

Robotique Industrielle

UPJV, Département EEA

M1 3EA, Parcours RoVA, EC15

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

**Lundi 13h30-16h30 (CM ou TD, salle CURI 304)
(TP, salle TP204)**

Année Universitaire 2024-2025



Plan du cours

Chapitre 1 : Introduction

- 1.1 Définitions
- 1.2 Constituants d'un robot
- 1.3 Classification des robots
- 1.4 Caractéristiques d'un robot
- 1.5 Générations de robots
- 1.6 Programmation des robots
- 1.7 Utilisation des robots



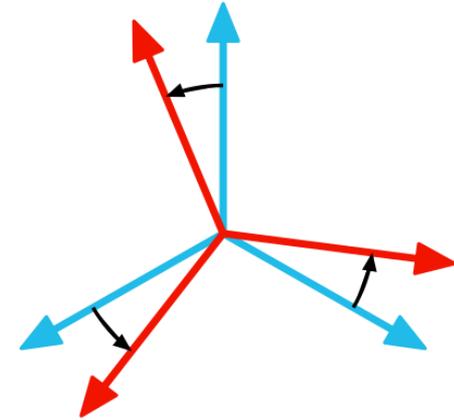
Chapitre 2 : Fondements Théoriques

- 2.1 Pose d'un corps rigide
 - Matrices de rotation et autres représentations de l'orientation
 - Transformations homogènes

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



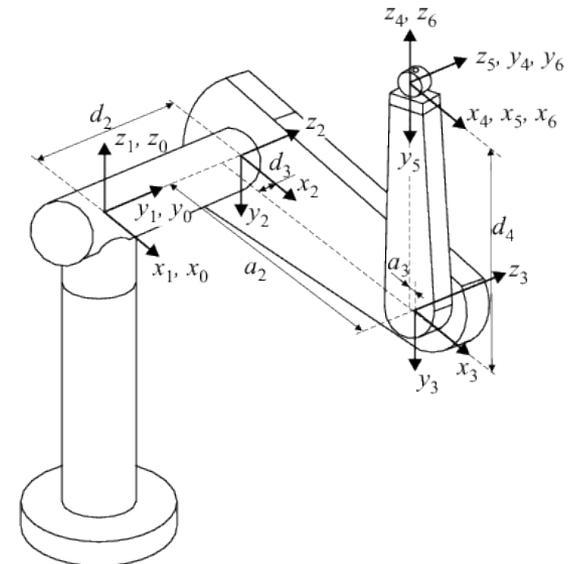
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

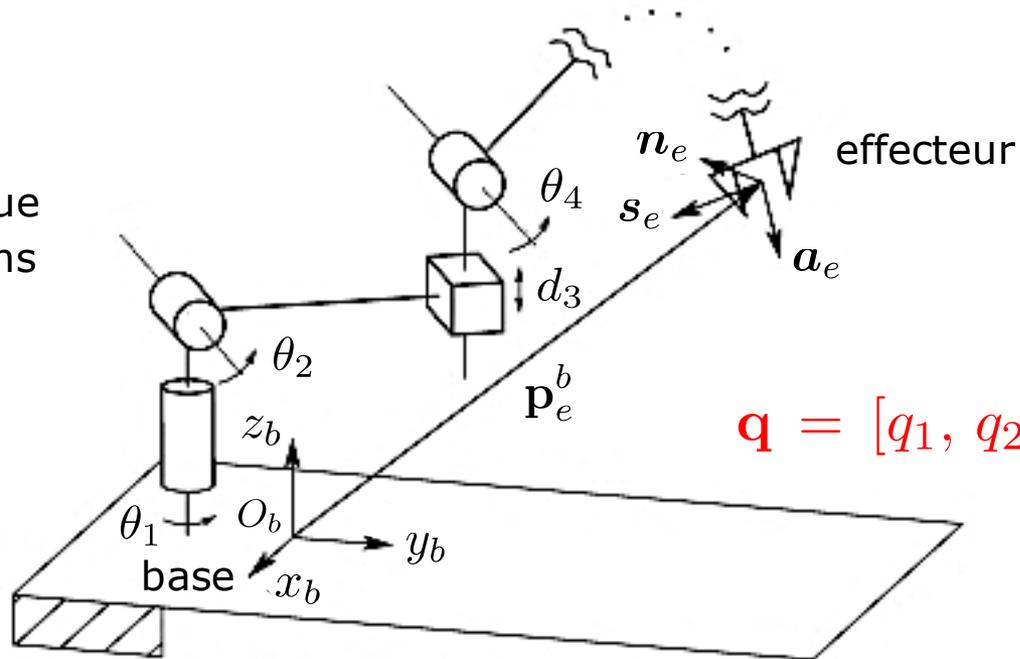
3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



