Robotique Industrielle

UPJV, Département EEA

M1 3EA, Parcours RoVA, EC15

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

Lundi 13h30-16h30 (CM ou TD, salle CURI 304)
(TP, salle TP204)

Année Universitaire 2024-2025

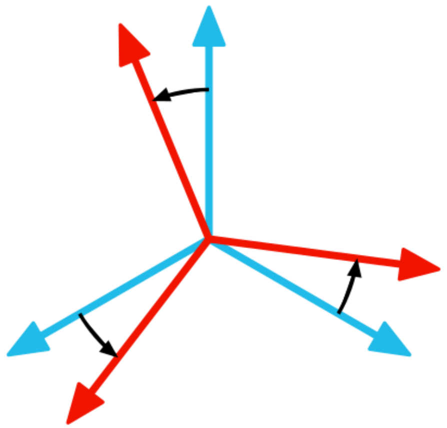
UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



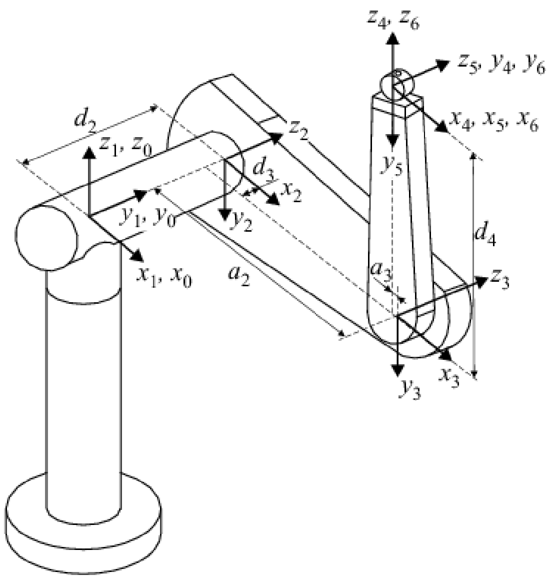
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

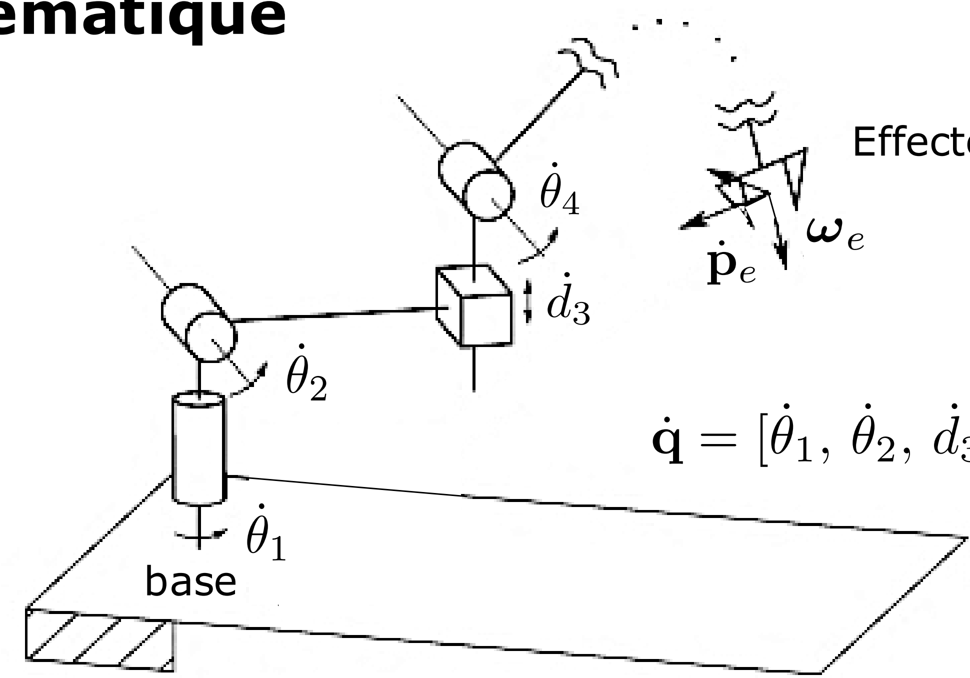
- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



Modèle cinématique



$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta}_1,\, \dot{\theta}_2,\, \dot{d}_3,\, \dot{\theta}_4,\, \ldots]^T$$

Le **modèle cinématique** nous donne la relation entre les *vitesses* des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ et la *vitesse* linéaire $\dot{\mathbf{p}}_e$ et angulaire $\boldsymbol{\omega}_e$ de l'effecteur d'un robot (par rapport au repère de la base)

L'application $\dot{\mathbf{q}} \longrightarrow (\dot{\mathbf{p}}_e,\, \boldsymbol{\omega}_e)$ est décrite par une matrice, le **jacobien géométrique**, qui dépend de la configuration $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ du manipulateur

Jacobien d'un manipulateur

- Le jacobien est l'un des outils les plus importants pour la caractérisation d'un manipulateur
- En effet, le jacobien est utile pour :
  - Déterminer les singularités d'un robot
  - Étudier la redondance d'un robot
  - Développer des algorithmes pour le calcul du MGI
  - Décrire la relation entre les forces appliquées sur l'effecteur et les forces résultantes sur les articulations d'un robot
  - Dériver les équations dynamiques du mouvement d'un robot
  - Concevoir des lois de commande dans l'espace opérationnel

Rappel :

Soit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Le jacobien de $\mathbf{F} = [F_1, \ldots, F_m]^T$ est une matrice $m \times n$ définie comme :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Jacobien d'un manipulateur

Considérons un manipulateur avec n articulations. Nous pouvons écrire le *modèle géométrique direct* comme :

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{q} = [q_1, \ldots, q_n]^T$ est le vecteur des variables articulaires.

La position et l'orientation de l'effecteur *varie* avec $\mathbf{q}$.

Objectif : Exprimer la vitesse linéaire $\dot{\mathbf{p}}_e$ et la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_e$ de l'effectuer du robot en fonction des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$

Remarque : Les trois composantes $v_x,\, v_y,\, v_z$ de $\dot{\mathbf{p}}_e$ et les trois composantes $\omega_x,\, \omega_y,\, \omega_z$ de $\boldsymbol{\omega}_e$, représentent les composantes de la vitesse linéaire et angulaire de l'effectuer du robot par rapport au *repère de la base*, respectivement

Jacobien d'un manipulateur

Les relations cherchées sont toutes les deux *linéaires* par rapport aux vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_e &= \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_e &= \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}}$$

où

$\mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3\times n}$: matrice qui relie la contribution des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ à la *vitesse linéaire* de l'effecteur $\dot{\mathbf{p}}_e$

$\mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3\times n}$: matrice qui relie la contribution des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ à la *vitesse angulaire* de l'effecteur $\boldsymbol{\omega}_e$

Jacobien d'un manipulateur

Sous une forme compacte :

$$\mathbf{v}_e \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$$

Équation de la cinématique d'un manipulateur

La matrice

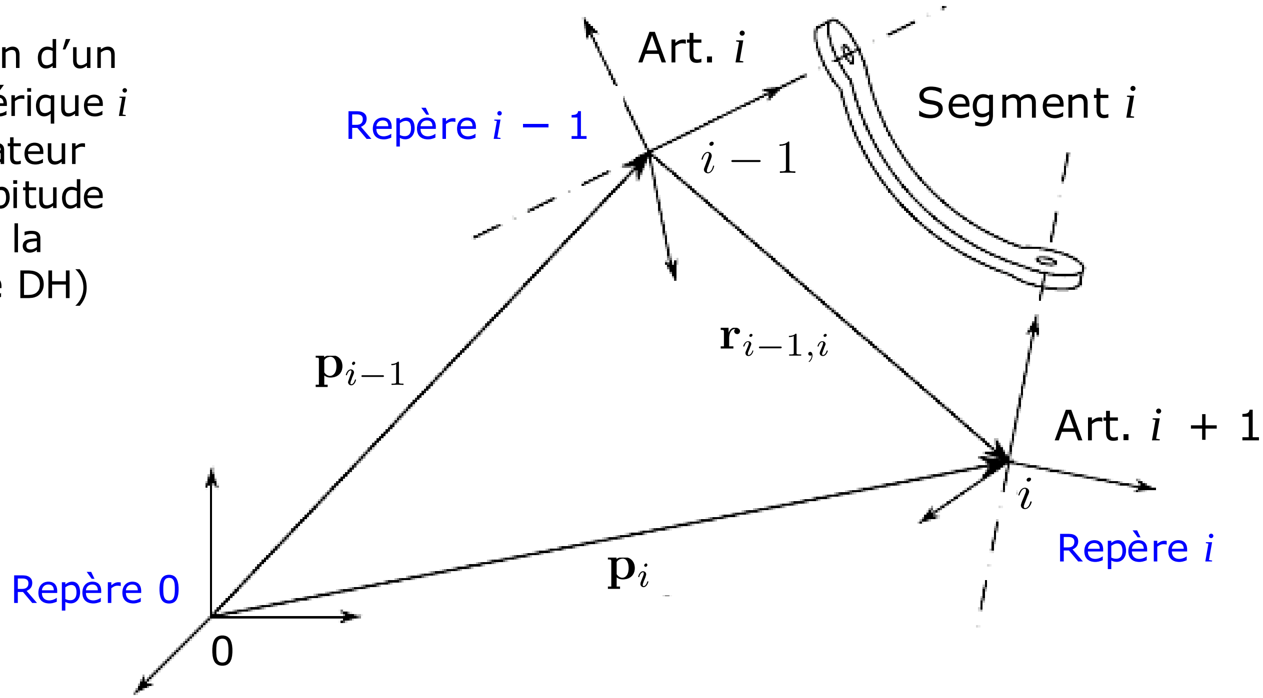
$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times n}$$

est le **jacobien géométrique** d'un manipulateur
(une fonction du vecteur des variables articulaires $\mathbf{q}$)

