

# Étude des Singularités et Modèle Cinématique Inverse du Manipulateur Anthropomorphe

Robotique Industrielle, M1 3EA (RoVA) – TD 3, Exercice 3 et 4

F. Morbidi – Avril 2019

## Exercice:

1. Étudier les singularités cinématiques du manipulateur anthropomorphe montré dans la Fig. 1. Préciser de quel type de singularité s'agit-il et dessiner le robot dans la configuration correspondante.

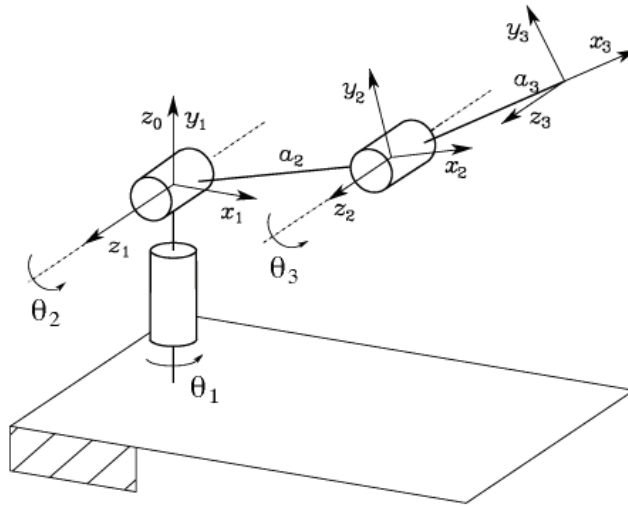


Figure 1: Manipulateur anthropomorphe.

2. En sachant que la vitesse linéaire de l'effecteur du manipulateur est  $\dot{\mathbf{p}}_e = [10, 5, 1]^T$  cm/s, déterminer le vecteur des vitesses articulaires du manipulateur, si  $\mathbf{q} = [0, \pi/4, \pi/4]^T$ . Préciser si nous sommes face à un cas régulier, redondant ou singulier d'inversion cinématique.

## Solution:

1. Nous avons déjà calculé le modèle géométrique et cinématique direct du manipulateur anthropomorphe en cours. Nous avons vu que le jacobien géométrique du robot est,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec  $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ . Pour étudier les singularités cinématiques du manipulateur, il suffit de considérer la sous-matrice  $\mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  du jacobien  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  (en effet, seulement trois

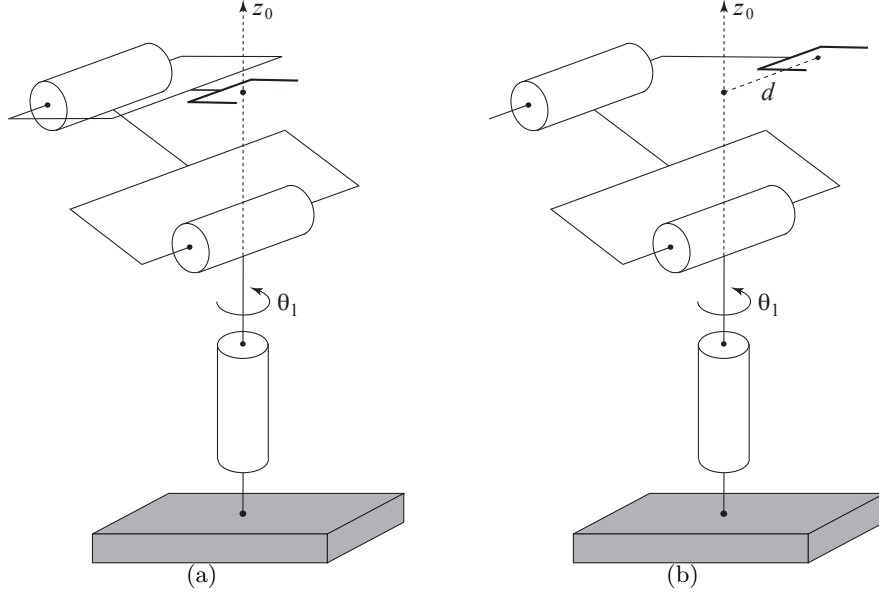


Figure 2: (a) Configuration singulière du manipulateur anthropomorphe; (b) Manipulateur anthropomorphe avec épaule décalée de  $d$  par rapport à l'axe  $z_0$ .