Modèle géométrique inverse

Robot générique
à n articulations



$$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T ?$$

Modèle géométrique direct (MGD): étant données les positions articulaires (distance resp. angle pour une articulation prismatique resp. rotoïde) trouver la pose de l'effecteur par rapport à la base

Modèle géométrique inverse (MGI): étant donnée une pose de l'effecteur par rapport à la base, trouver, *si elles existent*, l'ensemble des positions articulaires qui permettent de générer cette pose

Modèle géométrique inverse

Problème direct :

Si les variables des articulations (le vecteur \mathbf{q}) sont connues, la pose de l'effecteur par rapport à la base peut être calculée de **manière unique** en utilisant la matrice de transformation homogène :

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \cdots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$$

Problème inverse :

Il s'agit de déterminer les coordonnées articulaires permettant d'obtenir une situation désirée pour l'effecteur

Problème *beaucoup plus difficile* pour les raisons suivantes :

- Les équations à résoudre sont, en général, **non linéaires**. Par conséquent, il n'est pas toujours possible de trouver une solution de **forme fermée** (c'est-à-dire, une *solution explicite*)
- Le problème peut avoir des **solutions multiples**
- Le problème peut avoir un **nombre infini de solutions** (par ex. pour des robots cinématiquement redondants)
- Le problème peut n'avoir **aucune solution admissible** à cause de la structure cinématique du manipulateur

Modèle géométrique inverse

Solutions multiples du problème inverse :

- L'existence de solutions multiples dépend du **nombre de DDL** du robot mais aussi du **nombre de paramètres de DH** qui sont différents de zéro
 - En général, plus le nombre de paramètres de DH différents de zéro est grand, plus le nombre de solutions admissibles est grand
- Pour un manipulateur à 6 DDL *sans butées mécaniques* sur les articulations, il y a, en général, **16 solutions admissibles**. On a donc besoin de trouver des critères pour choisir parmi ces solutions admissibles
 - La présence de *butées mécaniques* sur les articulations des robots réels peut, éventuellement, *reduire* le nombre de solutions multiples admissibles



Modèle géométrique inverse

Solutions de forme fermée

Pour trouver des solutions de forme fermée est nécessaire :

- *Intuition algébrique* : pour trouver les équations significatives qui contiennent les inconnues

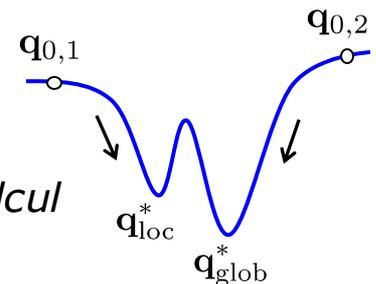
ou

- *Intuition géométrique* : pour trouver des points significatifs sur le robot qui peuvent être utilisés pour exprimer la position et/ou l'orientation en fonction du nombre d'inconnues

Solutions numériques

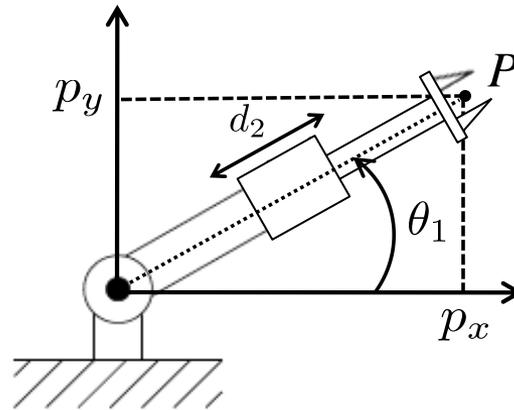
Lorsque il n'y a pas de solutions de forme fermée ou elles sont difficiles à déterminer, on peut calculer *une solution particulière* du problème inverse par des *procédures numériques* (méthodes itératives d'optimisation non linéaire, comme l'algorithme de Gauss-Newton ou de Levenberg-Marquardt)

- **Avantage** : les méthodes numériques sont applicables à *tous les robots*
- **Inconvénients** : les méthodes numériques ne trouvent pas, en général, *toutes* les solutions admissibles. Ils trouvent une **solution locale** au sens où elle dépend des *conditions initiales*. Ces méthodes sont pénalisantes du point de vue du *temps de calcul*



