Robotique Industrielle

UPJV, Département EEA

M1 3EA, Parcours RoVA, EC15

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

Lundi 13h30-16h30 (CM ou TD, salle CURI 304)
(TP, salle TP204)

Année Universitaire 2024-2025

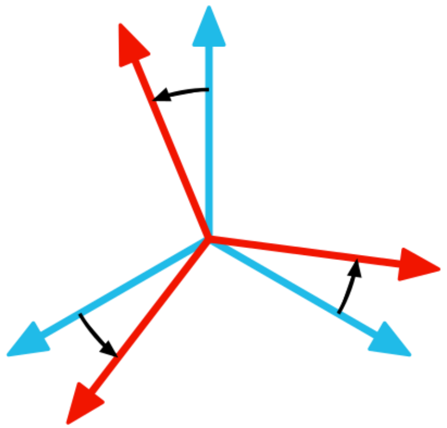
UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d’une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d’un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



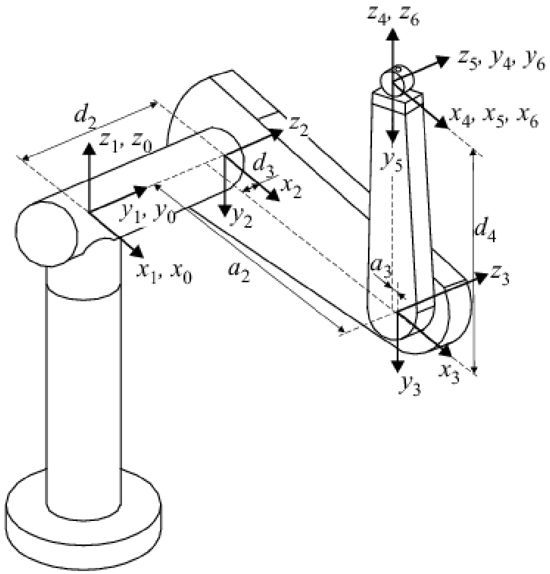
Chapitre 3 : Modélisation d’un Robot

3.1 Modèle géométrique

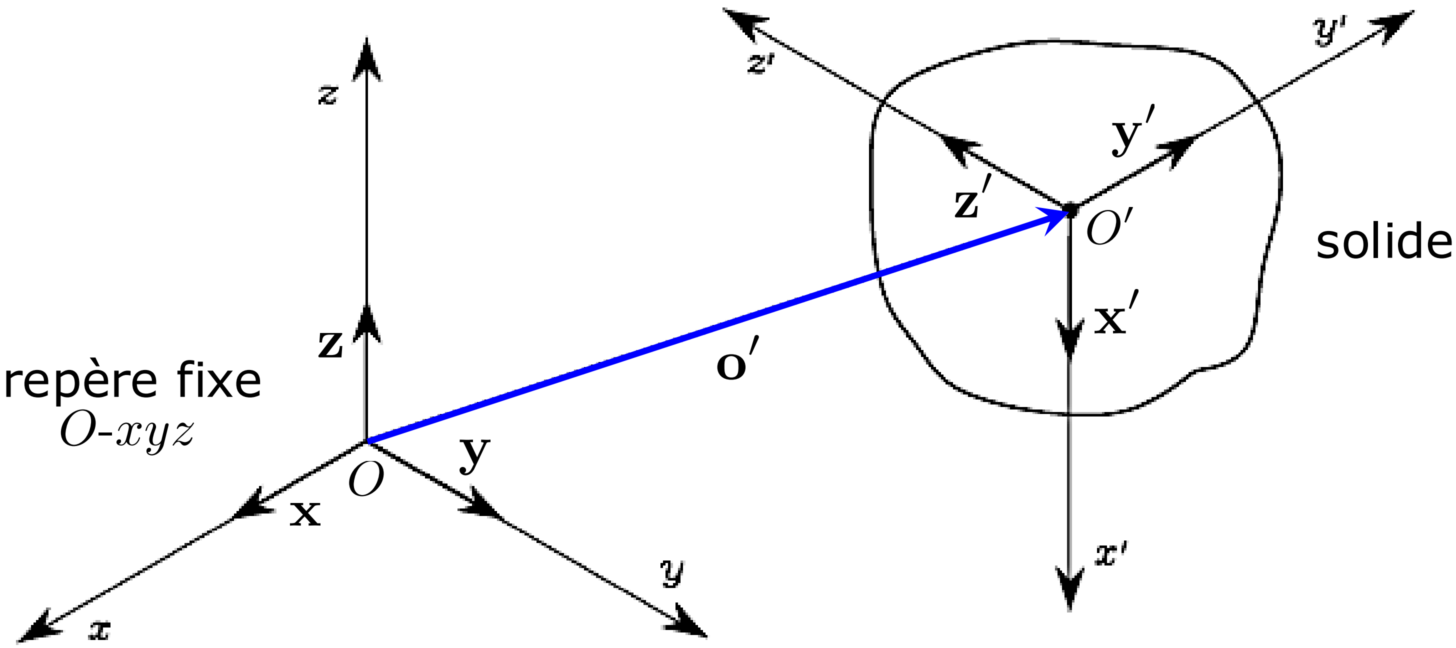
- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