But final : Étant donné un manipulateur, calculer *explicitement* son jacobien géométrique. Dans ce but, nous utiliserons les propriétés des *matrices de rotation* et la *cinématique du corps rigide* vues dans le Chapitre 2.2

Vitesse des segments d'un robot

Caractérisation d'un segment générique i d'un manipulateur (comme d'habitude nous utilisons la convention de DH)



Soient :

$\mathbf{p}_{i-1},\ \mathbf{p}_i$: positions des origines des repères i – 1 et i exprimées dans le repère 0

$\mathbf{r}^{i-1}_{i-1,i}$: position de l'origine du repère i par rapport au repère i – 1 exprimée dans le repère i – 1

Assumptions: Les repères 0 et n sont les repères de la *base* et de l'*effecteur* du robot. On omettra l'indice "0" pour les quantités exprimées dans le repère 0

Vitesse des segments d'un robot

On trouve que :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}\,\mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}$$

$\mathbf{R}_{i-1}$: rotation du repère i – 1 par rapport au repère 0

Si on calcule la dérivée par rapport au temps de cette équation
et on utilise les formules vues dans le Chapitre 2.2, nous avons que :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}\,\dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1}\,\mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} \\ &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}\end{aligned}$$

où

$\mathbf{v}_{i-1,i}$: vitesse de l'origine du repère i par rapport à l'origine du repère i – 1

Conclusion : nous avons ainsi trouvé l'expression de la vitesse linéaire
du segment i en fonction de la vitesse linéaire et angulaire du segment i – 1 :

$$\boxed{\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}}$$

Vitesse des segments d'un robot

Pour la **vitesse angulaire** du segment i, on part de la formule de composition de deux rotations :

$$\mathbf{R}_i \;=\; \mathbf{R}_{i-1}\,\mathbf{R}_i^{i-1}$$

Si on calcule la dérivée par rapport au temps de cette équation et on utilise les formules vues dans le Chapitre 2.2, nous trouvons que:

$$\dot{\mathbf{R}}_i \;=\; \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)\,\mathbf{R}_i \;=\; \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1})\,\mathbf{R}_i \;+\; \mathbf{R}_{i-1}\,\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\,\mathbf{R}_i^{i-1}$$

où

$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)$: matrice antisymétrique associée au vecteur $\boldsymbol{\omega}_i$

$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}$: vitesse angulaire du repère i par rapport au repère i – 1 exprimée dans le repère i – 1

On peut récrire le 2e terme à droite dans l'équation précédente comme (rappel l'identité : $\mathbf{R}\,\mathbf{S}(\omega)\,\mathbf{R}^T \;=\; \mathbf{S}(\mathbf{R}\,\omega)$) :

$$\mathbf{R}_{i-1}\,\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\,\mathbf{R}_i^{i-1} \;=\; \mathbf{R}_{i-1}\,\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\,\underbrace{\mathbf{R}_{i-1}^T\,\mathbf{R}_{i-1}}_{\mathbf{I}_3}\,\mathbf{R}_i^{i-1} \;=\; \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1}\,\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\,\mathbf{R}_i$$

Vitesse des segments d’un robot

Nous avons ainsi trouvé la relation:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)\,\mathbf{R}_i \;=\; \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1})\,\mathbf{R}_i \;+\; \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1}\,\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\,\mathbf{R}_i$$

à partir de laquelle, si on se concentre sur les *arguments* de la matrice $\mathbf{S}(\,\cdot\,)$, on déduit que:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_i \;=\; \boldsymbol{\omega}_{i-1} \;+\; \mathbf{R}_{i-1}\,\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1} \;=\; \boldsymbol{\omega}_{i-1} \;+\; \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}}$$

Conclusion : nous avons ainsi trouvé l’expression de la vitesse angulaire du segment i en fonction de la vitesse angulaire du segment i – 1 et de la vitesse angulaire du repère i par rapport au repère i – 1

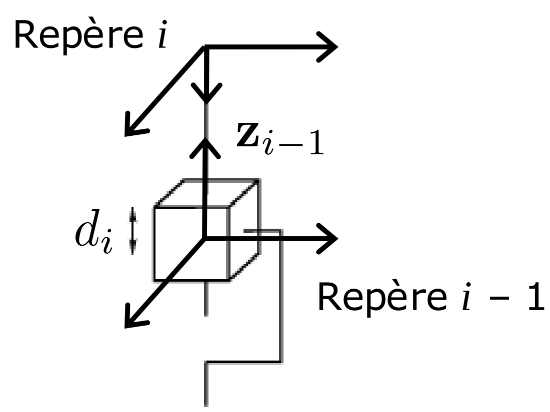
Attention : on obtient une *expression différente* pour

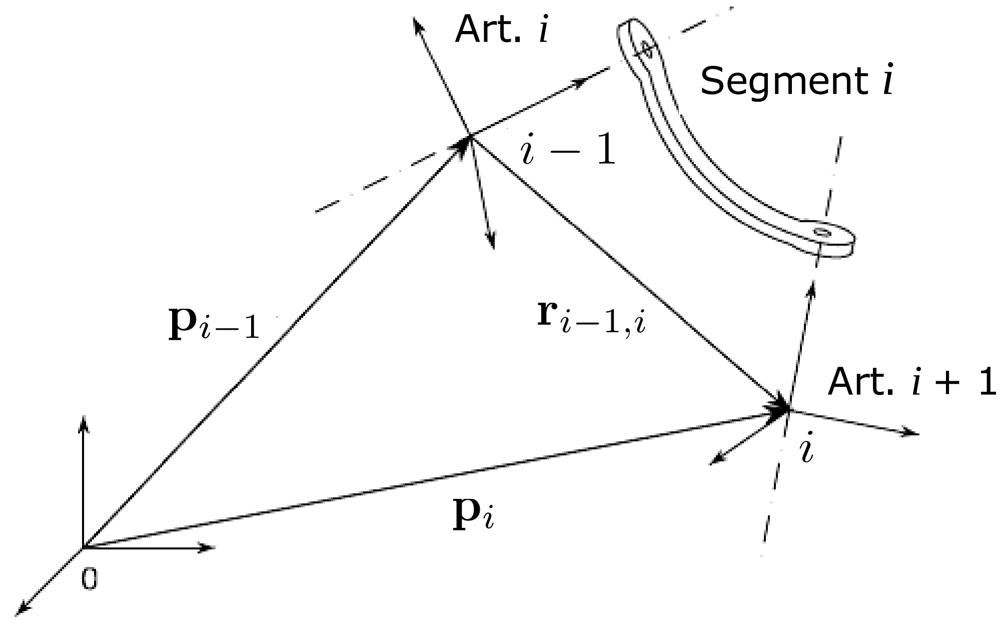
$$\dot{\mathbf{p}}_i \;=\; \dot{\mathbf{p}}_{i-1} \;+\; \mathbf{v}_{i-1,i} \;+\; \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i \;=\; \boldsymbol{\omega}_{i-1} \;+\; \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}$$

en fonction du type d’articulation i : **prismatique** ou **rotoïde**

Vitesse des segments d'un robot





Articulation prismatique :

L'orientation du repère i par rapport au repère i – 1 ne change pas en déplaçant le segment i, donc :

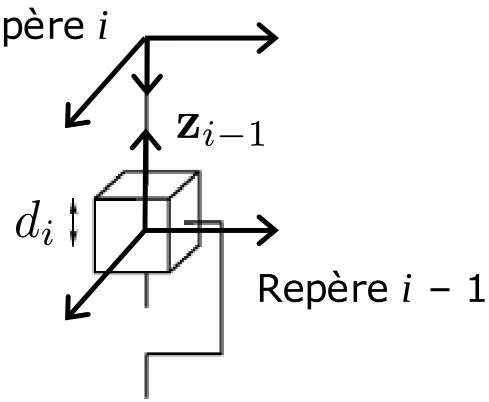
$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \mathbf{0}$$