"Fast and Robust Inverse Kinematics of Serial Robots Using Halley's Method", S. Lloyd, R.A. Irani, M. Ahmadi, IEEE Trans. Robotics, vol. 38, n. 5, pp. 2768-2780, 2022

Exemple 1 - Manipulateur planaire à 2 segments (RP)



Problème :

Étant donné $[p_x, p_y]^T$,
déterminer $\mathbf{q} = [\theta_1, d_2]^T$

Nous avons le modèle géométrique direct suivant :

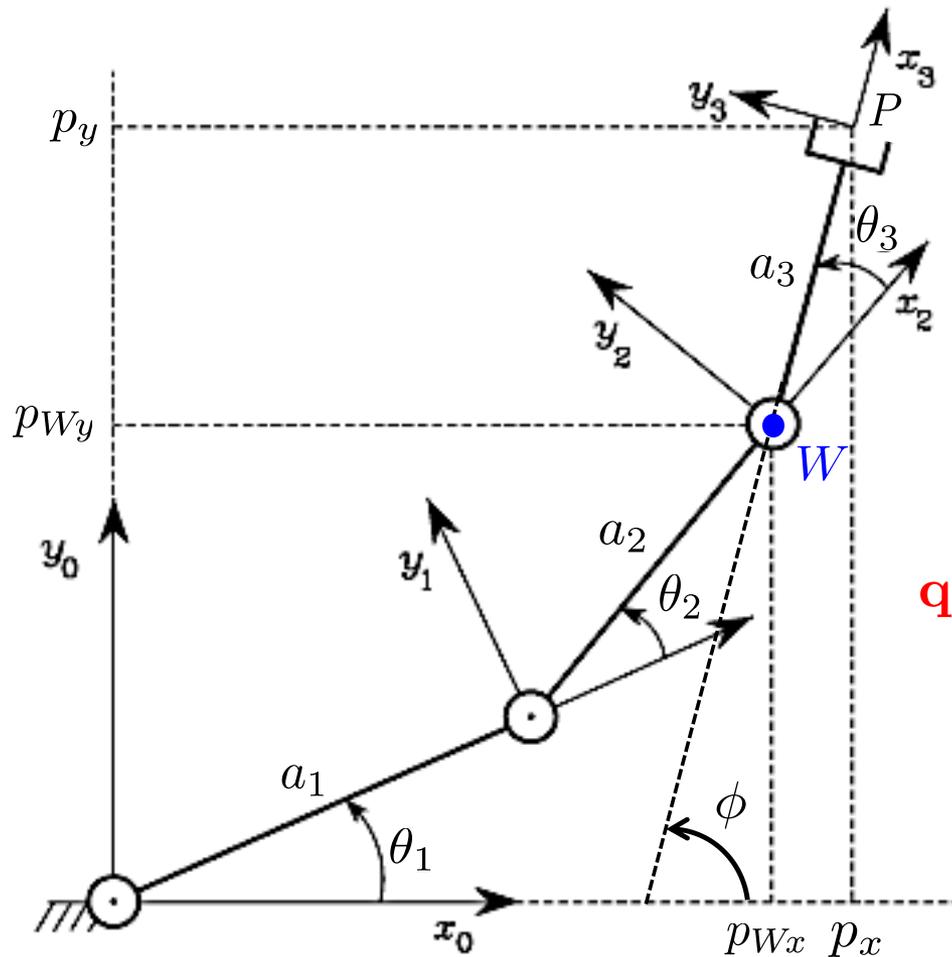
$$p_x = d_2 \cos \theta_1$$

$$p_y = d_2 \sin \theta_1$$

Une démarche analytique simple permet de déterminer le modèle géométrique inverse. En effet, nous avons que :

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{p_y}{p_x} \right), \quad d_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments



$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T ?$$

Problème : étant données la position et l'orientation de l'effecteur, déterminer les variables $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ des trois articulations rotatoires

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- On a déjà vu que la matrice de transformation homogène entre le repère 3 et le repère 0 du manipulateur est (cf. la 1^{re} partie du Ch. 3.1) :

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ et $c_1 = \cos \theta_1$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

-
- Il est pratique de spécifier la position et l'orientation de l'effecteur en utilisant un **nombre minimal de paramètres**
 - On peut utiliser les coordonnées p_x , p_y et l'angle ϕ entre l'effecteur et l'axe x_0 :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Élément (1, 4) de } \mathbf{T}_3^0 \\ \longleftarrow \text{Élément (2, 4) de } \mathbf{T}_3^0 \\ \longleftarrow \text{Somme des 3 variables} \\ \text{articulaires} \end{array}$$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