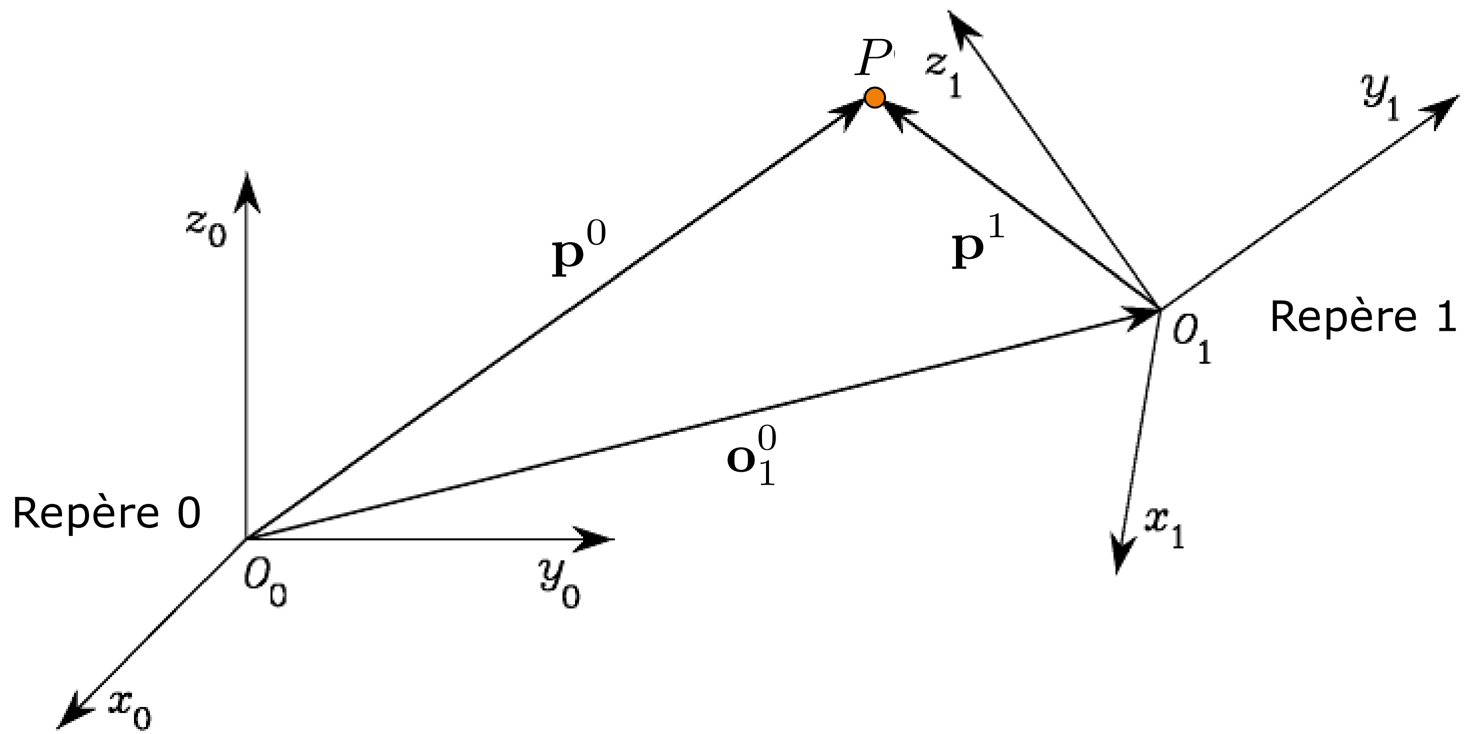
Introduction



Pour décrire la **pose** d'un solide dans l'espace 3D, on a besoin de connaître :

- [*Translation*] Position d'un point sur le solide (O') par rapport au repère fixe
- [*Rotation*] Composantes des vecteurs unitaires du repère attaché au solide avec origine O', par rapport au repère fixe