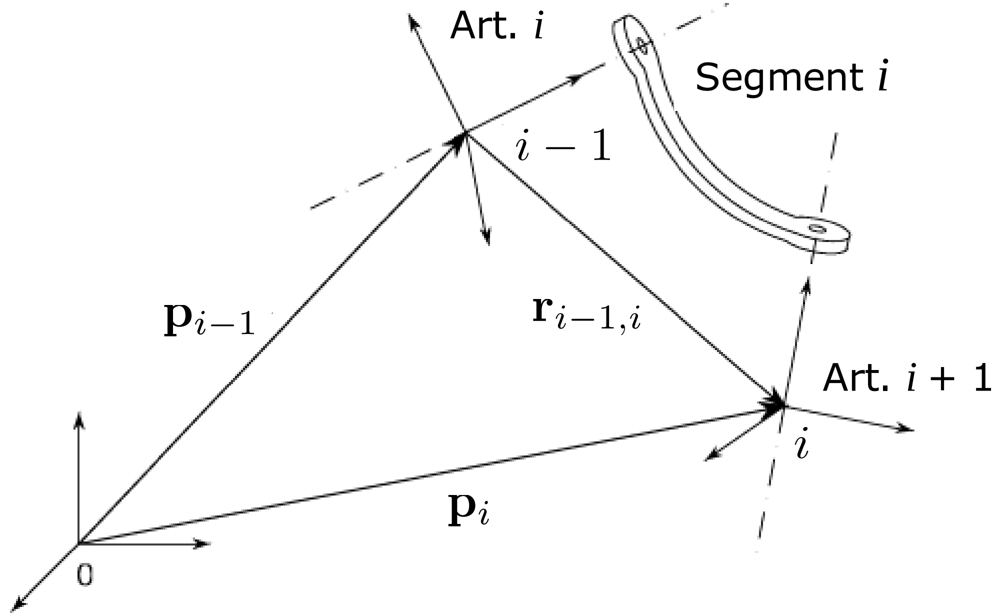
En outre, la vitesse linéaire est :

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \dot{d}_i \, \mathbf{z}_{i-1}$$

où $\mathbf{z}_{i-1}$ est le vecteur unitaire de l'axe de l'articulation i

Vitesse des segments d'un robot

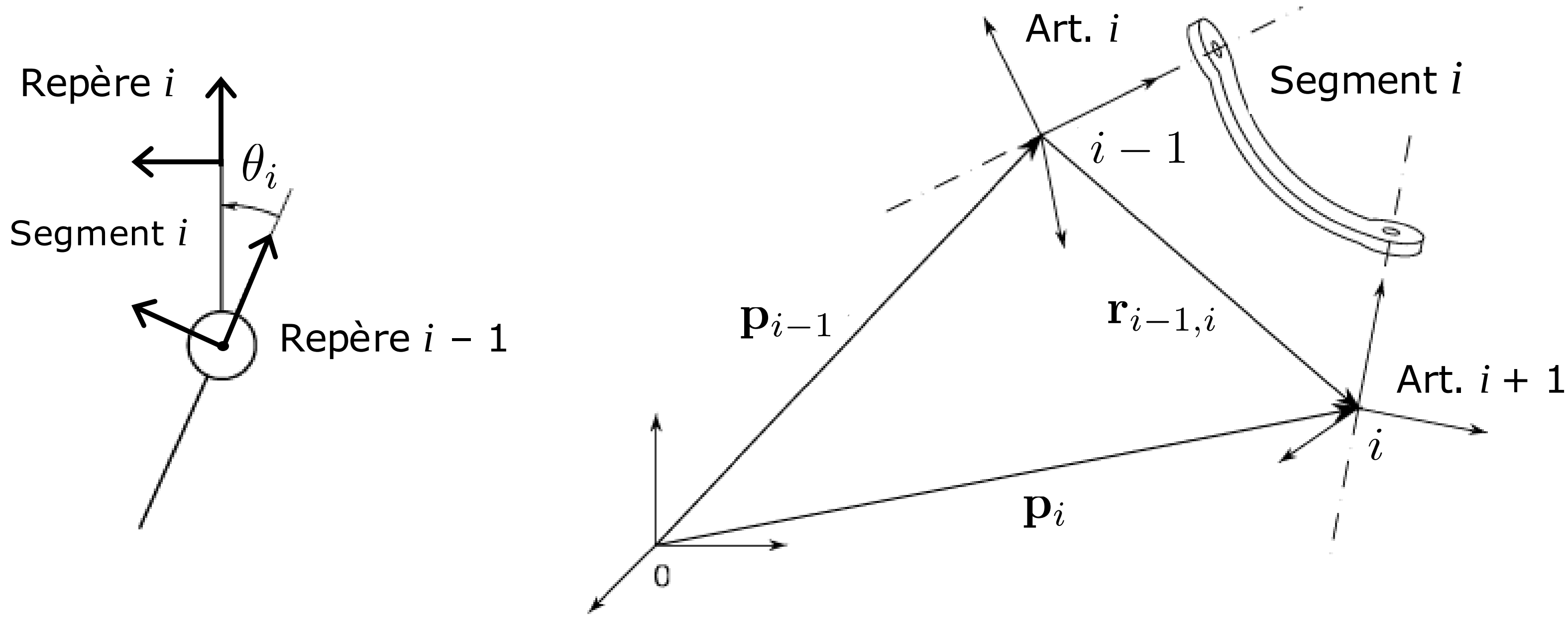




En conclusion, nous avons les deux équations suivantes pour une articulation prismatique :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i\,\mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} \end{aligned}}$$

Vitesse des segments d'un robot



Articulation rotoïde :

Pour la vitesse angulaire, on a que :

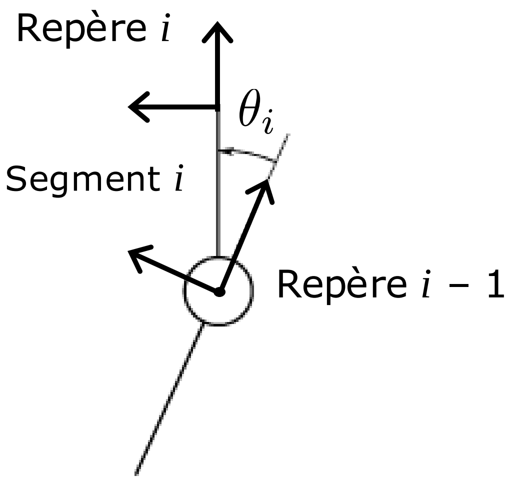
$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{\theta}_i \, \mathbf{z}_{i-1}$$

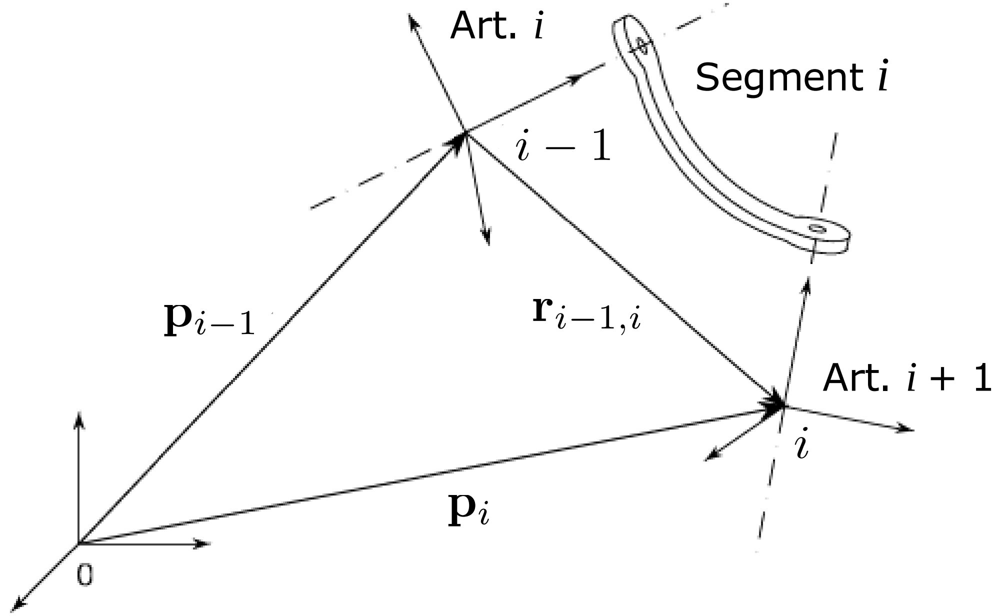
tandis que pour la vitesse linéaire :

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

en raison de la rotation du repère i par rapport au repère i – 1 induite par le mouvement du segment i

Vitesse des segments d'un robot





Nous avons donc les deux équations suivantes pour une articulation rotoïde :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i\, \mathbf{z}_{i-1} \end{aligned}}$$

<u>Remarque</u> : Pour trouver la 1re équation, nous avons utilisé deux identités :