I - Solution algébrique

- Si ϕ est spécifié, la 1^{re} équation du système à résoudre est :

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

En revanche si ϕ n'est pas spécifié, le manipulateur est redondant et il y a un *nombre infini de solutions* du problème inverse

- À partir du modèle direct, on trouve que :

$$\left. \begin{aligned} p_{Wx} &= p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ p_{Wy} &= p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Coordonnées du point } W \\ \text{(l'origine du repère 2)} \end{array}$$

- On calcule le carré des deux expressions précédentes et on les additionne :

$$p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2$$

Donc

$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}$$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- Pour avoir une solution admissible, il faut garantir que :

$$-1 \leq c_2 \leq 1$$

- Donc, on impose

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

où le signe "+" correspond à la posture "coude en bas" et le signe "-" correspond à la posture "coude en haut" du robot

- Par conséquent :

$$\theta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

- Maintenant, il faut déterminer θ_1 . Si on substitue l'expression de θ_2 trouvée dans les équations de p_{Wx} , p_{Wy} , on obtient un système de deux équations à deux inconnues, s_1 , c_1 , avec solution :

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wy} - a_2 s_2 p_{Wx}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$$

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wx} + a_2 s_2 p_{Wy}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$$

$$\text{Par conséquent : } \theta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1)$$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- Enfin, pour trouver l'angle θ_3 , on utilise l'équation :

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

Remarque :

Si $\sin \theta_2 = 0$ on a que $\theta_2 \in \{0, \pi\}$: dans cette posture le manipulateur est dans une **singularité cinématique**. On peut encore déterminer θ_1 **d'une manière unique** sauf si $a_1 = a_2$ et on requiert que $p_{Wx} = p_{Wy} = 0$

II - Solution géométrique

- On utilise à nouveau les trois équations vues précédemment :

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

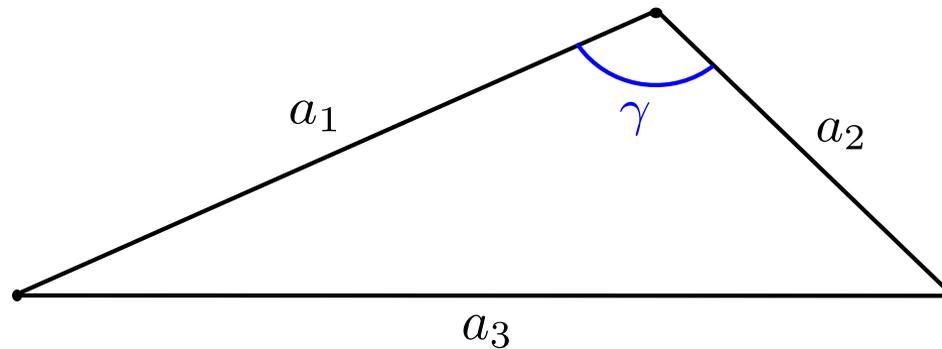
$$p_{Wx} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$p_{Wy} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

Rappel :

Théorème d'Al-Kashi (ou loi des cosinus) :



Soit un triangle dans lequel on utilise les notations exposées sur la figure ci-dessus, alors :

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos \gamma$$

Le théorème d'Al-Kashi généralise le *théorème de Pythagore* aux triangles non rectangles. En effet, pour $\gamma = \pi/2$ on trouve $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$, c'est-à-dire le théorème de Pythagore

Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- Si on applique le *théorème d'Al-Kashi* au triangle rouge en figure, on obtient :

$$p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - \theta_2)$$

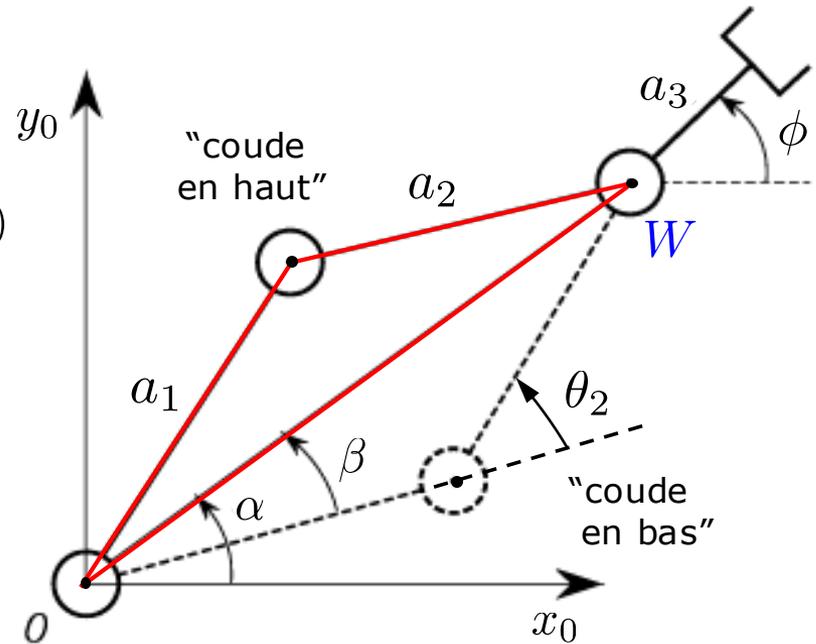
- En réalité, nous avons deux configurations possibles du triangle (voir le trait noir pointillé en figure)