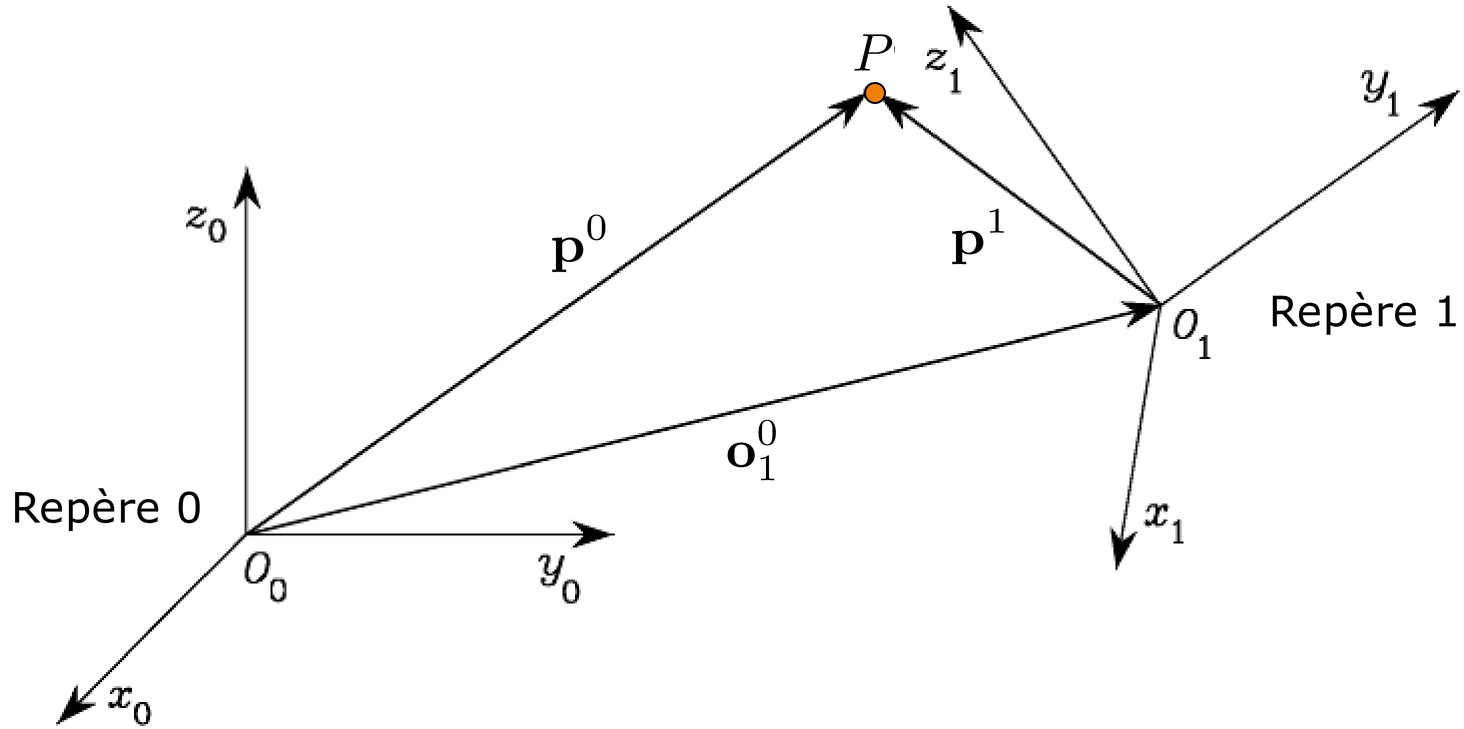
Introduction



Soit:

- P : point générique dans l'espace 3D
- $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$: coordonnées du point P par rapport au repère 0 et 1, respectivement
- $\mathbf{o}_1^0$: vecteur qui décrit l'origine du repère 1 par rapport au repère 0
- $\mathbf{R}_1^0$: matrice de rotation du repère 1 par rapport au repère 0

Introduction



On peut écrire la position du point P par rapport au repère 0, comme :

$$\boxed{\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0\,\mathbf{p}^1}$$

Transformation de coordonnées d'un vecteur entre le repère 1 et le repère 0

Remarque : Ce type de transformation conserve les distances.
On dit qu'elle est une *transformation rigide*

Coordonnées homogènes

• La présence, au même temps, de *produits* et de *sommes* dans l'équation

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

est peu pratique pour effectuer des calculs systématiques, dûs par exemple à des changements successifs de repère. On lui préfère une représentation matricielle, basée sur les **coordonnées homogènes**

• La représentation en coordonnées homogènes consiste à doter toute notation vectorielle d'un *facteur d'échelle*, en introduisant une coordonnée supplémentaire

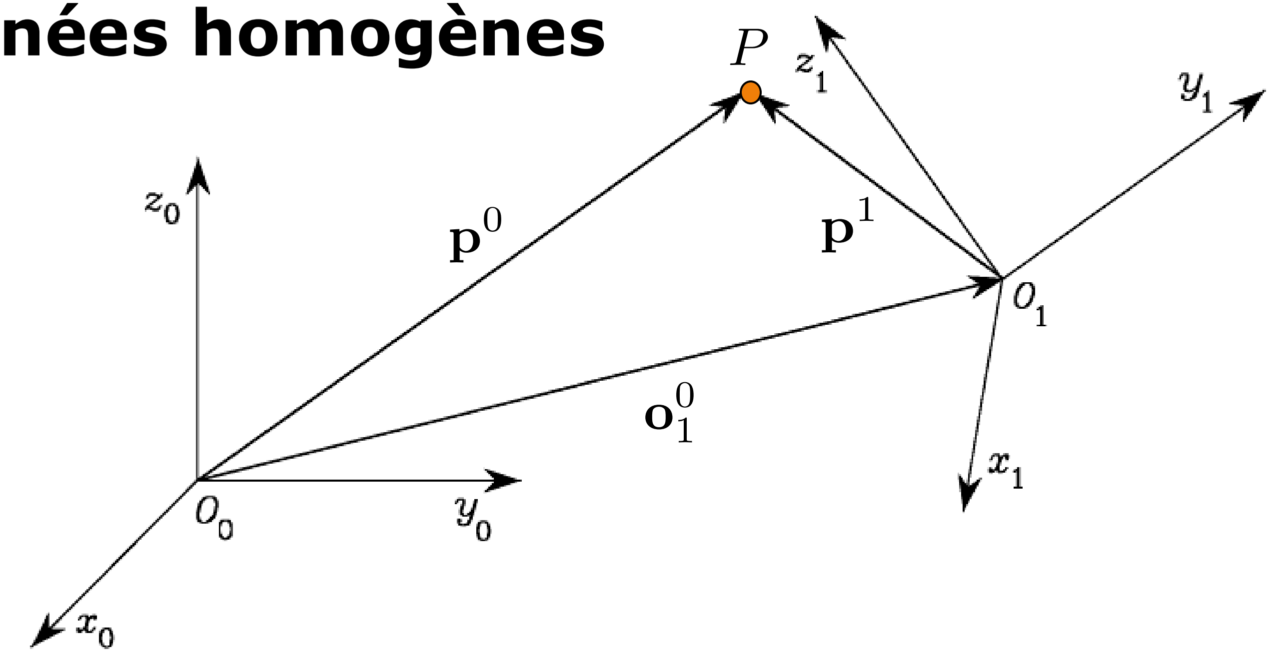
• Soit par exemple P un point dans l'espace 3D de coordonnées :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