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i} = \left(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1}\right) \times \mathbf{r}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

Calcul du jacobien

Pour calculer le jacobien géométrique, il convient de **procéder séparément** pour les **vitesses linéaires** et **angulaires**

• Pour la contribution à la vitesse linéaire, on peut écrire la dérivée de $\mathbf{p}_e(\mathbf{q})$ par rapport au temps, comme suit:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_{P_i} \dot{q}_i$$

$\boldsymbol{J}_{P_i} \dot{q}_i$: contribution de la vitesse de l'articulation i à la *vitesse linéaire* de l'effecteur lorsque toutes les autres articulations sont immobiles

Articulation prismatique :

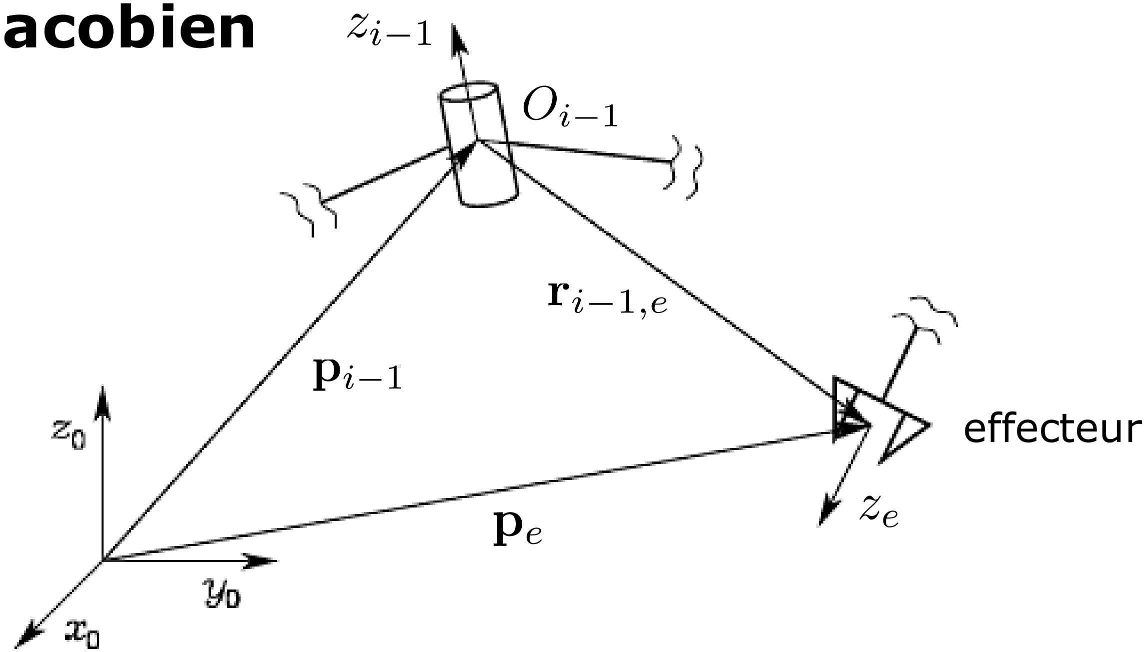
Si l'articulation i est prismatique $(q_i = d_i)$:

$$\boldsymbol{J}_{P_i} \dot{q}_i = \dot{d}_i \, \mathbf{z}_{i-1}$$

et donc :

$$\boldsymbol{J}_{P_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Calcul du jacobien



Articulation rotoïde :

Si l'articulation i est rotoïde $(q_i = \theta_i)$, en observant que la contribution à la vitesse linéaire doit être calculée par rapport à l'origine du repère "e" de l'effecteur, nous avons que :

$$\boldsymbol{\jmath}_{P_i}\,\dot{q}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,e} = \dot{\theta}_i\,\mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1})$$

et donc :

$$\boldsymbol{\jmath}_{P_i} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1})$$

Calcul du jacobien

- Pour la contribution à la vitesse angulaire, on a :

$$\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_{O_i} \dot{q}_i$$

On peut encore caractériser les termes $\boldsymbol{J}_{O_i} \dot{q}_i$ séparément

Articulation prismatique :

Si l'articulation i est prismatique :

$$\boldsymbol{J}_{O_i} \dot{q}_i = \mathbf{0}$$

et donc :

$$\boldsymbol{J}_{O_i} = \mathbf{0}$$

Articulation rotoïde :

Si l'articulation i est rotoïde :

$$\boldsymbol{J}_{O_i} \dot{q}_i = \dot{\theta}_i \, \mathbf{z}_{i-1}$$

et donc :

$$\boldsymbol{J}_{O_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Calcul du jacobien

En résumé :

Le jacobien $\mathbf{J}$ peut être partitionné en vecteurs colonnes $\boldsymbol{\jmath}_{P_i}, \boldsymbol{\jmath}_{O_i} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, de la manière suivante:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\jmath}_{P_1} & \boldsymbol{\jmath}_{P_2} & \cdots & \boldsymbol{\jmath}_{P_n} \\ \boldsymbol{\jmath}_{O_1} & \boldsymbol{\jmath}_{O_2} & \cdots & \boldsymbol{\jmath}_{O_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times n}$$

où, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\jmath}_{P_i} \\ \boldsymbol{\jmath}_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est } \textit{prismatique} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation } i \text{ est } \textit{rotoïde} \end{cases}$$

Cette expression permet de calculer le jacobien d'un manipulateur d'une façon simple et systématique à partir du **modèle géométrique direct**

En effet $\mathbf{z}_{i-1}$, $\mathbf{p}_e$, $\mathbf{p}_{i-1}$ sont des fonctions des variables articulaires

Calcul du jacobien

- $\mathbf{z}_{i-1}$ est donné par la 3e colonne de la matrice de rotation $\mathbf{R}_{i-1}^{0}$
- $\mathbf{p}_e$ est donné par les trois premiers éléments de la 4e colonne de la matrice de transformation $\mathbf{T}_e^0$
- $\mathbf{p}_{i-1}$ est donné par les trois premiers éléments de la 4e colonne de la matrice de transformation $\mathbf{T}_{i-1}^0$

Remarque : les équations précédentes permettent de calculer le jacobien géométrique par rapport au *repère de la base* (le repère "0")

- Si on veut écrire le jacobien dans un repère différent, appelons-le "u", il suffit de connaître la matrice de rotation relative $\mathbf{R}^u$
- La relation entre les vitesses dans les deux repères est donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e^u \\ \boldsymbol{\omega}_e^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \mathbf{J}}_{\mathbf{J}^u} \, \dot{\mathbf{q}}$$

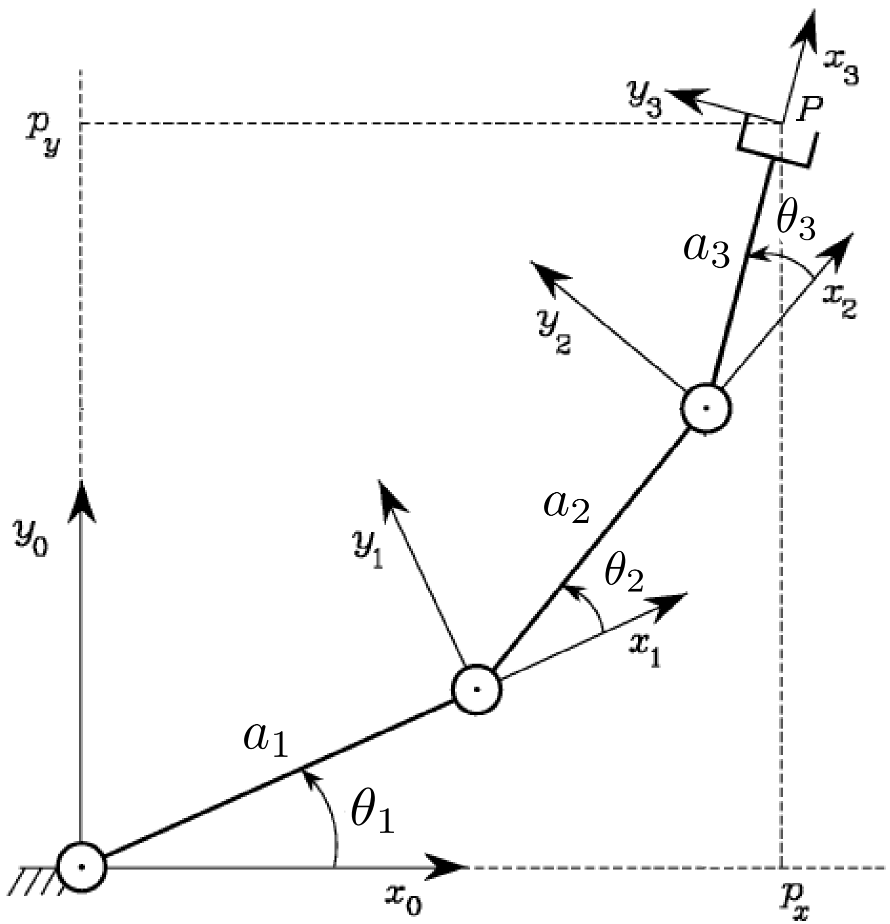
$\mathbf{J}^u$: Jacobien géométrique dans le repère "u"

