsymbol{\epsilon}_2\}$ les quaternions qui correspondent aux matrices de rotation $\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{R}_2$, respectivement. Le quaternion qui correspond à leur *produit* $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ est donné par :

$$\mathcal{Q}_1 * \mathcal{Q}_2 = \{\eta_1\eta_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1^T\boldsymbol{\epsilon}_2,\; \eta_1\boldsymbol{\epsilon}_2 + \eta_2\boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2\}$$

Si $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1^{-1}$, la formule précédente nous donne $\{1,\, \mathbf{0}\}$, l'*élément neutre* (ou identité) du produit. Comme le produit matriciel, le produit de quaternions n'est pas commutatif, à savoir $\mathcal{Q}_1 * \mathcal{Q}_2 \neq \mathcal{Q}_2 * \mathcal{Q}_1$

Représentations de l'orientation

Sommaire des propriétés des 4 représentations de l'orientation d'un corps rigide dans l'espace 3D

Représentation	**Matrice de rotation**	**Angles d'Euler (ZYZ, ZYX, etc.)**	**Angle et axe**	**Quaternion unitaire**
Globale	Oui	Non	Non	Oui
Unique	Oui	Non	Non	Non
Minimale	Non	Oui	Non	Non

Remarque :
Une représentation de l'orientation est dite *globale*,
s'il n'y a pas de singularités dans le problème inverse