

TD 1 : Matrices de rotation et matrices homogènes

Exercice 1 (Matrices de rotation) :

1. Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ de coordonnées $[0, 1, 0]^T$ subit successivement une rotation de 90° autour de l'axe x et de 90° autour de l'axe y . Donnez la matrice de rotation globale. Vérifiez graphiquement.
2. Trouvez les composants du vecteur $\overrightarrow{OP} = [1, 1, 0]^T$ après une translation de $[0, 0, 1]^T$ suivie d'une rotation de 60° autour de l'axe z .

Attention : On considère ici des rotations par rapport à un *repère fixe* (le repère initial).

Exercice 2 (Matrices homogènes) :

1. Déterminer la matrice de transformation $\mathbf{A}$ correspondant à une rotation autour de l'axe x d'un angle $\theta = 30^\circ$, puis une translation le long de l'axe y d'une longueur $d = 3$ m.
2. Déterminer la matrice de transformation $\mathbf{A}'$ correspondant à une translation le long de l'axe y d'une longueur $d = 3$ m suivie d'une rotation autour de l'axe x de $\theta = 30^\circ$.
3. Vérifier graphiquement que le produit matriciel n'est pas commutatif.

Exercice 3 (Matrices homogènes) :

On fait une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe y , suivie d'une translation de $d = 2$ m suivant l'axe x et d'une rotation de $-\pi/2$ autour de l'axe z .

1. Quelles sont les coordonnées du point dans le repère initial (de référence) sachant que ses coordonnées (homogènes) dans le repère final sont $[0, 3, 0, 1]^T$? Vérifier le résultat graphiquement.
2. Connaissant les coordonnées (homogènes) d'un point $[1, 2, 0, 1]^T$ dans le repère de référence, quelles sont ses coordonnées dans le repère final ? Trouver le résultat par deux méthodes différentes. Vérifier le résultat graphiquement.

Exercice 4 (Conversion entre représentations de l'orientation 3D) :

Étant donné la matrice de rotation $\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\pi/3)\mathbf{R}_x(\pi/4)$, déterminer :

1. Les angles de roulis, tangage et lacet (φ, θ, ψ),
2. Les paramètres θ et $\mathbf{r}$ de la représentation angle et axe,
3. Le quaternion unitaire $\mathcal{Q}$,

qui correspondent à la matrice $\mathbf{R}$. Vérifier vos résultats avec les commandes Matlab `rotm2eul`, `rotm2axang` et `rotm2quat`.

Exercice 5 (Modèle géométrique d'un robot planaire) :

Soit le robot planaire à 2 DDL (RR) de la Figure 1 auquel un référentiel est associé à chaque segment. En utilisant les matrices de transformation homogènes, déterminer la position et l'orientation de l'organe effecteur (point P) par rapport au référentiel de la base fixe (c'est-à-dire, par rapport au repère $O_0-x_0y_0z_0$).

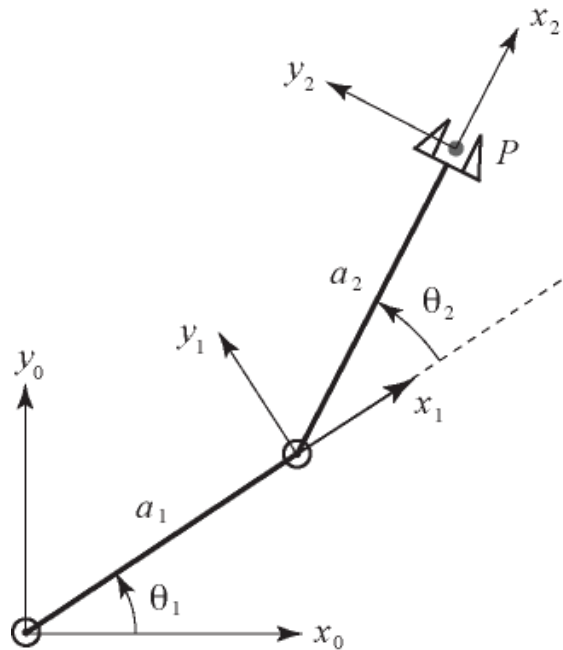


Figure 1 : Robot planaire à 2 DDL

Exercice 6 (Robot mobile) :

Le robot mobile Pioneer 3-AT montré dans la Figure 2 possède deux capteurs embarqués : une caméra, avec repère $O_C-x_Cy_Cz_C$, et un laser, avec repère $O_L-x_Ly_Lz_L$. Les repères $O_W-x_Wy_Wz_W$ et $O_R-x_Ry_Rz_R$ désignent respectivement le repère monde et le repère attaché au robot. Pour plus de simplicité, on fera l'hypothèse que l'origine O_R du repère robot coïncide avec le centre de gravité du robot. En sachant que les coordonnées du point P dans le repère caméra sont $\mathbf{p}^C \in \mathbb{R}^3$, déterminer $\mathbf{p}^L$, $\mathbf{p}^R$ et $\mathbf{p}^W$.

