TD 2 : Fusion des mesures

Exercice I : Moindres carrés récursifs

Un capteur de pression fournit n mesures incertaines y_1, y_2,..., y_n. Les mesures, non corrélées, sont entachées par un bruit blanc gaussien à moyenne zéro et variance σ^2 et sont prises de façon séquentielle (c'est-à-dire, une mesure à la fois). On souhaite vérifier si le capteur a un comportement linéaire. Dans ce but, à chaque nouvelle mesure y_k, on cherche la droite d'équation $y = at + b$, où t est la variable indépendante (le temps), qui mieux explique les données de pression disponibles (voir la Figure 1).

1. Mettre en œuvre un estimateur récursif qui permet de résoudre le problème d'ajustement de droite. Étudier l'effet de la variance σ^2 sur les résultats de l'estimateur.

2. Modifier l'estimateur développé au point 1, pour l'ajustement d'une courbe quadratique d'équation $y = at^2 + bt + c$, sur les mêmes mesures de pression.

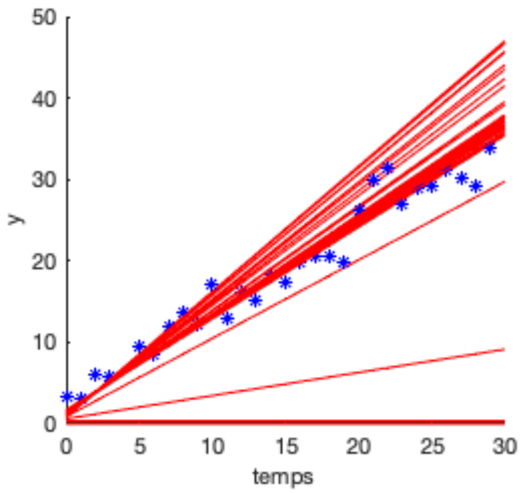

Figure 1 : Évolution de la droite estimée (rouge). Les mesures sont représentées par des points bleus.

Exercice II : Estimation de la position d'un chariot à roues

On considère un chariot à deux roues encodeuses qui avance pas-à-pas (voir la Figure 2). Le chariot est aussi équipé d'un laser qui fournit des mesures de distance en mètres. On souhaite combiner les deux capteurs pour connaître sa position précise. Les mesures des deux capteurs sont non corrélées et entachées par un bruit blanc gaussien, comme montré dans la Figure 3.

1. Donner une interprétation physique à la Figure 3. Considérez maintenant le cas inverse, c'est-à-dire : $\sigma_{odom} = 0.1$ m et $\sigma_{laser} = 0.01$ m. Qu'est-ce que ça change ?

2. Écrire les équations du filtre de Kalman et donner la signification de chacune des matrices qui entrent en jeu dans la phase de prédiction et dans la phase de correction.

3. Écrire un programme Matlab qui permet de mettre en œuvre les équations du filtre de Kalman pour estimer la position du chariot au fil du temps.

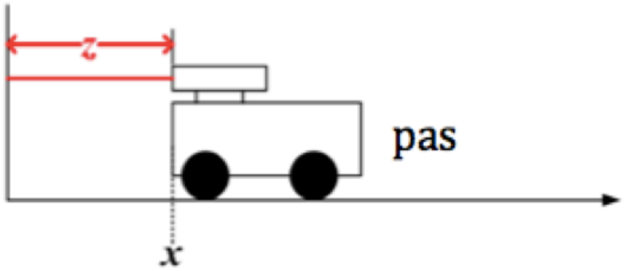

Figure 2 : Chariot à deux roues encodeuses avec laser embarqué, avançant d'un pas.

