

# Modèle Géométrique Direct du Manipulateur SCARA à 4 DDL

Robotique Industrielle, M1 3EA (RoVA)

F. Morbidi – Mars 2019

## Exercice :

1. Positionner les repères et déterminer les paramètres de Denavit-Hartenberg du manipulateur SCARA (“*Selective Compliance Assembly Robot Arm*”) à 4 DDL montré dans la Figure 1 ci-dessous.

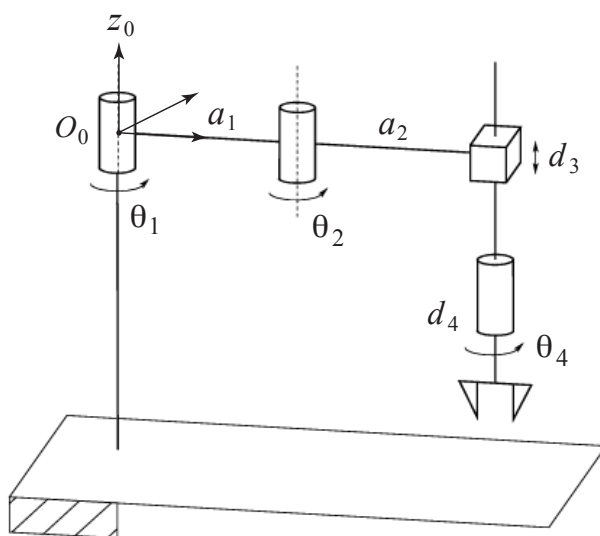


FIGURE 1 – Manipulateur SCARA à 4 DDL.

2. Calculer le modèle géométrique direct du manipulateur.
3. Les coordonnées d'un point  $P$  dans le repère 0 de la base du manipulateur, sont  $\mathbf{p}^0 = [1, 0, 0]^T$ . Déterminer les coordonnées du même point dans le référentiel de l'effecteur.

## Solution :

1. La Figure 2 montre les 5 repères du manipulateur SCARA (en rouge), positionnés en suivant la convention de Denavit-Hartenberg. Les axes du repère “0” étant déjà fixés, nous nous sommes limités à spécifier l'axe  $x_0$  et l'axe  $y_0$  en utilisant la règle de la main droite.
2. Le manipulateur SCARA à 4 DDL est un robot de type RRPR et le vecteur des variables articulaires est  $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4]^T$ . Les paramètres de Denavit-Hartenberg du robot sont présentés dans le Tableau 1 (*Attention* : l'astérisque dans le symbole  $d_4^*$  indique que la distance  $d_4$  est constante et qu'elle n'est pas une variable articulaire comme  $\theta_1, \theta_2, d_3$  et  $\theta_4$ ). Une fois déterminés les paramètres de Denavit-Hartenberg, on peut passer au calcul du modèle géométrique direct du manipulateur. Au total, nous devons calculer quatre matrices de transformation, car le robot a quatre articulations :  $\mathbf{A}_1^0(\theta_1)$ ,  $\mathbf{A}_2^1(\theta_2)$ ,  $\mathbf{A}_3^2(d_3)$  et  $\mathbf{A}_4^3(\theta_4)$ . La première matrice,  $\mathbf{A}_1^0(\theta_1)$ , correspond à la première ligne du tableau des paramètres de Denavit-Hartenberg et elle est donnée par,