- Puisque $\cos(\pi - \theta_2) = -\cos \theta_2$, on trouve:

$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

- En raison de l'inégalité triangulaire, il faut que :

$$\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} \leq a_1 + a_2$$



- Sous cette inégalité, on trouve que :

$$\theta_2 = \pm \arccos(c_2)$$

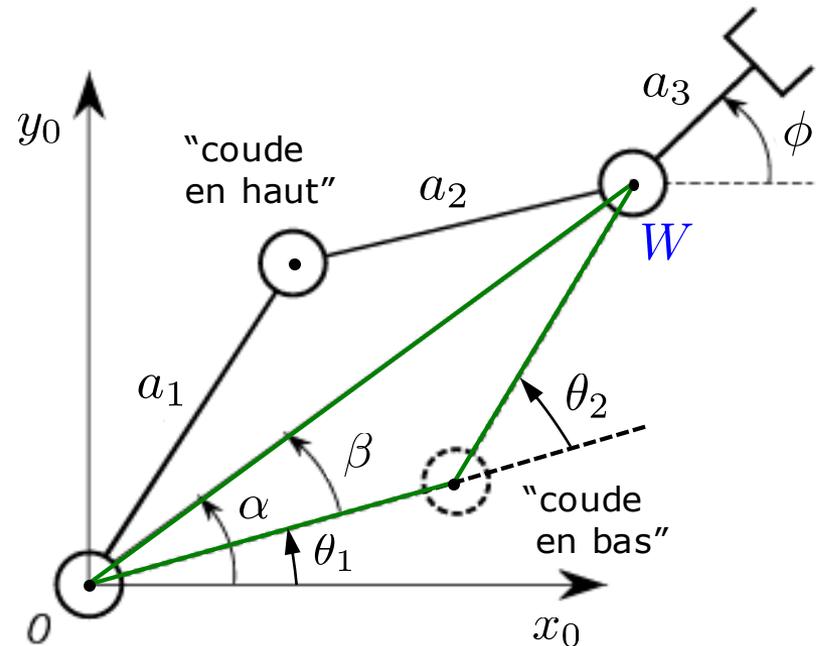
Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- La posture "coude en bas" est obtenue avec $\theta_2 \in (0, \pi)$
- La posture "coude en haut" est obtenue avec $\theta_2 \in (-\pi, 0)$
- Pour déterminer θ_1 , il faut considérer les angles α et β en figure
- La valeur de α dépend du signe de p_{Wx} , p_{Wy} . Il faut donc calculer α comme :

$$\alpha = \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx})$$

- Pour trouver β , on applique encore le *théorème d'Al-Kashi* au triangle vert dans la figure, ce qui nous donne l'équation :

$$a_2^2 = p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + a_1^2 - 2a_1 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} \cos \beta \implies c_\beta \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} = a_1 + a_2 c_2$$



Exemple 2 - Manipulateur planaire à 3 segments

- Si on utilise l'expression de c_2 trouvée auparavant, on obtient :

$$\beta = \arccos \left(\frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}} \right)$$