Exemples

Calcul du jacobien d’un manipulateur

1. Manipulateur planaire à 3 segments (3 DDL)
2. Manipulateur anthropomorphe (3 DDL)
3. Manipulateur Stanford (6 DDL)

1 - Manipulateur planaire à 3 segments



Manipulateur planaire à 3 segments

Trois articulations rotoïdes. Le jacobien est donc :

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 3}$$

Les vecteurs de position des segments du robot sont :

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos\theta_1 \\ a_1 \sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

D’autre part, les vecteurs unitaires des axes des articulations sont (les axes sont tous parallèles à l’axe z_0) :

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = [0,\ 0,\ 1]^T$$

Rappel (produit vectoriel : voir TD3, Exercice 1)

- Si $\mathbf{v} = [v_1,\, v_2,\, v_3]^T$ et $\mathbf{w} = [w_1,\, w_2,\, w_3]^T$, le **produit vectoriel** de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ est défini par :

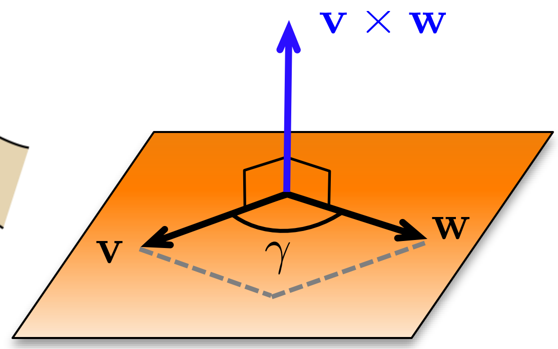
$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

- On peut aussi exprimer le produit vectoriel comme le produit d'une matrice antisymétrique et d'un vecteur :

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{w} \quad \text{avec} \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Interprétation géométrique :

Règle de la main droite



Le module du produit vectoriel est :

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\,|\sin\gamma|$$

Il est égal à l'aire du parallélogramme délimité par les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$

Manipulateur planaire à 3 segments

Conclusion :

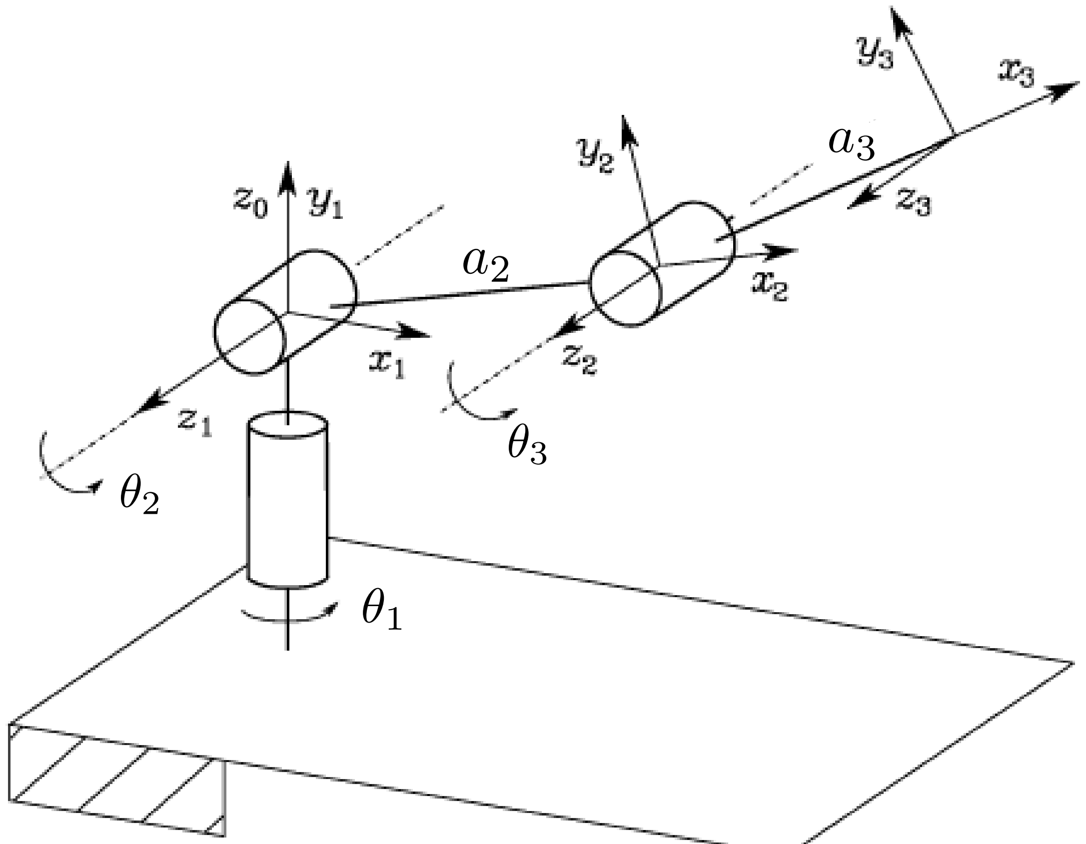
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque :

- Seulement les trois lignes du jacobien différentes de zéro sont importantes.
Elles sont relatives aux composantes de la vitesse linéaire le long des axes x_0 et y_0, et à la composante de la vitesse angulaire autour de l'axe z_0.
La dernière ligne du jacobien nous donne simplement la relation: $\omega_z = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3$

- En effet, les 3 DDL du robot permettent de spécifier au maximum 3 variables de l'effecteur : $v_z,\ \omega_x,\ \omega_y$ sont toujours zéro pour ce manipulateur

2 - Manipulateur anthropomorphe



Manipulateur anthropomorphe

Trois articulations rotoïdes. Le jacobien a encore la structure suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

Cette fois-ci les vecteurs de position des segments du robot sont :

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ a_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ a_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 (a_2 \cos\theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ \sin\theta_1 (a_2 \cos\theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ a_2 \sin\theta_2 + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}$$

et les vecteurs unitaires des axes des articulations rotoïdes sont :

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Manipulateur anthropomorphe

Conclusion :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarques :

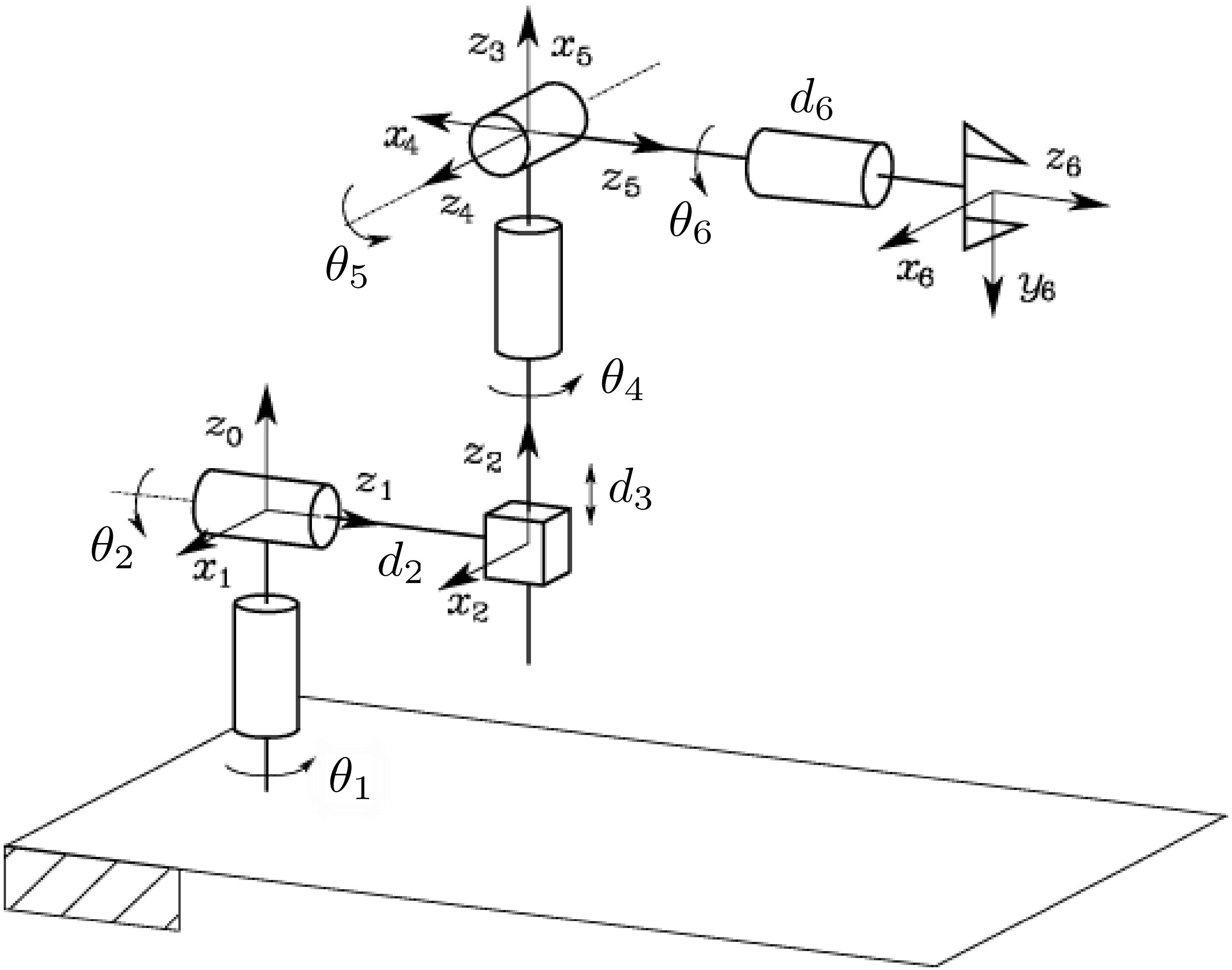
- Seulement 3 des 6 lignes du jacobien sont *linéairement indépendantes*
- La matrice

