

## TD 3 : Modèle cinématique direct et inverse

### Exercice 1 : Propriétés du produit vectoriel

Soient  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et soit  $\mathbf{S}(\mathbf{a})$  la matrice antisymétrique associée au vecteur  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$  telle que :

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérifier les propriétés suivantes du produit vectoriel, noté " $\times$ " :

- $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$  [Multiplication par un scalaire]
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{S}(\mathbf{b})\mathbf{a}$  [Anticommutativité]
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$  [Distributivité]
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$  [Identité de Jacobi]
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{d} = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{d}) + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}$  [Somme de produits vectoriels]
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$  où  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  est le produit scalaire de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$
- $\mathbf{S}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{S}(\mathbf{b}) - \mathbf{S}(\mathbf{b})\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T$
- $\mathbf{S}((\mathbf{M}\mathbf{a}) \times (\mathbf{M}\mathbf{b})) = \mathbf{M}\mathbf{S}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{M}^T$  où  $\mathbf{M}$  est une matrice  $3 \times 3$  quelconque
- $(\mathbf{M}\mathbf{a}) \times (\mathbf{M}\mathbf{b}) = \det(\mathbf{M})(\mathbf{M}^{-1})^T(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  où  $\mathbf{M}$  est une matrice  $3 \times 3$  inversible.

**Remarque** : Le produit vectoriel n'est pas associatif, mais il satisfait l'identité de Jacobi.

### Exercice 2 : Calcul du jacobien géométrique

Calculer le jacobien géométrique  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  des manipulateurs suivants :

- Manipulateur SCARA à 4 DDL
- Manipulateur cylindrique
- Poignet de type rotule
- Manipulateur planaire RRP
- Manipulateur anthropomorphe avec poignet de type rotule
- Manipulateur DLR.

### Exercice 3 : Étude des singularités cinématiques

Vérifier que les valeurs des variables articulaires suivantes correspondent à des singularités cinématiques pour les trois manipulateurs suivants (*conseil* : étudier le rang du jacobien géométrique  $\mathbf{J}$ ) :

- $\theta_2 \in \{0, \pi\}$ , pour le manipulateur SCARA à 4 DDL
- $\theta_5 = 0$  (à savoir, les axes  $z_3$  et  $z_5$  sont alignés), pour le poignet de type rotule
- $\theta_3 \in \{0, \pi\}$  et  $\{\theta_2, \theta_3 : a_2 \cos\theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = 0\}$ , pour le manipulateur anthropomorphe.

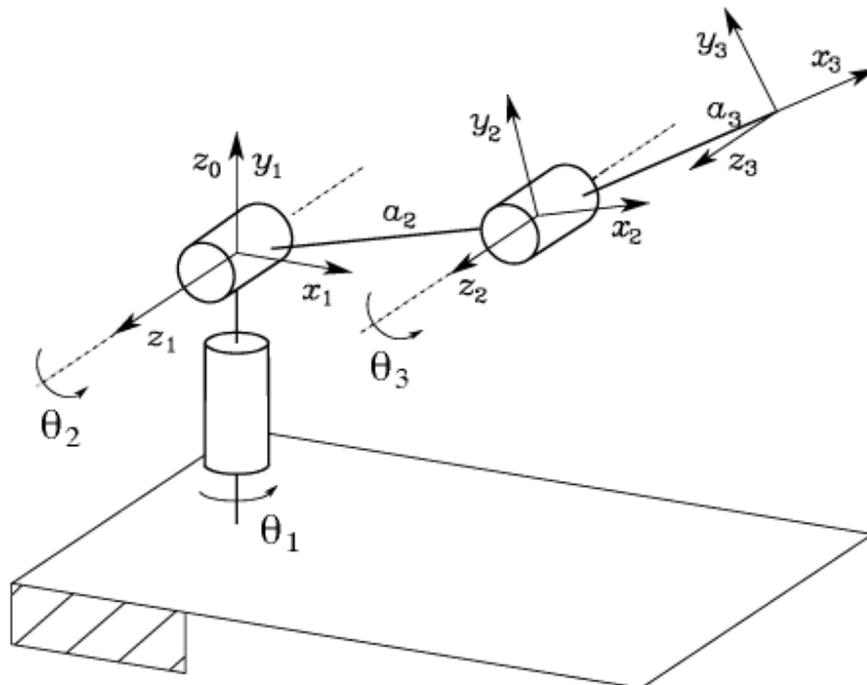
Dessiner chaque robot dans les configurations singulières.

**Exercice 4 : Modèle cinématique inverse**

La vitesse linéaire de l'effecteur d'un manipulateur anthropomorphe (voir la Figure 1) est :

$$\dot{\mathbf{p}}_e = [10, 5, 1]^T \text{ cm/s}$$

- Déterminer le vecteur des vitesses articulaires du manipulateur, si  $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T = [0, \pi/4, \pi/4]^T$ . Préciser si nous sommes face à un cas régulier, redondant ou singulier d'inversion cinématique
- Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée le vecteur  $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$  et la vitesse linéaire de l'effecteur, et qui renvoie le vecteur des vitesses articulaires du manipulateur.



**Figure 1 :** Manipulateur anthropomorphe.