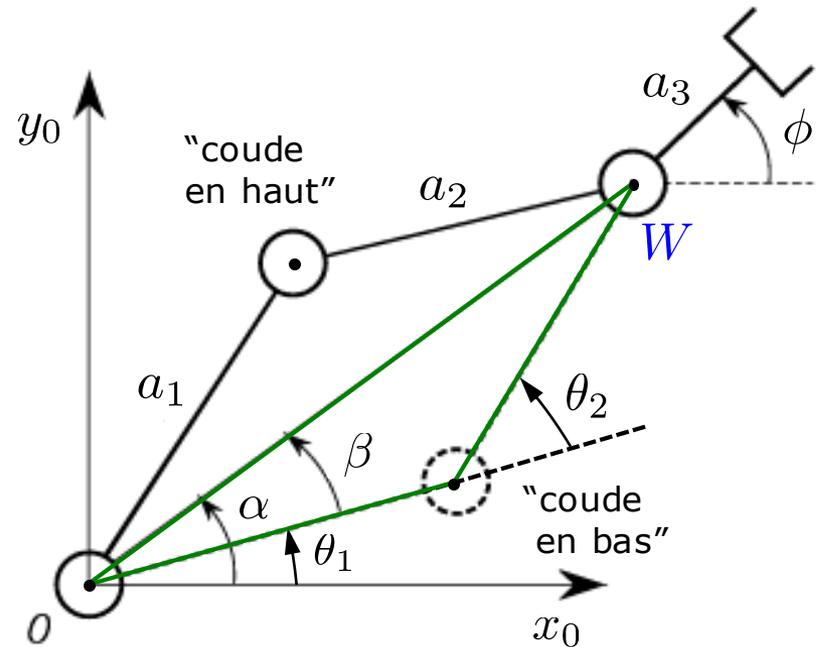
avec $\beta \in (0, \pi)$ pour garantir, à nouveau, l'inégalité triangulaire

- Donc

$$\theta_1 = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{si } \theta_2 < 0 \\ \alpha - \beta & \text{si } \theta_2 > 0 \end{cases}$$

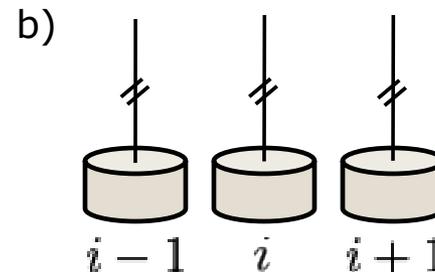
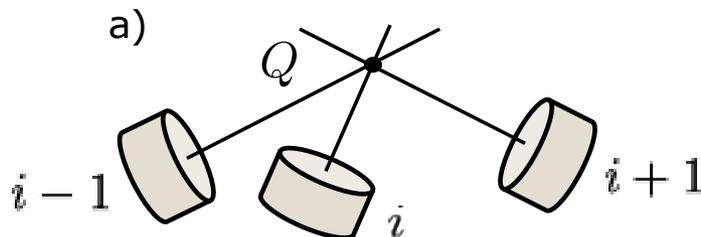
- Enfin pour trouve θ_3 , on utilise l'équation :

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$



Solutions de forme fermée : généralités

- La plupart des robots industriels sont *cinématiquement simples*
- En effet, ils sont typiquement composés d'un *porteur* et d'un *poignet de type rotule* (avec ce poignet, le point W est choisi à l'intersection des trois axes des articulations rotoïdes)
- Ce choix est motivé par la difficulté à déterminer des solutions au problème inverse dans le *cas général*
- En particulier, un **manipulateur à 6 DDL** admet des solutions de *forme fermée* au problème géométrique inverse si l'une des conditions suivantes est remplie :
 - a) Les axes de trois articulations rotoïdes consécutives *se croisent en un seul point* (trois axes concourants), comme dans le cas du poignet de type rotule
 - b) Les axes de trois articulations rotoïdes consécutives sont *parallèles*



Méthode de Paul

- Dans le cas de robots à *géométrie simple* (pour lesquels la plupart des distances a_i et d_i sont nulles et les angles θ_i et α_i sont égaux à 0 ou à $\pm\pi/2$), le MGI peut être obtenu de façon systématique avec la **méthode de Paul**
- Le MGI est obtenu en résolvant l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \cdots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$$

où $\mathbf{U}_0 = \mathbf{T}_n^0$ (*connue*) décrit la situation du repère n par rapport au repère 0 de la base

- La méthode de Paul permet la détermination de q_1 , puis de q_2 et ainsi de suite jusqu'à q_n
- Il s'agit de déplacer l'une après l'autre chacune des variables articulaires q_1, \dots, q_n dans le membre de gauche de l'équation
- Pour cela, on multiplie à gauche par $\mathbf{A}_{j-1}^j(q_j)$ l'équation ci-dessus, en prenant successivement $j \in \{1, \dots, n-1\}$

Méthode de Paul

Exemple : appliquons la méthode de Paul à un **robot à 6 DDL** ($n = 6$)

1) Multiplier à gauche l'équation de la slide précédente par $\mathbf{A}_0^1(q_1)$, soit :

$$\mathbf{A}_0^1(q_1)\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_2^1(q_2) \cdots \mathbf{A}_6^5(q_6) \quad (*)$$