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}$$

décrit la rélation entre les vitesses angulaires $\dot{\theta}_1,\, \dot{\theta}_2,\, \dot{\theta}_3$ des trois articulations et la vitesse linéaire $\dot{\mathbf{p}}_e$ de l'effecteur

- Ce manipulateur ne permet pas une vitesse angulaire *arbitraire*. En effet, les deux composantes $\omega_x,\, \omega_y$ ne sont pas indépendantes : $\omega_y \sin\theta_1 = -\omega_x \cos\theta_1$

3 - Manipulateur Stanford



Manipulateur Stanford

Ce robot à 6 DDL est la combinaison d'un *manipulateur sphérique* (porteur) et d'un *poignet de type rotule*

Cinq articulations rotoïdes et une articulation prismatique (la 3e) :

$$\mathbf{q} = [\theta_1,\, \theta_2,\, d_3,\, \theta_4,\, \theta_5,\, \theta_6]^T$$

Segm.	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	$d_2{}^*$	θ_2
3	0	0	d_3	0
4	0	$\pi/2$	0	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	0	$d_6{}^*$	θ_6

Tableau des paramètres de DH

Le jacobien est donc :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_4) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_5) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs de position des segments du robot sont :

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} d_3 \cos\theta_1 \sin\theta_2 - d_2 \sin\theta_1 \\ d_3 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + d_2 \cos\theta_1 \\ d_3 \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

Manipulateur Stanford

et

$$\mathbf{p}_6 = \begin{bmatrix} d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 + d_6\big(c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5\big) \\ d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 + d_6\big(s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5\big) \\ d_3 c_2 + d_6(-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) \end{bmatrix}$$

Les vecteurs unitaires des axes des six articulations sont :

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} c_1\big(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5\big) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1\big(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5\big) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

À partir de ces vecteurs, on peut calculer le jacobien $\mathbf{J}$

Singularités cinématiques

- Le jacobien définit une application linéaire

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$$

entre le vecteur vitesse des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ et le vecteur vitesse de l’effecteur $\mathbf{v}_e = [\dot{\mathbf{p}}_e^T, \boldsymbol{\omega}_e^T]^T$

> **Définition** : Les configurations $\mathbf{q}$ où le jacobien $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ n’est pas de *plein rang* sont appelées **singularités cinématiques** du robot

Trouver les singularités d’un manipulateur est important, car :

1. Les singularités sont des configurations où la *mobilité du robot est réduite*, c’est-à-dire il n’est pas possible d'imposer un mouvement arbitraire à l'effecteur. Au voisinage des positions singulières, le robot perd des degrés de liberté

2. Si le robot est sur une singularité, on peut avoir une *infinité de solutions* au problème géométrique inverse

3. Au voisinage d'une singularité, des *petites vitesses* dans l’espace opérationnel peuvent engendrer des *grandes vitesses* dans l'espace articulaire

Singularités cinématiques

Remarque :

Les configurations d'un robot qui sont singulières pour le MGI, les sont aussi pour le jacobien

---

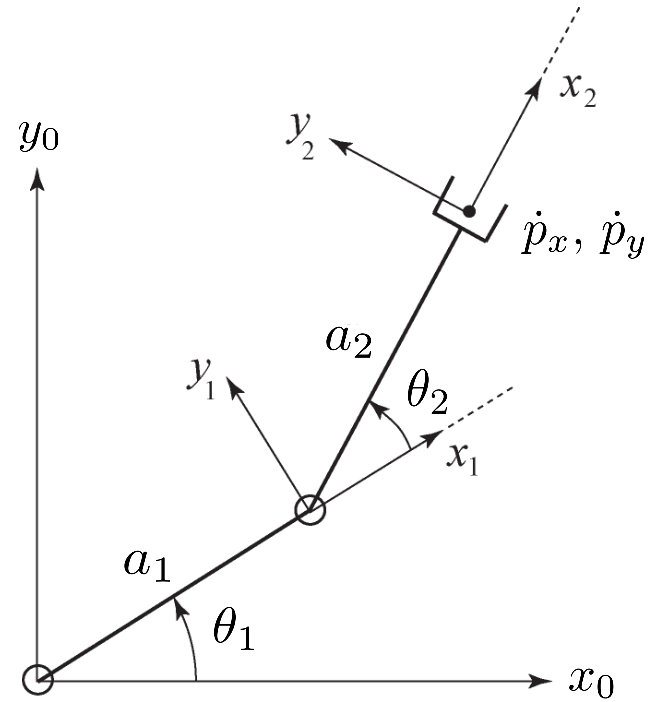
Il existe **deux types** de singularités :

1) Les singularités **aux limites du volume de travail** ("**type 1**") qui apparaissent lorsque le bras est complètement étendu (ou rétracté)
   - Elles peuvent être évitées : elles ne constituent pas un véritable problème, en pratique

2) Les singularités **à l'intérieur du volume de travail** ("**type 2**") qui apparaissent lors de l'*alignement* de deux ou plus axes du robot, ou pour des configurations particulières de l'effecteur
   - Elles sont critiques, car on peut les rencontrer partout dans le volume de travail

Singularités cinématiques

Exemple : Manipulateur planaire à 2 segments



On consider seulement les composantes de la vitesse linéaire $\dot{p}_x,\ \dot{p}_y$ de l'effectuer dans le plan

Le jacobien est donc la matrice 2 × 2:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

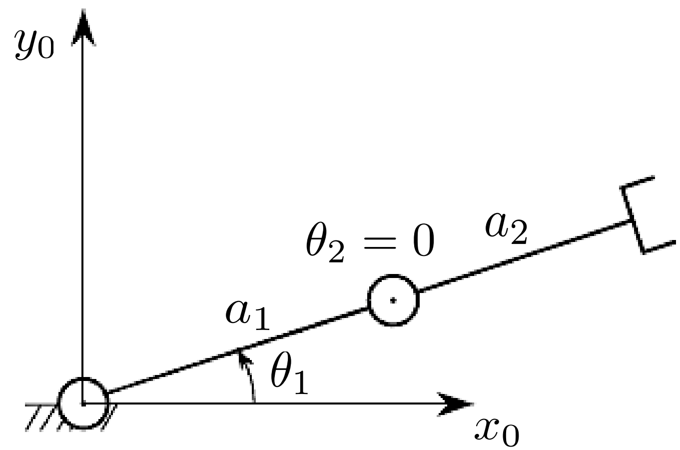
Étant une matrice carrée, pour étudier le rang de $\mathbf{J}$, on peut calculer son *déterminant*

Rappel : Étant donnée une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - cb$$

Singularités cinématiques

Exemple : Manipulateur planaire à 2 segments



- On trouve que :

$$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 \sin\theta_2$$

- Si $a_1,\ a_2 \neq 0$, le determinant est zéro lorsque :

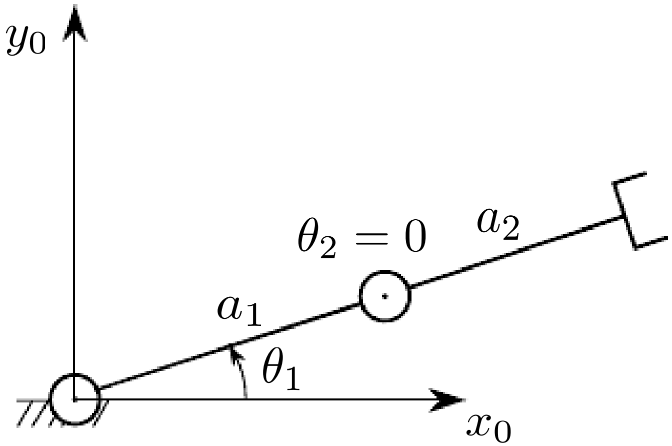
$$\theta_2 = 0,\ \ \theta_2 = \pi \ \text{ (bras complètement étendu ou rétracté)}$$

  et la valeur de θ_1 ne joue aucun rôle dans l'étude des configurations singulières