• Alors la représentation du point P à l'aide de coordonnées homogènes est faite par :

$$\widetilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} wa \\ wb \\ wc \\ w \end{bmatrix} \text{ avec } w \neq 0$$

Coordonnées homogènes



• En pratique, on choisit un facteur d'échelle unitaire (à savoir, $w = 1$)

• Pour avoir une représentation compacte de la relation entre les coordonnées du même point P dans deux repères, on utilise donc la **représentation homogène** suivante :

$$\widetilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{p}$ “tilde”

On rajoute une 4e coordonnée de valeur égale à 1 au vecteur $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$

Matrices homogènes

- Si on utilise cette représentation pour les vecteurs $\mathbf{p}^0$ et $\mathbf{p}^1$, on peut écrire la transformation de coordonnées comme :

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \widetilde{\mathbf{p}}^1}$$

avec

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de transformation homogène (4 × 4)

- Comme $\mathbf{o}_1^0 \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{R}_1^0 \in \mathrm{SO}(3)$, la matrice $\mathbf{A}_1^0$ appartient au groupe spécial euclidien de dimension 3 :

$$\mathrm{SE}(3) \triangleq \{(\mathbf{R}, \mathbf{t}) : \mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3\}$$

- La **pose** du repère 1 par rapport au repère 0 est définie par le couple :

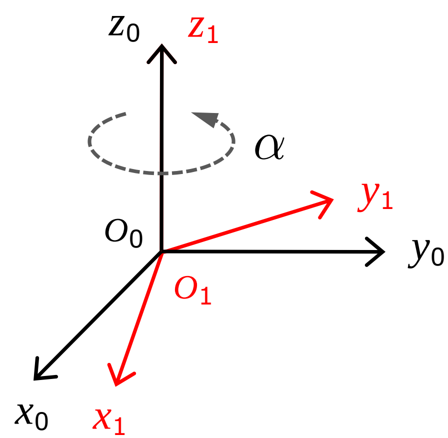
$$(\mathbf{o}_1^0, \mathbf{R}_1^0)$$

Nous avons *6 paramètres* au total : 3 définissant la *translation* et 3 définissant la *rotation* (par ex. les angles de roulis-tangage-lacet)

- Par la suite, on utilisera les lettres $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{T}$ pour indiquer une matrice homogène

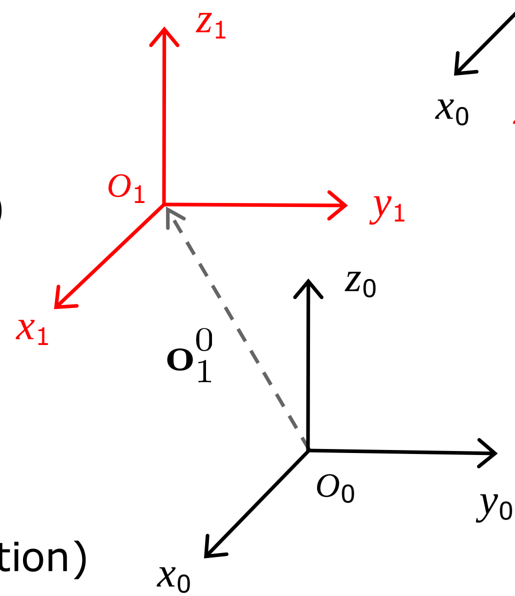
Matrices homogènes

Exemple 1 (Rotation pure autour de l'axe z)



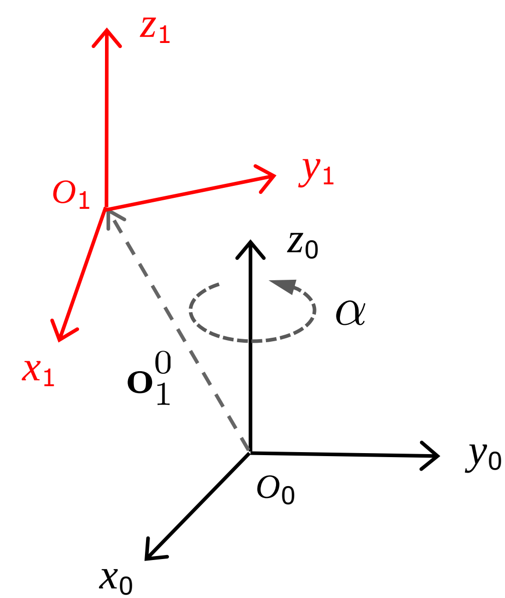
$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\alpha) & \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 (Translation simple)



$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 3 (Rotation et translation)



$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\alpha) & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices homogènes

• La transformation d'un vecteur du repère 1 au repère 0, est exprimée par une seule matrice qui contient la *matrice de rotation* du repère 1 par rapport au repère 0 et le *vecteur de translation* de l'origine du repère 0 à l'origine du repère 1 :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \, \widetilde{\mathbf{p}}^1$$

• La **transformation inverse** entre le repère 0 et le repère 1 est décrite par la matrice $\mathbf{A}_0^1$ qui vérifie l'equation :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{A}_0^1 \, \widetilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{A}_1^0)^{-1} \, \widetilde{\mathbf{p}}^0$$