lignes de  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  sont linéairement indépendantes et le robot a 3 DDL),

$$\mathbf{J}_P(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons utiliser la règle de Sarrus pour calculer le déterminant de  $\mathbf{J}_P(\mathbf{q})$ , et le résultat est le suivant,

$$\det(\mathbf{J}_P(\mathbf{q})) = -a_2a_3 \sin \theta_3 (a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)).$$

On peut constater que le déterminant dépend de  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , mais pas de la variable articulaire  $\theta_1$  (cf. le manipulateur planaire à deux segments vu en cours). Nous avons que  $\det(\mathbf{J}_P(\mathbf{q})) = 0$ , si:

- (I)  $\sin \theta_3 = 0$ , c'est-à-dire si  $\theta_3 \in \{0, \pi\}$ ,
- (II)  $a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = 0$ .

En conclusion, les singularités cinématiques du manipulateur anthropomorphe sont tous les vecteurs  $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$  tels que:

- $\theta_1, \theta_2$  quelconques et  $\theta_3 \in \{0, \pi\}$ ,
- $\theta_1$  quelconque et  $\{\theta_2, \theta_3 : a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = 0\}$ .

Du point de vue géométrique, le cas (I) avec  $\theta_3 = 0$ , correspond au bras du manipulateur complètement étendu, et le cas (I) avec  $\theta_3 = \pi$ , correspond au bras du manipulateur complètement rétracté (il s'agit dans les deux cas de singularités de **type 1**). Le cas (II) a une interprétation géométrique un peu plus complexe. En fait, cette configuration se

produit lorsque le centre de l'effecteur (la pince) croise l'axe  $z_0$  de la première articulation du robot (pointillé dans la Figure 2(a)). Il faut noter que nous sommes ici en présence d'un nombre infini de singularités (de **type 2**), et que le problème géométrique inverse admet un nombre infini de solutions. Pour résoudre ce problème d'un point de vue mécanique, on peut décaler l'épaule du robot d'une quantité  $d > 0$  afin d'éviter que le centre de l'effecteur croise l'axe  $z_0$  (voir la Figure 2(b)).

2. L'équation de la cinématique du manipulateur est,

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}.$$

On en déduit que:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}.$$

Si on évalue  $\mathbf{J}_P(\mathbf{q})$  sur le point  $\mathbf{q} = [0, \pi/4, \pi/4]^T$ , on trouve que,

$$\mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/4 \\ \pi/4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2\sqrt{2}}{2} - a_3 & -a_3 \\ \frac{a_2\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice  $3 \times 3$  est  $-\frac{1}{2}a_2^2a_3 \neq 0$ , donc elle est inversible (en fait,  $a_2, a_3 > 0$ ). Nous nous trouvons donc dans un cas *régulier* d'inversion cinématique, et nous pouvons calculer les vitesses angulaires des trois articulations du robot de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2\sqrt{2}}{2} - a_3 & -a_3 \\ \frac{a_2\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \dot{\mathbf{p}}_e \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{a_2} \\ -\frac{1}{a_3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{a_2} - \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ 0.01 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{20} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{a_2} \\ \frac{\sqrt{2}}{5a_2} \\ -\frac{1}{5} \left( \frac{11}{a_3} + \frac{\sqrt{2}}{a_2} \right) \end{bmatrix} \text{ rad/s.} \end{aligned}$$

Il est à noter que nous avons fait la conversion  $\text{cm/s} \rightarrow \text{m/s}$  dans le vecteur  $\dot{\mathbf{p}}_e$ , car les longueurs  $a_2, a_3$  des segments sont exprimées en mètres. Par exemple, si on choisit  $a_2 = a_3 = 0.5 \text{ m}$  et on fait la conversion  $\text{rad/s} \rightarrow \text{deg/s}$ , nous trouvons la solution,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= 8.1028 \text{ deg/s}, \\ \dot{\theta}_2 &= 1.6206 \text{ deg/s}, \\ \dot{\theta}_3 &= -14.2256 \text{ deg/s}. \end{aligned}$$