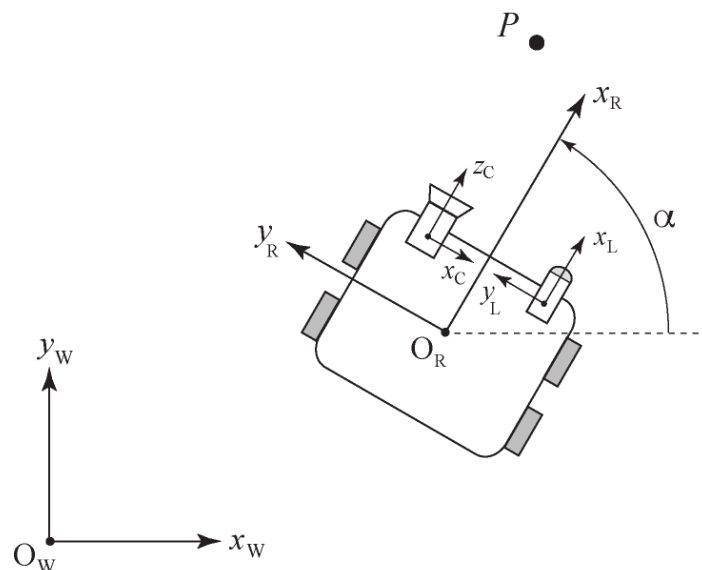


Figure 2 : Robot mobile avec caméra (« C ») et laser (« L ») embarqués.

Exercice 7 (Grue à tour) :

La Figure 3 montre une grue à tour (ou de chantier) en train de soulever une charge de masse m . Le bras horizontal de la grue peut tourner autour de l'axe vertical d'un angle θ et la charge peut être déplacée à une distance L et à une hauteur h par rapport à la base.

1. Déterminer le volume de travail de la grue.
2. Déterminer le vecteur des variables articulaires $\mathbf{q}$.
3. Calculer le modèle géométrique direct de la grue.
4. Quel est l'effet de la masse m de la charge, sur la précision de positionnement de la grue ?

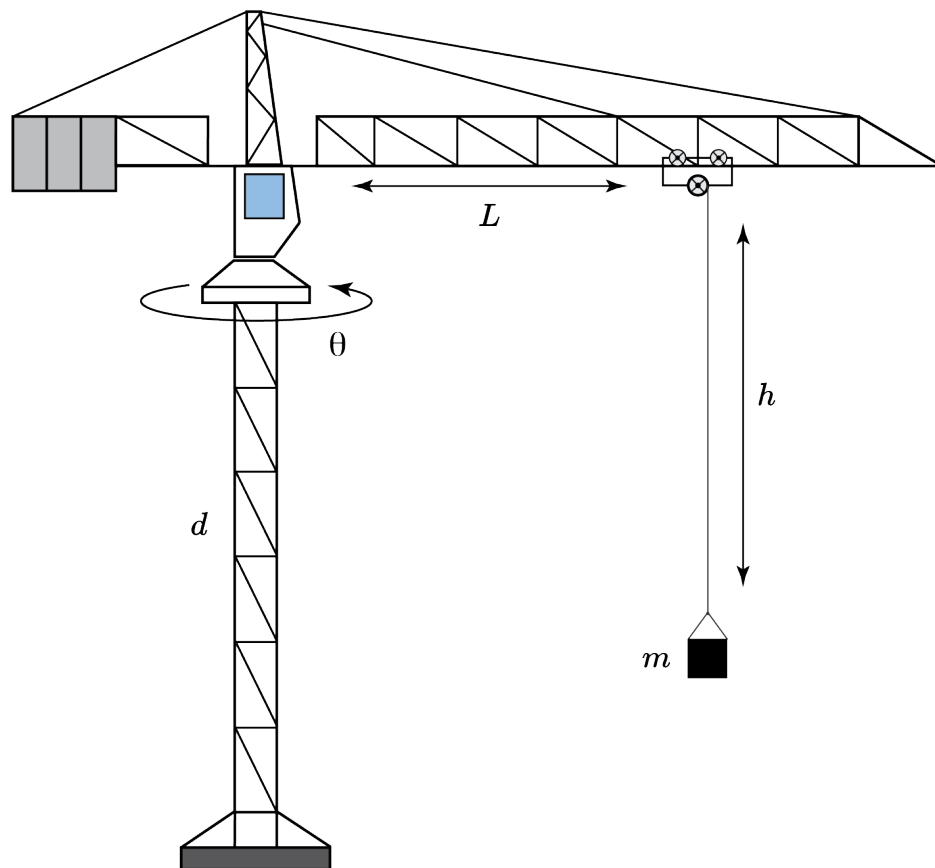


Figure 3 : Grue à tour.