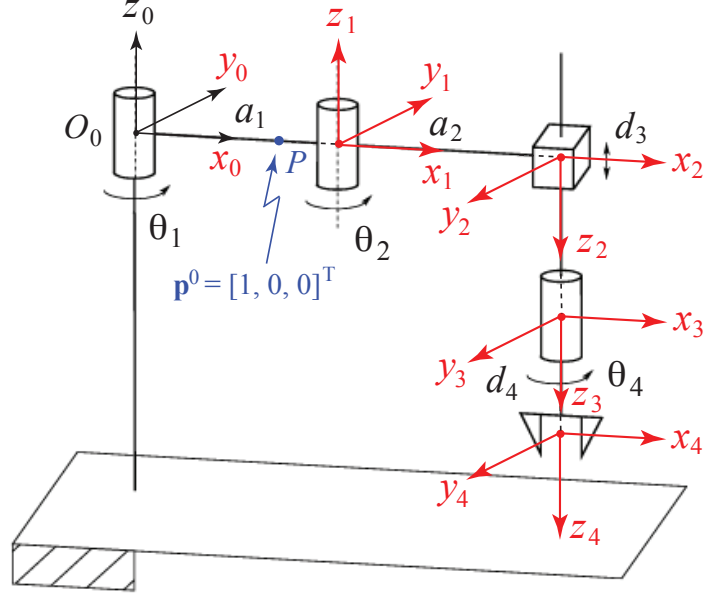


FIGURE 2 – Repères (rouges) positionnés sur le manipulateur SCARA.

$$\mathbf{A}_1^0(\theta_1) = \left[ \begin{array}{c|cc} \mathbf{R}_z(\theta_1) & a_1 \cos \theta_1 & a_1 \sin \theta_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où  $\mathbf{R}_z(\theta_1)$  dénote la matrice de rotation élémentaire d'un angle  $\theta_1$  autour de l'axe  $z$ . Il est à noter que la matrice  $\mathbf{A}_1^0(\theta_1)$  dépend uniquement de la variable  $\theta_1$  (la distance  $a_1$  est un paramètre constant). La deuxième transformation, la transformation rigide entre le repère 2 et le repère 1, a la forme suivante,

$$\mathbf{A}_2^1(\theta_2) = \left[ \begin{array}{c|cc} \mathbf{R}_z(\theta_2)\mathbf{R}_x(\pi) & a_2 \cos \theta_2 & a_2 \sin \theta_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où  $\mathbf{R}_x(\pi)$  dénote la matrice de rotation élémentaire d'un angle  $\pi$  autour de l'axe  $x$ . La troisième transformation rigide est assez simple, car entre le repère 3 et le repère 2,

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$a_1$	0	0	$\theta_1$
2	$a_2$	$\pi$	0	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0
4	0	0	$d_4^*$	$\theta_4$

TABLE 1 – Paramètres de Denavit-Hartenberg du manipulateur SCARA.

il existe uniquement une translation le long de l'axe  $z$  d'une longueur  $d_3$ . La transformation  $\mathbf{A}_3^2(d_3)$  est donc,

$$\mathbf{A}_3^2(d_3) = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathbf{I}_3 & & 0 \\ \hline & & & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, la dernière transformation  $\mathbf{A}_4^3(\theta_4)$  entre le repère 4 et le repère 3 est,

$$\mathbf{A}_4^3(\theta_4) = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathbf{R}_z(\theta_4) & & 0 \\ \hline & & & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

où  $d_4$  est la distance entre l'origine du repère 3 et l'origine du repère 4.

En conclusion, le modèle géométrique direct du manipulateur, c'est-à-dire la matrice de transformation homogène  $\mathbf{T}_4^0(\mathbf{q})$  entre le repère 4 et le repère 0, est,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_4^0(\mathbf{q}) &= \mathbf{A}_1^0(\theta_1) \mathbf{A}_2^1(\theta_2) \mathbf{A}_3^2(d_3) \mathbf{A}_4^3(\theta_4) \\ &= \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -(d_3 + d_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

où nous avons utilisé les abréviations,  $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$  et  $s_4 = \sin \theta_4$ . Il est à noter que pour écrire la matrice (1), nous avons fait recours aux deux identités trigonométriques suivantes :  $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$  et  $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$ .