• En utilisant les propriétés des matrices partitionnées*, on trouve que :

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_1^0)^T & -(\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \, \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

***Remarque :**

Si $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}, \ \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}$

où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \ \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont deux matrices inversibles

Matrices homogènes

Attention : les matrices homogènes ne satisfont pas la *propriété d'orthogonalité*. En conséquence, en general :

$$\boxed{\mathbf{A}^T \neq \mathbf{A}^{-1}}$$

En conclusion :

- Une matrice homogène permet d'exprimer la transformation de coordonnées entre deux repères génériques *sous forme compacte*
- Si les repères ont la *même origine,* la matrice homogène se réduit à la *matrice de rotation* (4 × 4) définie précédemment (cf. **Exemple 1**)
- Comme pour les matrices de rotation, on peut **composer** une séquence de transformations de coordonnées grâce au produit matriciel :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \cdots \mathbf{A}_n^{n-1} \widetilde{\mathbf{p}}^n$$

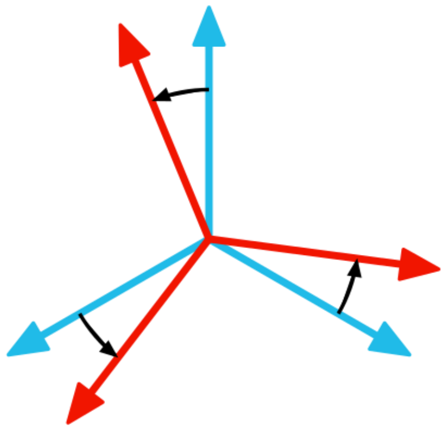
où $\mathbf{A}_i^{i-1}$ est la matrice de transformation qui met en relation la description d'un point dans le repère i avec la description du même point dans le repère $i-1$

Plan du cours

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



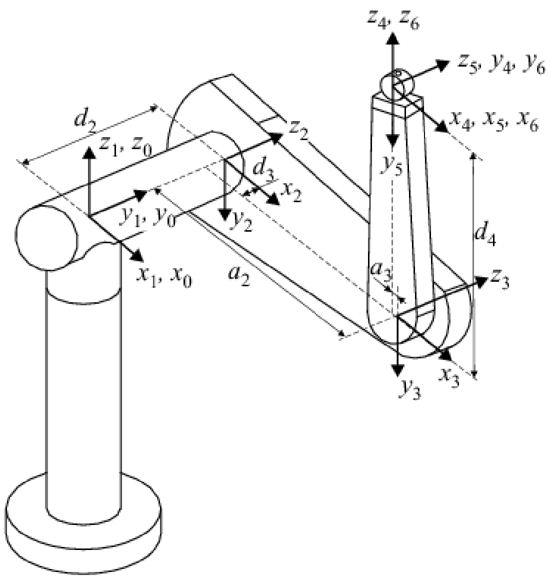
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



Cinématique

- Soit $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ une *matrice de rotation variable dans le temps*

- Grâce à la *propriété d'orthogonalité* de la matrice $\mathbf{R}(t)$, on a que :

$$\mathbf{R}(t)\,\mathbf{R}^T(t) \,=\, \mathbf{I}_3$$

- Si on calcule la derivée par rapport au temps, nous trouvons (rappel la règle du produit ou de Leibniz) :

$$\dot{\mathbf{R}}(t)\,\mathbf{R}^T(t) \,+\, \mathbf{R}(t)\,\dot{\mathbf{R}}^T(t) \,=\, \mathbf{0}_{3\times 3}$$

- Soit

$$\mathbf{S}(t) \,\triangleq\, \dot{\mathbf{R}}(t)\,\mathbf{R}^T(t)$$

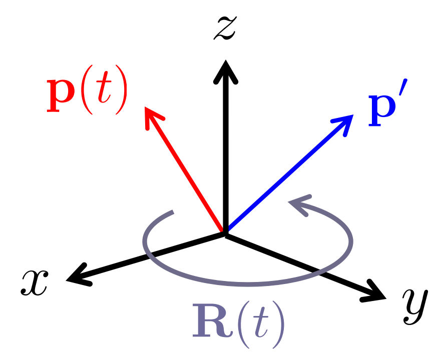
Elle est une *matrice antisymétrique.* En effet : $\mathbf{S}(t) \,+\, \mathbf{S}^T(t) \,=\, \mathbf{0}_{3\times 3}$

- Si on multiplie à droite chaque côté de l'équation précédente par $\mathbf{R}(t)$ on trouve que :

$$\dot{\mathbf{R}}(t) \,=\, \mathbf{S}(t)\,\mathbf{R}(t)$$

Ainsi on a pu écrire la derivée de la matrice de rotation en fonction de la matrice de rotation elle-même

Cinématique



Interprétation physique :

- Soit $\mathbf{p}'$ un *vecteur constant* et $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}(t)\,\mathbf{p}'$

- La derivée par rapport au temps de $\mathbf{p}(t)$ est :

$$\dot{\mathbf{p}}(t) \;=\; \dot{\mathbf{R}}(t)\,\mathbf{p}' \;=\; \mathbf{S}(t)\,\mathbf{R}(t)\,\mathbf{p}'$$

- Si le vecteur $\boldsymbol{\omega}(t)$ est la *vitesse angulaire* (ou *de rotation*) du repère $\mathbf{R}(t)$ par rapport au repère “fixe” au temps t, nous savons de la mécanique que :

$$\dot{\mathbf{p}}(t) \;=\; \boldsymbol{\omega}(t) \;\times\; \mathbf{R}(t)\mathbf{p}'$$

