

Modèle Cinématique Direct du Manipulateur Sphérique

Robotique Industrielle, M1 3EA (RoVA)

F. Morbidi – Avril 2019

Exercice:

1. Déterminer le jacobien géométrique $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ du manipulateur sphérique montré dans la Figure 1 ci-dessous.

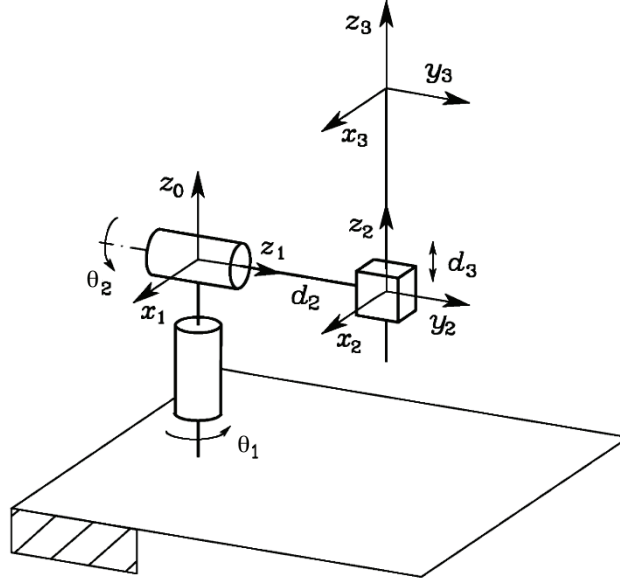


Figure 1: Manipulateur sphérique.

2. Identifier les singularités cinématiques du manipulateur en étudiant le rang de la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{q})$. Préciser de quel type de singularité s'agit-il et dessiner le robot dans la configuration correspondante.

Solution:

1. Nous avons vu le modèle géométrique direct du manipulateur sphérique en cours. On rappelle que,

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(\theta_1)\mathbf{A}_2^1(\theta_2)\mathbf{A}_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 \\ -s_2 & 0 & c_2 & d_3 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

avec $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3]^T$. Le robot possède 2 articulations rotoïdes et 1 articulation prismatique, donc le jacobien géométrique sera une matrice 6×3 avec la structure suivante,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_1} & \mathbf{J}_{P_2} & \mathbf{J}_{P_3} \\ \mathbf{J}_{O_1} & \mathbf{J}_{O_2} & \mathbf{J}_{O_3} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Grâce à la formule,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_i} \\ \mathbf{J}_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est prismatique,} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est rotoïde,} \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

nous pouvons récrire (2) comme suit,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}.$$

Il nous reste maintenant à calculer les vecteurs \mathbf{z}_0 , \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 et les vecteurs \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_3 . Nous avons que:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} d_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - d_2 \sin \theta_1 \\ d_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + d_2 \cos \theta_1 \\ d_3 \cos \theta_2 \end{bmatrix},$$

où \mathbf{p}_1 est donné par les 3 premiers éléments de la 4^e colonne de la matrice \mathbf{A}_1^0 , et \mathbf{p}_3 est donné par les 3 premiers éléments de la 4^e colonne de la matrice \mathbf{T}_3^0 (en réalité, le calcul de \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_1 est immédiat, car les repères 0 et 1 ont la même origine de coordonnées (0, 0, 0), cf. la Figure 1). Le vecteur \mathbf{p}_3 recherché a été marqué en bleu dans l'équation (1).

Les trois vecteurs manquants sont,

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix},$$

où \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 sont donnés par la 3^e colonne des matrices de rotation \mathbf{R}_1^0 et \mathbf{R}_2^0 , respectivement. Cette dernière matrice n'a pas été déterminée auparavant, et nous devons la calculer explicitement pour trouver \mathbf{z}_2 (marqué en rouge):

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0(\theta_1) \mathbf{R}_2^1(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_1 & \textcolor{red}{\cos \theta_1 \sin \theta_2} \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 & \textcolor{red}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \\ -\sin \theta_2 & 0 & \textcolor{red}{\cos \theta_2} \end{bmatrix}.$$

Si on réunit toutes les pièces ensemble, nous avons que,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 \\ d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 \\ d_3 c_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 \\ d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 \\ d_3 c_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Après avoir calculé les trois produits vectoriels, on obtient enfin,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -d_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - d_2 \cos \theta_1 & d_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ d_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - d_2 \sin \theta_1 & d_3 \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & -d_3 \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

2. Pour déterminer les singularités cinématiques du manipulateur sphérique, on peut se restreindre à la sous-matrice $\mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ du jacobien $\mathbf{J}(\mathbf{q})$,

$$\mathbf{J}_P(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -d_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - d_2 \cos \theta_1 & d_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ d_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - d_2 \sin \theta_1 & d_3 \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & -d_3 \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice 3×3 peut être calculé, par exemple, avec la règle de Sarrus,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}_P(\mathbf{q})) &= d_3 s_1 c_2^2 (-d_3 s_1 s_2 - d_2 c_1) - d_3 c_1 s_2^2 (d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1) \\ &\quad + d_3 s_1 s_2^2 (-d_3 s_1 s_2 - d_2 c_1) - d_3 c_1 c_2^2 (d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1) \\ &= -d_3^2 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

Nous avons que $\det(\mathbf{J}_P(\mathbf{q})) = 0$, si:

- (a) $\theta_2 = 0$,
- (b) $\theta_2 = \pi$,
- (c) $d_3 = 0$.

En conclusion, les singularités cinématiques du manipulateur sphérique sont tous les vecteurs $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3]^T$ tels que:

- θ_1 quelconque, $\theta_2 \in \{0, \pi\}$ et $d_3 > 0$,
- θ_1 quelconque, $\theta_2 \notin \{0, \pi\}$ et $d_3 = 0$.

Du point de vue géométrique, le cas (a) correspond au manipulateur ayant les axes z_0 et z_2 parallèles et l'effectuer qui pointe vers le haut; vice-versa, le cas (b) correspond au manipulateur ayant les axes z_0 et z_2 parallèles et l'effectuer qui pointe vers le bas. Dans les deux cas, il s'agit de singularités de **type 2**. Enfin, le cas (c) correspond au cas limite (physiquement inadmissible) où les repères 2 et 3 coïncident: il s'agit cette fois-ci d'une singularité de **type 1**.