- Les deux singularités sont de **type 1** (aux limites du volume de travail)

Singularités cinématiques

Exemple : Manipulateur planaire à 2 segments



- Si on analyse le mouvement différentiel pour $\theta_2 = 0$, on observe que les deux colonnes du jacobine :

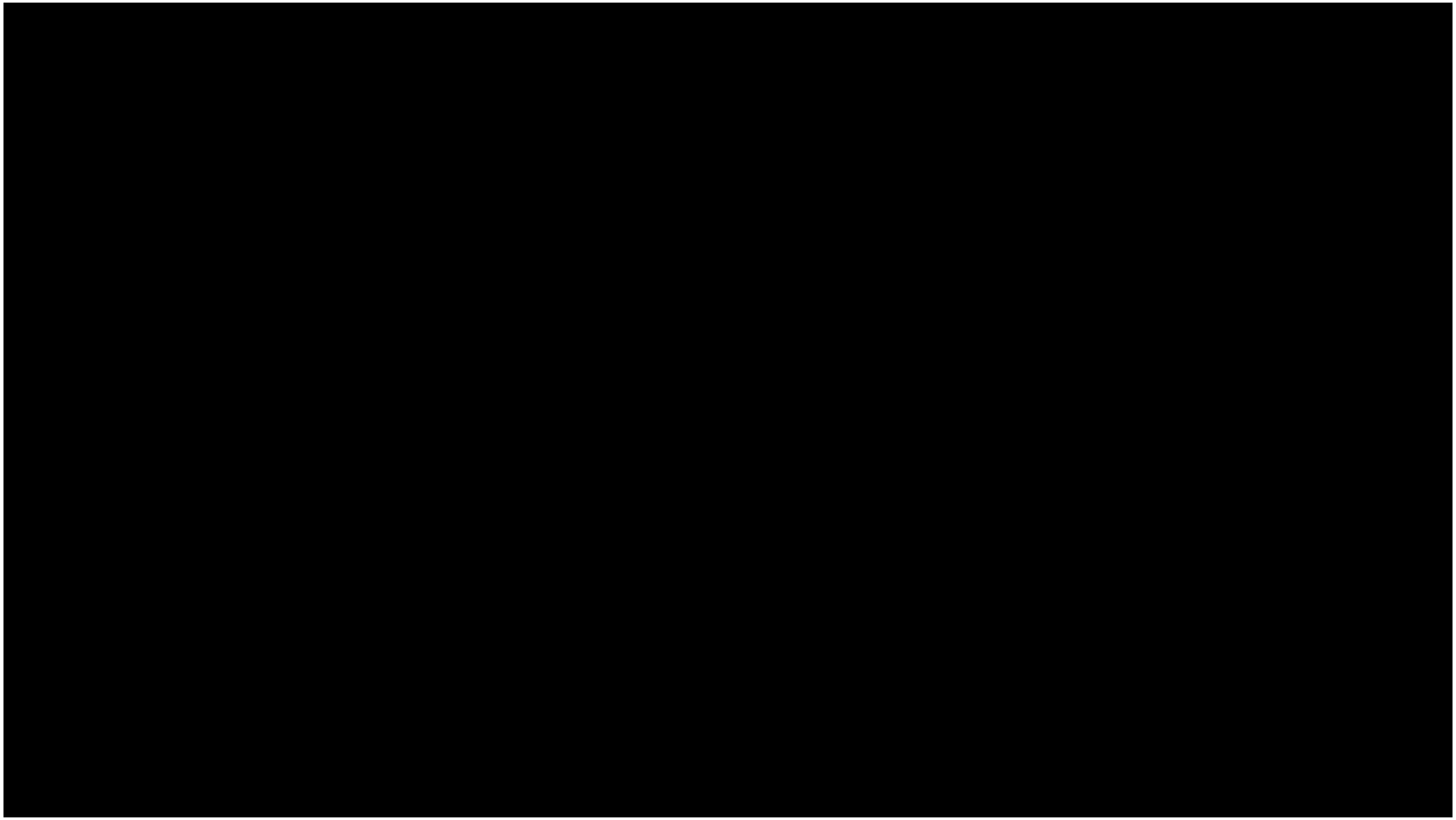
$$\begin{bmatrix} -(a_1 + a_2)\sin\theta_1 \\ (a_1 + a_2)\cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -a_2 \sin\theta_1 \\ a_2 \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

  deviennent parallèles et que le rang du jacobien devient 1

- Cela veut dire que les composantes de la vitesse de l'effecteur $\dot{p}_x,\ \dot{p}_y$ ne sont pas indépendantes

Singularités cinématiques

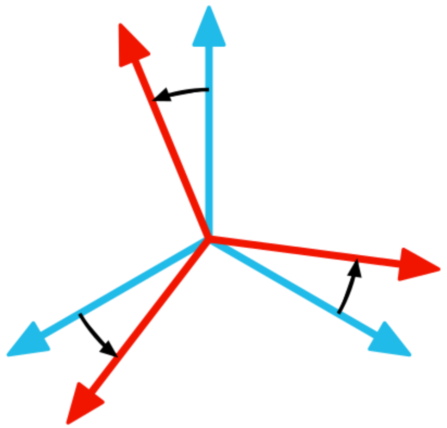
- Singularités d’un robot à 6 DDL (porteur anthropomorphe et poignet de type rotule) au niveau du poignet (“wrist”), coude (“elbow”) et épaule (“shoulder”)



Plan du cours

2.2 Cinématique

- Dérivée d'une matrice de rotation
- Vitesse angulaire d'un repère
- Mouvement de corps rigide
- Torseur cinématique



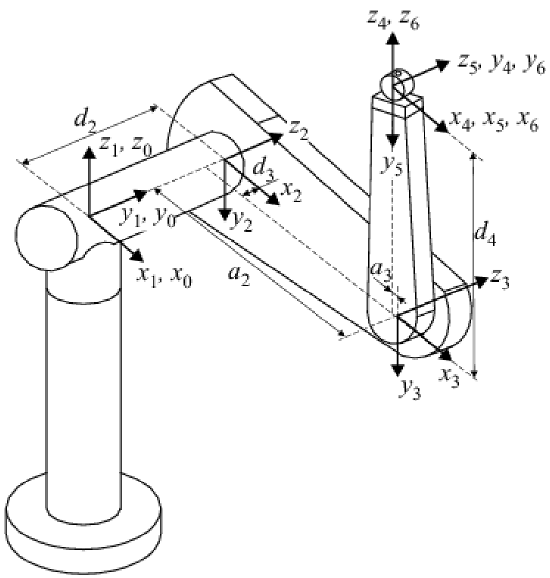
Chapitre 3 : Modélisation d'un Robot

3.1 Modèle géométrique

- Convention de Denavit-Hartenberg
- Modèle géométrique direct
- Modèle géométrique inverse

3.2 Modèle cinématique

- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse



Modèle cinématique inverse

Problème cinématique inverse : déterminer les vitesses $\dot{\mathbf{q}}$ des articulations d'un robot afin d'atteindre une vitesse de l'effecteur $\mathbf{v}_e$ donnée

I. Cas régulier : Si le jacobien est *carré* et de *plein rang*, nous avons que :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\,\mathbf{v}_e$$

Remarque : si $\mathbf{q}(0)$ est connu, la position des articulations peut être obtenue par integration des vitesses articulaires dans le temps :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\tau)\,d\tau$$

On peut intégrer cette équation différentielle en temps discret en utilisant, par exemple la *méthode d'intégration d'Euler*. Si le pas d'intégration Δt et les positions et vitesses au temps t_k sont connues, les positions des articulations au temps $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ peuvent être calculées via :

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k))\,\mathbf{v}_e(t_k)\,\Delta t$$

Ceci permet ainsi de trouver *une solution* au **problème géométrique inverse**

Modèle cinématique inverse

II. Cas redondant : si le robot est *cinématiquement redondant*, $r < n$ où n est le nombre de DDL du robot et r le nombre de variables de l'espace opérationnel nécessaires à spécifier une tâche donnée, alors le jacobien a plus de colonnes que de lignes et $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$ a un *nombre infini* de solutions.