- Donc l’opérateur $\mathbf{S}(t)$ décrit le *produit vectoriel* entre le vecteur $\boldsymbol{\omega}(t)$ et le vecteur $\mathbf{R}(t)\mathbf{p}'$

- Les éléments de $\mathbf{S}(t)$ symétriques par rapport à la diagonale principale répresentent les composantes du vecteur

$$\boldsymbol{\omega} \;=\; [\omega_x,\, \omega_y,\, \omega_z]^T$$

Cinématique

c'est-à-dire :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

qui justifie l'expression :

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))$$

- On peut donc réécrire l'équation trouvée précédemment comme suit :

$$\boxed{\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}}$$

Cinématique

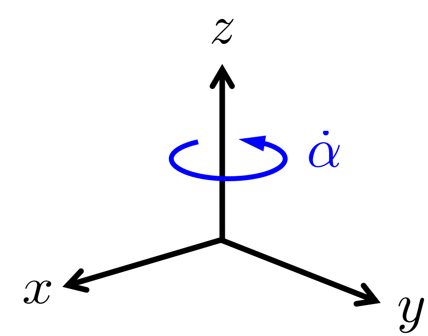
Exemple:

Considèrons la matrice de rotation élémentaire autour de l'axe z.
Si l'angle $\alpha = \alpha(t)$, on trouve que :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \dot{\mathbf{R}}_z(\alpha(t))\,\mathbf{R}_z^T(\alpha(t)) \\ &= \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}\sin\alpha & -\dot{\alpha}\cos\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}\cos\alpha & -\dot{\alpha}\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \end{aligned}$$

Donc, nous avons que :

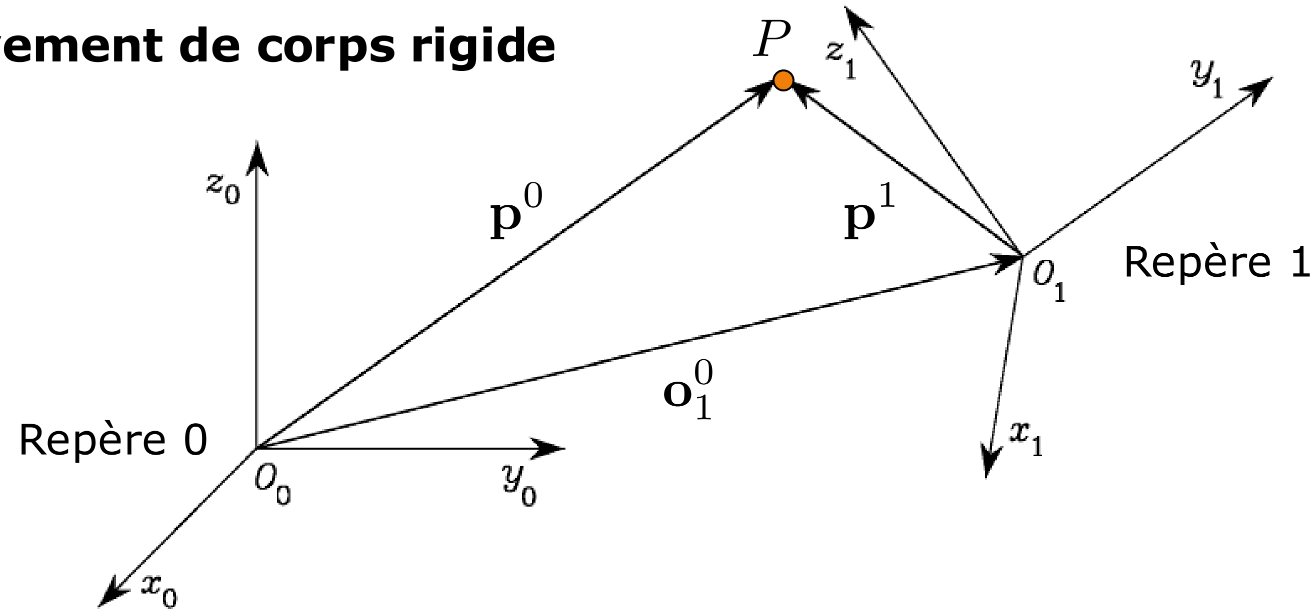
$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$



qui exprime la vitesse angulaire du repère autour de l'axe z

Cinématique

Mouvement de corps rigide



- La transformation de coordonnées d'un point P entre les repères 0 et 1 est :

