TD 1 : Propagation d'incertitude

Solution

<u>Exercice I</u> : Loi d'Ohm

On mesure la tension d'une résistance quand celle-ci est traversée par un courant. Si la tension mesurée $V_m = V \pm \sigma_V$ et le courant mesuré $I_m = I \pm \sigma_I$ où σ_V et σ_I sont les incertitudes (écarts types) sur V_m et I_m, respectivement:

1. Evaluer l'incertitude sur le calcul de la résistance R.
2. Quelles sont vos conclusions ?

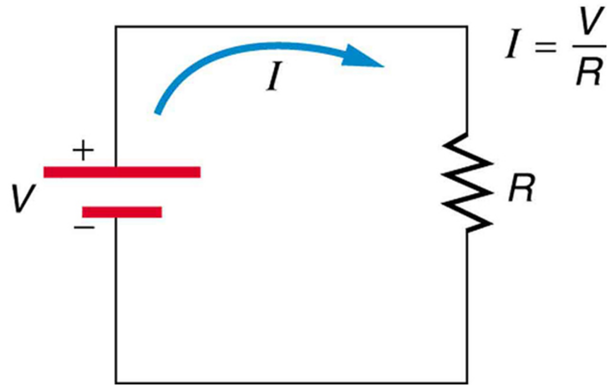

Figure 1 : Resistance traversée par un courant.

Solution:

1. Par la loi d'Ohm, nous savons que la tension V = RI et donc que R = V/I. Nous savons aussi que $V_m = V \pm \sigma_V$ et que $I_m = I \pm \sigma_I$. Notre objectif est de calculer $\mathrm{Var}[R] = \sigma_R^2$.

La loi de propagation d'incertitude vue en cours (cf. Chapitre 1, Partie 4), nous dit que la variance d'une certaine fonction **f** de la variable aléatoire vectorielle **X**, peut être calculée *de façon approchée* en utilisant la formule suivante:

$$\mathrm{Var}[\mathbf{f}(\mathbf{X})] \cong \mathbf{J_f}(\mathbf{X}_0)\mathrm{Var}[\mathbf{X}]\mathbf{J_f}(\mathbf{X}_0)^T$$

où $\mathbf{J_f}(\mathbf{X}_0)$ est la matrice jacobienne de la fonction **f** évaluée sur le point $\mathbf{X}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{X}]$ et $\mathrm{Var}[\mathbf{X}]$ est la variance du vecteur aléatoire **X.**

Dans notre problème particulier, nous avons que la fonction **f** est scalaire et elle est donnée par $f(\mathbf{X}) = f(V,I) = V/I$. En outre, l'espérance de notre vecteur aléatoire **X** est simplement $[V, I]^T$. Le calcul de la matrice jacobienne de f(V, I), nous donne,

$$\mathbf{J}_f(V, I) = [\partial f/\partial V, \partial f/\partial I] = [1/I, -V/I^2].$$

Sous l'hypothèse de mesures non corrélées, nous obtenons enfin:

$$\mathrm{Var}[R] \cong [1/I, -V/I^2]\ \mathrm{diag}(\sigma_V^2, \sigma_I^2)\ [1/I, -V/I^2]^T = \sigma_V^2/I^2 + V^2\sigma_I^2/I^4.$$

2. À partir de la formule précédente, nous pouvons remarquer que si le courant I est "grand" et la tension V est "petite", la variance σ_V^2 aura un impact plus important sur Var[R] que σ_I^2.

<u>Exercice II</u> : Volume et aire totale d'un cylindre

Sachant que les erreurs relatives sont de 3% sur le rayon r et de 2% sur la hauteur h, calculer les erreurs relatives sur le volume et sur l'aire totale d'un cylindre circulaire droit.

Solution:

a. <u>Volume du cylindre</u>:

Le volume d'un cylindre circulaire droit de rayon r et de hauteur h est donné par la formule $V = \pi r^2 h$. Nous savons que $r_m = r \pm 0.03r$ et que $h_m = h \pm 0.02h$. Pour calculer Var[V], nous pouvons utiliser la loi de propagation d'incertitude. Cela nous donne,

$$\mathrm{Var}[V] \cong \mathbf{J}_f(r, h)\mathrm{Var}[(r, h)^T]\mathbf{J}_f(r, h)^T$$

où

$$\mathbf{J}_f(r, h) = [\partial f/\partial r, \partial f/\partial h] = [2\pi rh, \pi r^2].$$

Sous l'hypothèse de mesures non corrélées, nous obtenons:

$$\mathrm{Var}[V] \cong [2\pi rh, \pi r^2]\ \mathrm{diag}((0.03r)^2, (0.02h)^2)[2\pi rh, \pi r^2]^T = 0.4 \times 10^{-2}\, \pi^2\, r^4\, h^2.$$

Donc

$$V_m = \mathbb{E}[V] \pm \mathrm{Var}[V]^{1/2} = \pi r^2 h \pm 0.063\pi r^2 h$$

qui correspond à une erreur relative de 6.3% sur le volume du cylindre.

b. <u>Aire totale du cylindre</u>:

L'aire totale d'un cylindre circulaire droit de rayon r et de hauteur h est donnée par la formule $A = 2\pi r(h + r)$. Pour calculer Var[A], nous pouvons utiliser à nouveau la loi de propagation d'incertitude, qui nous donne:

$$\mathrm{Var}[A] \cong \mathbf{J}_f(r, h)\mathrm{Var}[(r, h)^T]\mathbf{J}_f(r, h)^T$$

où

$$\mathbf{J}_f(r, h) = [\partial f/\partial r, \partial f/\partial h] = [2\pi(h + 2r), 2\pi r].$$

Sous l'hypothèse de mesures non corrélées, nous obtenons enfin:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[A] &\cong [2\pi(h + 2r), 2\pi r]\ \mathrm{diag}((0.03r)^2, (0.02h)^2)\ [2\pi(h + 2r), 2\pi r]^T \\ &= (2\pi r)^2\, [0.03^2\,(h + 2r)^2 + 0.02^2 h^2].\end{aligned}$$

Donc

$$A_m = \mathbb{E}[A] \pm \mathrm{Var}[A]^{1/2} = 2\pi r(h + r) \pm 2\pi r[0.03^2\,(h + 2r)^2 + 0.02^2 h^2]^{1/2}.$$

Exercice III : Ajustement de droite

Dans une image on détecte N points de contours de coordonnées (x_i, y_i), $i = 1,2,...,N$.

Ces points sont détectés avec une incertitude σ_x et σ_y sur les deux axes principaux. On souhaite calculer une droite d'équation $y = ax + b$ passant par les N points.

1. Donner l'expression des coefficients a et b.
2. Donner les incertitudes σ_a et σ_b sur les coefficients estimés a et b.

Solution:

Dans le cours (cf. Chapitre 1, Partie 4), nous avons vu l'ajustement de droites réalisé par la méthode des moindres carrés. La seule différence dans cet exercice est que la droite est représentée en coordonnées cartésiennes et pas en coordonnées polaires. Donc, nous avons $y = ax + b$ (où x est la variable muette) au lieu de $\rho\cos(\theta - \alpha) - r = 0$, et les paramètres à estimer par la méthode des moindres carrés sont (a, b) au lieu de (r, α).