Les éléments situés dans le membre de gauche sont soit indépendants, soit fonctions de q_1 . Les éléments situés dans le membre de droite sont soit constants, soit fonctions de q_2, \dots, q_6

2) Dédire q_1 de l'équation (*) ci-dessus

3) Multiplier à gauche l'équation (*) par $\mathbf{A}_1^2(q_2)$, soit :

$$\mathbf{A}_1^2(q_2)\mathbf{A}_0^1(q_1)\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_3^2(q_3) \cdots \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

4) En déduire q_2

5) Continuer cette procédure pour en déduire q_3, \dots, q_6

Méthode de Paul

En résumé, on utilise les équations suivantes pour calculer les variables articulaires q_1, \dots, q_6 :

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \mathbf{A}_3^2(q_3) \mathbf{A}_4^3(q_4) \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_0^1(q_1) \mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_2^1(q_2) \mathbf{A}_3^2(q_3) \mathbf{A}_4^3(q_4) \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_1^2(q_2) \mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_3^2(q_3) \mathbf{A}_4^3(q_4) \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_2^3(q_3) \mathbf{U}_2 = \mathbf{A}_4^3(q_4) \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_3^4(q_4) \mathbf{U}_3 = \mathbf{A}_5^4(q_5) \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\mathbf{A}_4^5(q_5) \mathbf{U}_4 = \mathbf{A}_6^5(q_6)$$

$$\text{avec } \mathbf{U}_j = \mathbf{A}_6^j = \mathbf{A}_{j-1}^j \mathbf{U}_{j-1}, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

La résolution de ces équations est *intuitive*, mais fait intervenir (en principe) quelques types d'équations dont la solution analytique est *connue*

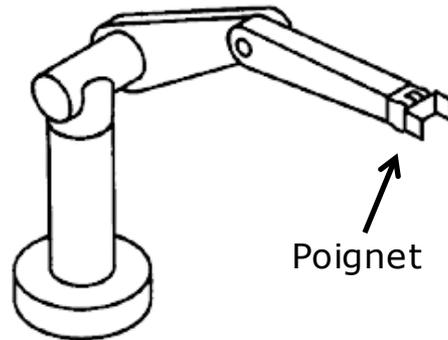
Méthode de Paul : application au robot Stäubli TX60

- Si nous appliquons la méthode de Paul au robot **Stäubli TX60** (un robot 6R avec porteur anthropomorphe et poignet de type rotule), nous trouvons qu'il existe **8 solutions** au problème inverse dans le cas général (avec 1 butée mécanique)
- Certaines positions dites *singulières* du robot occasionnent un *nombre infini de solutions*. C'est par exemple le cas de la configuration initiale "sans offset" du robot ($\theta_1 = \dots = \theta_6 = 0$) où les arguments de la fonction arc tangente utilisés pour déterminer le paramètre θ_4 sont nuls, ce qui rend ce paramètre indéterminé
- Le choix de la valeur de ce paramètre étant libre, on assigne typiquement la *valeur courante* θ_4 du robot. Ce choix fixe alors la valeur du paramètre θ_6

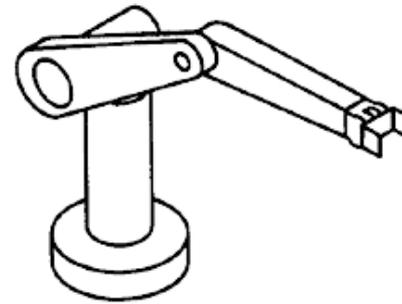


Robot
Stäubli TX60

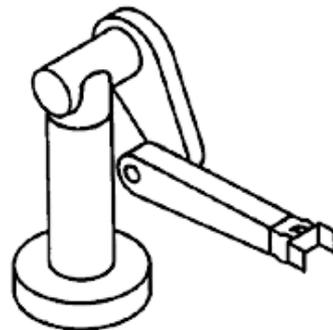
- Les solutions de forme fermée au MGI du *manipulateur anthropomorphe*, du *manipulateur sphérique* et du *poignet de type rotule* sont présentées dans le livre de Siciliano, Sciavicco, Villani et Oriolo (pages 94-100)
- À titre d'exemple, les quatre postures compatibles avec une pose donnée du poignet d'un **manipulateur anthropomorphe** sont montrées ci-dessous :



1) Bras à gauche et en haut



2) Bras à droite et en haut



3) Bras à gauche et en bas



4) Bras à droite et en bas

Remarques

- Nous avons vu que le modèle géométrique direct d'un robot peut se représenter aussi à l'aide de l'application :