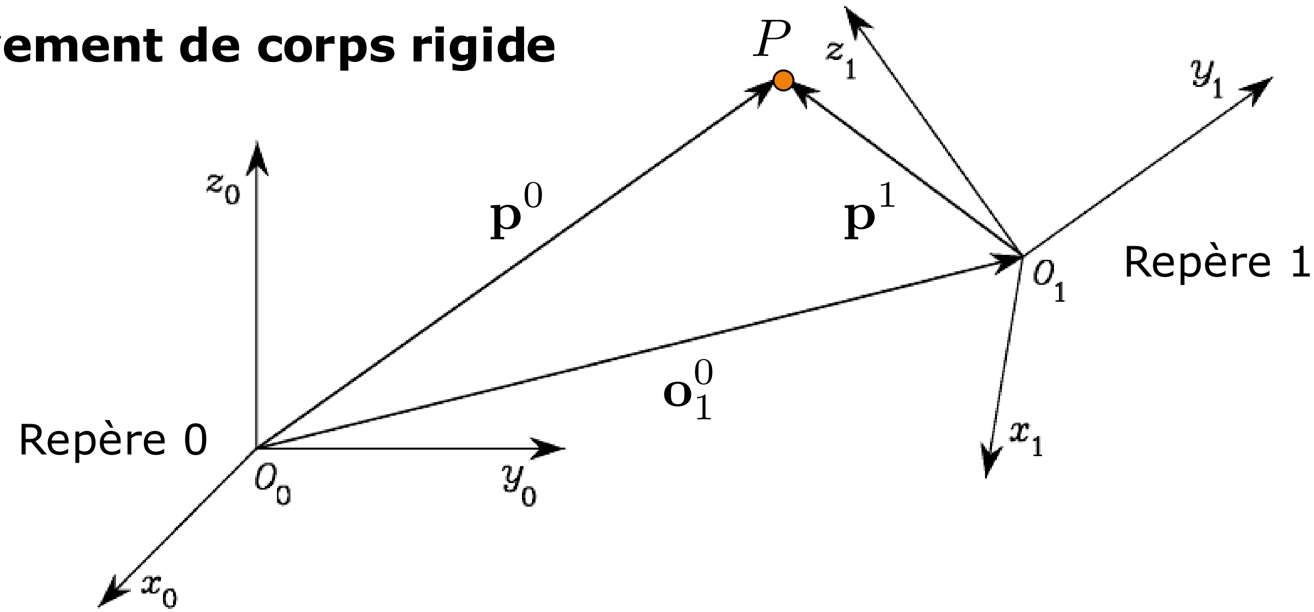
$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

- Si on calcule la dérivée par rapport au temps de cette expression, on trouve que :

$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{p}}^1 + \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{p}^1$$

Cinématique

Mouvement de corps rigide



- Si on utilise l'expression de la dérivée d'une matrice et on spécifie la dépendance à l'égard de la vitesse angulaire, on obtient :

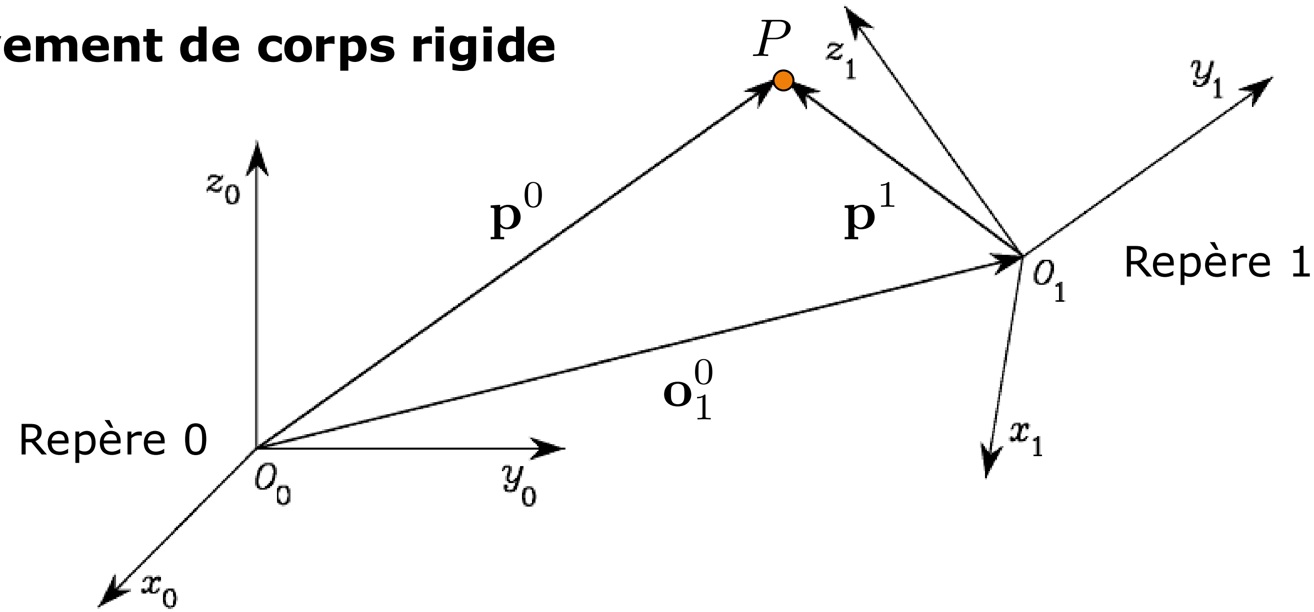
$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0\,\dot{\mathbf{p}}^1 + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1^0)\,\mathbf{R}_1^0\,\mathbf{p}^1$$

- Enfin, si le vecteur $\mathbf{R}_1^0\,\mathbf{p}^1$ est noté $\mathbf{r}_1^0$ pour plus de simplicité, on conclue que :

$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0\,\dot{\mathbf{p}}^1 + \boldsymbol{\omega}_1^0 \times \mathbf{r}_1^0$$

Cinématique

Mouvement de corps rigide



Cas particulier : Si P est *fixe* par rapport au repère 1, on trouve que :

$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \boldsymbol{\omega}_1^0 \times \mathbf{r}_1^0$$