Il faut noter que le repère 4 ne respecte pas la convention du repère d'une pince. En effet, l'axe  $z_4$  est dans la direction de rapprochement de l'objet à saisir, mais l'axe orthogonal à  $z_4$  dans le plan de glissement des becs de la pince est  $x_4$  et pas  $y_4$ . Pour corriger cela, il faut multiplier à droite la matrice  $\mathbf{T}_4^0(\mathbf{q})$  par la matrice de transformation *constante*,

$$\mathbf{T}_e^4 = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathbf{R}_z(-\pi/2) & & 0 \\ \hline & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, nous obtenons la transformation rigide 'complète' entre le repère "e" de l'effecteur et le repère 0,

$$\mathbf{T}_e^0(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_4^0(\mathbf{q}) \mathbf{T}_e^4.$$

Pour plus de simplicité, nous omettons par la suite la transformation  $\mathbf{T}_e^4$  et nous ferons l'hypothèse que le repère 4 coïncide avec le repère de la pince.

3. Nous savons que les coordonnées du point  $P$  dans le repère 0 de la base du manipulateur (point bleu en Figure 1), sont  $\mathbf{p}^0 = [1, 0, 0]^T$ . Grâce à la matrice de transformation  $\mathbf{T}_4^0(\mathbf{q})$  calculée au point précédent, nous pouvons écrire la relation suivante entre les coordonnées du point  $P$  dans le repère 4 et les les coordonnées du point  $P$  dans le repère 0 :

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{T}_4^0(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{p}}^4, \quad (2)$$

où  $\tilde{\mathbf{p}}^0 = [(\mathbf{p}^0)^T, 1]^T = [1, 0, 0, 1]^T$  est la représentation du vecteur  $\mathbf{p}^0$  en coordonnées homogènes. Pour déterminer le vecteur  $\tilde{\mathbf{p}}^4$  nous devons donc inverser l'équation (2), c'est-à-dire calculer,

$$\tilde{\mathbf{p}}^4 = (\mathbf{T}_4^0(\mathbf{q}))^{-1} \tilde{\mathbf{p}}^0.$$

Dans le Chapitre 2 du cours, nous avons vu que l'inverse de la matrice homogène,

$$\mathbf{T}_4^0 = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_4^0 & \mathbf{o}_4^0 \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right],$$

peut être calculée à l'aide de la formule suivante,

$$(\mathbf{T}_4^0)^{-1} = \mathbf{T}_0^4 = \left[ \begin{array}{c|c} (\mathbf{R}_4^0)^T & -(\mathbf{R}_4^0)^T \mathbf{o}_4^0 \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_0^4 & -\mathbf{R}_0^4 \mathbf{o}_4^0 \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right].$$

(*Attention* : les matrices homogènes ne sont pas des matrices orthogonales comme les matrices de rotation, donc  $(\mathbf{T}_4^0)^{-1} \neq (\mathbf{T}_4^0)^T$ , en général). Dans notre cas, nous avons que (cf. l'équation (1)),

$$\mathbf{R}_4^0 = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}_4^0 = \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} \\ -(d_3 + d_4) \end{bmatrix},$$

et donc,

$$(\mathbf{R}_4^0)^T = \mathbf{R}_0^4 = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & 0 \\ -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Après un simple calcul, nous trouvons enfin que les coordonnées homogènes du point  $P$  dans le repère 4 sont,

$$\tilde{\mathbf{p}}^4 = (\mathbf{T}_4^0(\mathbf{q}))^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_{12}c_4 + s_{12}s_4)(1 - a_1c_1 - a_2c_{12}) - (a_1s_1 + a_2s_{12})(s_{12}c_4 - c_{12}s_4) \\ (-c_{12}s_4 + s_{12}c_4)(1 - a_1c_1 - a_2c_{12}) + (a_1s_1 + a_2s_{12})(s_{12}s_4 + c_{12}c_4) \\ -(d_3 + d_4) \\ 1 \end{bmatrix},$$

par conséquent,

$$\mathbf{p}^4 = \begin{bmatrix} (c_{12}c_4 + s_{12}s_4)(1 - a_1c_1 - a_2c_{12}) - (a_1s_1 + a_2s_{12})(s_{12}c_4 - c_{12}s_4) \\ (-c_{12}s_4 + s_{12}c_4)(1 - a_1c_1 - a_2c_{12}) + (a_1s_1 + a_2s_{12})(s_{12}s_4 + c_{12}c_4) \\ -(d_3 + d_4) \end{bmatrix}.$$