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{q})$$

Cette application est définie de l'*espace articulaire* (EA) vers l'*espace opérationnel* (EO), tous les deux de dimension $n \leq 6$, en général

- Cette application **n'est pas biunivoque**, c'est-à-dire, à un élément de l'EA correspond une seule image dans l'EO, mais par contre un élément de l'EO pourra être l'image de plusieurs éléments de l'EA
 - Dans le cas du robot Stäubli TX60 avec 1 butée mécanique, il existe (au maximum) 8 solutions possibles pour atteindre un point de l'EO
 - Dans la pratique, cette "non propriété" peut poser des problèmes, par exemple, dans le cas où des *obstacles* sont à proximité du robot
 - En effet, la réalisation d'une trajectoire rectiligne peut s'avérer irréalisable physiquement ou le bras du robot peut être amené à se *reconfigurer**, ce qui peut induire des comportements "intempestifs" du manipulateur

* "IKLink: End-Effector Trajectory Tracking with Minimal Reconfigurations", Y. Wang, C. Sifferman, M. Gleicher, in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., pp. 12165-12171, 2024

Robots cuspidaux

- Pour un robot sériel, le terme **posture** définit une configuration articulaire permettant à l'organe terminal du robot d'atteindre une cible donnée dans son espace de travail. Une posture est donc associée à *une solution au MGI*
- Les *singularités* sont très importantes pour l'analyse du comportement des robots. Outre leur effet sur les déplacements possibles, elles divisent l'espace articulaire des robots sériels en domaines sans singularités appelés **aspects**

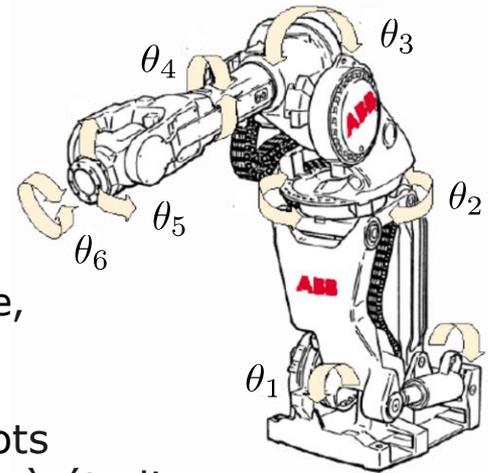
- Un robot est dit **cuspidal** s'il peut changer de posture *sans passer* par une singularité
 - Le nom "robot cuspidal" a été introduit en 1995 en lien avec la condition d'existence d'un point singulier particulier de l'espace de travail appelé "point cusp". On peut montrer que si un point cusp existe alors le robot est cuspidal

- Plusieurs conditions géométriques simples, conduisant à des robots 3R *non cuspidaux*, existent. Les conditions qui correspondent aux robots "résolubles" au sens de Pieper, sont :

- Les deux premiers axes sont parallèles
- Les deux derniers axes sont parallèles
- Les deux premiers axes se coupent
- Les deux derniers axes se coupent

Robots cuspidaux

- Sachant que le poignet (de type) rotule est un mécanisme simple qui est non cuspidal (tous ses axes se coupent), un robot à 6 DDL et poignet rotule sera cuspidal si et seulement si le porteur est cuspidal
- Il n'existe pas d'exemple de robot industriel (à 6 DDL) à *poignet rotule* qui soit cuspidal. Toutefois, ABB avait commercialisé en 1998 un robot à poignet rotule (le robot IRB 6400C) qui était cuspidal :
 - Sa particularité était la permutation des deux premiers axes par rapport à un robot anthropomorphe, rendant tous ses axes mutuellement orthogonaux
- Il existe très peu de résultats sur la cuspidalité des robots industriels *sans poignet rotule*, car ils sont plus difficiles à étudier
 - Les robots 6R à trois axes parallèles peuvent être analysés : par ex. les robots UR5 et UR10 de Universal Robots
 - La cuspidalité du robot JACO de Kinova Robotics (un bras robotisé 6R d'assistance) a été établie récemment*



Robot IRB 6400C



Robot JACO

"Robots cuspidaux : théorie et applications", P. Wenger, D. Chablat, Techniques de l'Ingénieur, juillet 2021, disponible sur : www.techniques-ingenieur.fr

* "Trajectory planning issues in cuspidal commercial robots", D.H. Salunkhe, D. Chablat, P. Wenger, in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., pp. 7426-7432, 2023