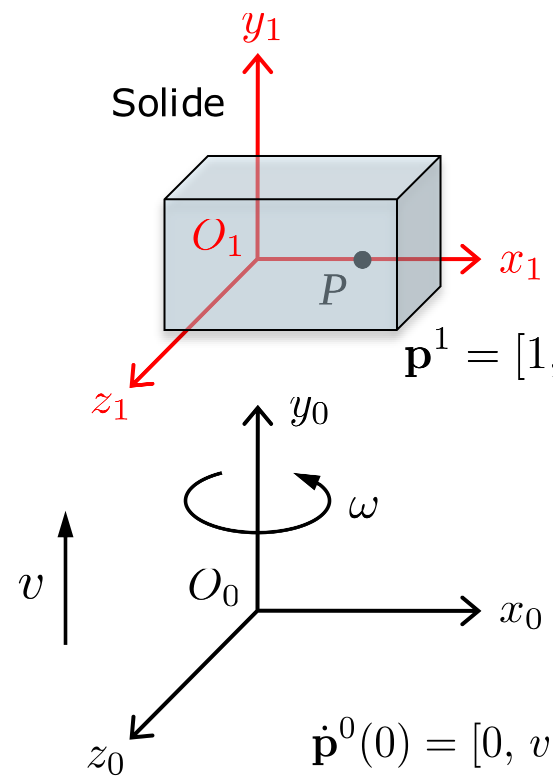
car $\dot{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{0}$

Cinématique

<u>Exemple</u>:

- P est un point d'un solide en mouvement par rapport au repère 0 (voir la figure à droite)
- Le repère 1 est attaché au solide
- Le mouvement du repère 1 par rapport au repère 0 est le suivant :

  1. Rotation de vitesse ω autour de y_0
  2. Translation de vitesse v suivant y_0
  3. À $t = 0$, repère 0 $\equiv$ repère 1



$\mathbf{p}^1 = [1,\ 0,\ 0]^T$

$\dot{\mathbf{p}}^0(0) = [0,\ v,\ -\omega]^T$

Nous avons que:

$$\mathbf{R}_1^0(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & 0 & \sin(\omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\omega t) & 0 & \cos(\omega t) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\omega}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{o}_1^0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ vt \\ 0 \end{bmatrix},\ \dot{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{0}$$

À l'instant initial

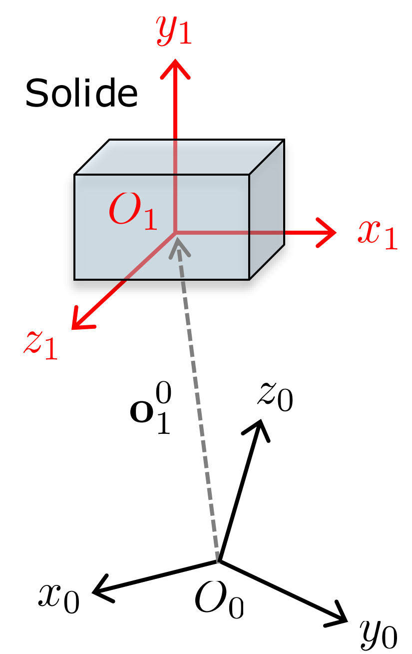
donc

$$\dot{\mathbf{p}}^0(t) = \dot{\mathbf{o}}_1^0(t) + \dot{\mathbf{R}}_1^0(t)\,\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega\sin(\omega t) & 0 & \omega\cos(\omega t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega\cos(\omega t) & 0 & -\omega\sin(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega\sin(\omega t) \\ v \\ -\omega\cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Cinématique

Définition (torseur cinématique)

Soit le repère 0 fixe et le repère 1 attaché à un solide indéformable. Le *torseur cinématique* décrivant le mouvement du solide par rapport au repère 0 est défini par :



$$\mathcal{V} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{o}_1^0 \times \boldsymbol{\omega}_1^0 \\ \boldsymbol{\omega}_1^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Deux cas spéciaux :

1) Si $\mathbf{o}_1^0$ est constant, c'est-à-dire $\dot{\mathbf{o}}_1^0 = \mathbf{0}$, alors le torseur est une rotation pure atour d'un axe, et le torseur devient :

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_1^0 \times \boldsymbol{\omega}_1^0 \\ \boldsymbol{\omega}_1^0 \end{bmatrix}$$

2) Si $\boldsymbol{\omega}_1^0 = \mathbf{0}$, c'est-à-dire le solide ne tourne pas, mais il glisse dans la direction $\dot{\mathbf{o}}_1^0$ uniquement, le torseur devient :

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{o}}_1^0 \\ \mathbf{0}_{3\times 1} \end{bmatrix}$$ (*glisseur*)

Cinématique

• Le torseur cinématique représente la vitesse d'un solide comme une *vitesse angulaire autour d'un axe* et une *vitesse linéaire le long du même axe*

Il permet de représenter de façon pratique le champ des vitesses d'un solide indéformable en un instant donné

• Le torseur cinématique décrit la cinématique du solide *indépendamment* des causes du mouvement

• La *loi de composition des mouvements* permet de combiner plusieurs torseurs cinématiques

• Le torseur cinématique fait partie de la famille des torseurs. D'autres torseurs utilisés en mécanique :

- *Torseur statique* ou *d'action* (ensemble des forces et des couples qui résultent de l'application des lois de Newton sur un solide)
- *Torseur cinétique*
- *Torseur dynamique*

Robert Stawell Ball
(1840-1913)
The Theory of Screws (1876)

Vocabulaire anglais :

Torseur = *Screw*, Torseur cinématique = *Twist*, Torseur statique = *Wrench*