$n - r$ représente le **degré de redondance** du robot

$$\begin{array}{cc} & n \\ r & \boxed{\quad\mathbf{J}\quad} \end{array}$$

Plusieurs méthodes de résolution sont alors envisageables :

a) Ajouter $n - r$ *relations supplémentaires* pour que $\mathbf{J}$ devienne carrée (par ex. blocage d'articulation, contrainte d'optimisation)

b) Trouver une *solution particulière* en ne considérant que r articulations (au lieu de n), puis calculer les valeurs de toutes les articulations en prenant en compte un critère d'optimisation

c) Utiliser la méthode de résolution basée sur la notion de **pseudo-inverse**

Modèle cinématique inverse

c) Résolution basée sur la notion de **pseudo-inverse**. On reformule le problème comme un *problème d'optimisation linéaire sous constraintes*

- Le**s** solution**s** du problème d'inversion sont :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{v}_e + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{J})\,\dot{\mathbf{q}}_0$$

où $\mathbf{J}^{\dagger}$ est la *pseudo-inverse* de Moore-Penrose (à droite) de $\mathbf{J}$, à savoir :

$$\mathbf{J}^{\dagger} = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\,\mathbf{J}^T)^{-1}$$

- Le **1er terme**, $\mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{v}_e \in \mathrm{Im}(\mathbf{J}^T)$, est la solution qui minimise $\|\mathbf{v}_e - \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{q}}\|$ (erreur au sens des moindres carrés) et qui minimise aussi (localement) la norme du vecteur des vitesses articulaires, à savoir $\|\dot{\mathbf{q}}\|$

- Le **2e terme**, $(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{J})\,\dot{\mathbf{q}}_0$, s'appelle *solution homogène*. Le vecteur de vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}_0$ n'est pas unique : il peut être utilisé pour satisfaire des contraintes supplémentaires (avec une *priorité secondaire* par rapport à la contrainte cinématique primaire)

$\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{J}$ projette $\dot{\mathbf{q}}_0$ dans le $\ker(\mathbf{J})$ pour ne pas violer $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$

En fait, le noyau ou kernel de $\mathbf{J}$, $\ker(\mathbf{J})$, est le sous-espace des vitesses articulaires qui n'engendrent *aucune vitesse* sur l'effecteur, pour une posture donnée $\mathbf{q}$ du robot

Modèle cinématique inverse

Problème : comment spécifier $\dot{\mathbf{q}}_0$ pour une utilisation convenable des DDL redondants du robot ?

- *Choix typique* : vecteur gradient d'une fonction scalaire de $\mathbf{q}$:

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = k_0 \left(\frac{\partial\, w(\mathbf{q})}{\partial\, \mathbf{q}} \right)^T$$

où

$k_0 > 0$: paramètre (gain)

$w(\mathbf{q})$: fonction objectif (ou de coût) secondaire

Choix possibles de la fonction $w(\mathbf{q})$:

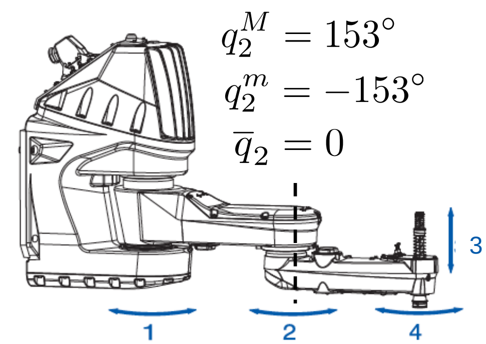
1. **Mesure de manipulabilité :**

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det\big(\mathbf{J}(\mathbf{q})\,\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\big)}$$

Nous avons que $w(\mathbf{q}) = 0$ dans une singularité. Ainsi, si on maximize cette mesure, la redondance du robot est utilisée pour s'écarter des singularités

Modèle cinématique inverse

FAST picker TP80 de Stäubli (4 DDL)



2. Distance des butées mécaniques :

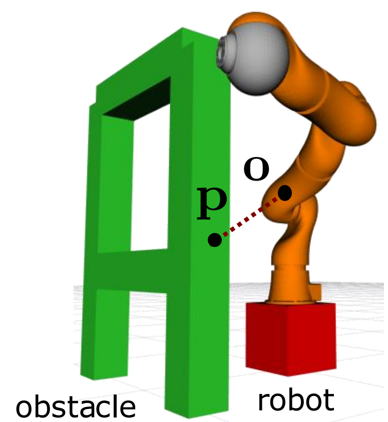
$$w(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i - \overline{q}_i}{q_i^M - q_i^m}\right)^2$$

où q_i^M, q_i^m sont les valeurs maximales et minimales de l'articulation i et $\overline{q}_i$ est sa valeur moyenne. Ici, en maximisant $w(\mathbf{q})$, on exploite la redondance du robot pour garantir que la distance qui sépare chaque articulation de sa position moyenne soit minimale

3. Distance d'un obstacle :

La redondance peut être utilisée pour éviter les collisions entre le manipulateur et un obstacle :

$$w(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{p},\,\mathbf{o}} \|\mathbf{p}(\mathbf{q}) - \mathbf{o}\|$$



où

$\mathbf{p}$: position d'un point sur l'obstacle (le centre, pour des obstacles sphériques)

$\mathbf{o}$: position d'un point générique sur le bras du robot

Modèle cinématique inverse

III. Cas singulier :

- Les solutions précédentes (*cas régulier* et *cas redondant*) peuvent être calculées uniquement si le jacobien est de **plein rang**

- Ces solutions perdent toute signification lorsque le manipulateur se trouve dans une *configuration singulière*. Dans ce cas, le système

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{q}}$$

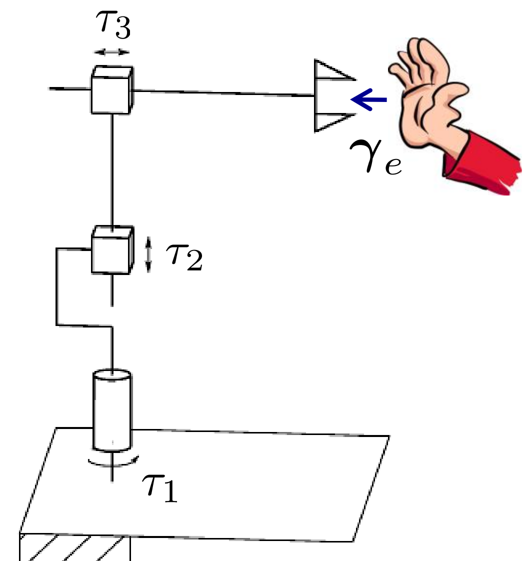
  contient des équations linéairement dépendantes

- Pour résoudre le problème d'inversion du modèle cinématique *au voisinage d'une singularité*, on peut recourir à une inversion par moindres carrés amortis

$$\mathbf{J}^{\star} = \mathbf{J}^{T}(\mathbf{J}\mathbf{J}^{T} + k^{2}\mathbf{I})^{-1}$$

où $k \geq 0$ est un *facteur d'amortissement* qui rend l'inversion mieux conditionnée du point de vue numérique et $\mathbf{I}$ est la matrice identité. On peut constater que si $k = 0$ alors $\mathbf{J}^{\star} = \mathbf{J}^{\dagger}$, c'est-à-dire, on retrouve la pseudo-inverse du jacobien $\mathbf{J}$

Statique



Objectif de la statique : étant donné un manipulateur dans une configuration d'*équilibre statique*, déterminer la rélation entre les forces généralisées appliquées sur l'effecteur et les forces généralisées appliquées sur les articulations (forces pour les articulations prismatiques et couples pour les articulations rotoïdes)

Soient :

$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$: vecteur des forces généralisées exercées par les actionneurs sur les articulations du robot

$\boldsymbol{\gamma}_e \in \mathbb{R}^r$: vecteur des forces généralisées agissant sur l'effecteur, où r est la dimension de l'espace opérationnel d'intérêt

L'application du **Principe des Travaux Virtuels** permet d'écrire l'équation :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\, \boldsymbol{\gamma}_e}$$

La **transposée du jacobien géométrique** d'un manipulateur met donc en relation les forces sur l'effecteur avec les forces sur les n articulations

Jacobien analytique

- Si la pose de l'effecteur du robot est spécifiée avec un nombre minimal de paramètres dans l'espace opérationnel, nous pouvons obtenir *analytiquement* l'équation de la cinématique en dérivant le MGD $\mathbf{x}_e = [\mathbf{p}_e^T, \boldsymbol{\phi}_e^T]^T = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$$

où

$\mathbf{p}_e$: origine du repère de l'effecteur par rapport à la base

$\boldsymbol{\phi}_e$: *représentation minimale* de l'orientation de l'effecteur (3 variables, par ex. les angles de Euler) dans l'espace opérationnel

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial\,\mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial\,\mathbf{q}}$$: jacobien analytique

- Le *jacobien analytique* $\mathbf{J}_A$ est **différent** du *jacobien géométrique* $\mathbf{J}$ car la vitesse angulaire de l'effecteur par rapport à la base, $\boldsymbol{\omega}_e$, ne coïncide pas avec $\dot{\boldsymbol{\phi}}_e$, en général

Pour un aperçu des algorithmes basés sur le jacobien analytique qui permettent de calculer le modèle cinématique inverse (MCI), voir le Ch. 3.7, pp. 132-147, du livre de Siciliano, Sciavicco, Villani et Oriolo