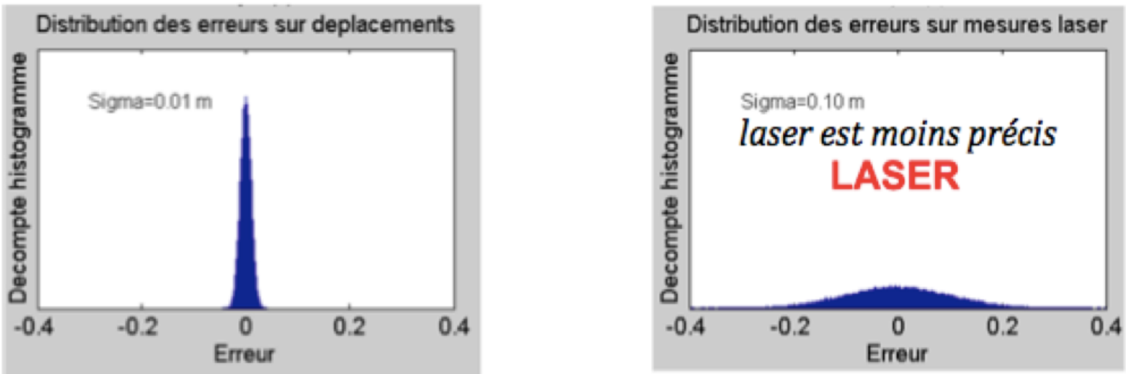

Figure 3 : (à gauche) incertitude de l'odométrie, σ_{odom} = 0.01 m; (à droite) incertitude du capteur laser, σ_{laser} = 0.1 m.

Exercice III : Fusion des mesures d'un gyroscope et d'un compas magnétique

On considère un plateau rotatif où sont placés un gyroscope et un compas magnétique.

1. En s'appuyant sur le système dynamique vu en cours, écrire les équations du filtre de Kalman pour fusionner les mesures du gyroscope et du compas.

2. Écrire un programme Matlab qui permet de mettre en œuvre les équations du filtre de Kalman et d'estimer la position et la vitesse angulaire du plateau au fil du temps.

Exercice IV : Localisation d'un drone à partir de mesures de distance

La position $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, la vitesse $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ et l'accélération $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ d'un drone dans un repère fixe {W}, évoluent dans le temps selon le modèle dynamique à temps discret suivant :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\,\mathbf{w}(k)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \delta\,\mathbf{I}_3 & \frac{\delta^2}{2}\,\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_3 & \delta\,\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2}{4}\,\mathbf{I}_3 \\ \frac{\delta}{2}\,\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2}{2}\,\mathbf{I}_3 \\ \delta\,\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix}$$

δ est le pas de discrétisation et $\mathbf{I}_3$ et $\mathbf{0}_{3\times3}$ sont la matrice identité 3×3 et la matrice de zéros 3×3, respectivement (voir la Figure 4). En outre, $\mathbf{x} = [\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{a}^T]^T \in \mathbb{R}^9$ est le vecteur d'état

du système, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ est l'entrée *connue* du système (la variation du vecteur accélération ou « jerk » du drone) et $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ est le bruit de modèle. On fera l'hypothèse que $\mathbf{w}$ soit un bruit blanc gaussien à moyenne zéro avec matrice de covariance $\mathbf{Q}' = \sigma_{\mathbf{w}}^2 \mathbf{I}_3$.
Enfin, les mesures $z_i(k)$ dont le drone dispose à l'instant k, sont les distances par rapport à $n \geq 3$ balises de position connue $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (les points noirs en Figure 4), c'est-à-dire:

$$z_i(k) = \|\mathbf{p}(k) - \mathbf{s}_i\| + r_i(k)$$

où $r_i(k)$ est le bruit de mesure, un bruit blanc gaussien à moyenne zéro et variance $\sigma_{r,i}^2$.

Écrire un programme Matlab qui permet de mettre en œuvre les équations du filtre de Kalman étendu (EKF) pour estimer l'état courant du drone à partir des mesures de distance des balises. Considérer $\delta = 0.1$ s, $\sigma_{\mathbf{w}} = 10^{-3}$ m/s² et $\sigma_{r,i} = 0.05$ m pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et distribuer les n balises de façon uniforme dans l'espace 3D.

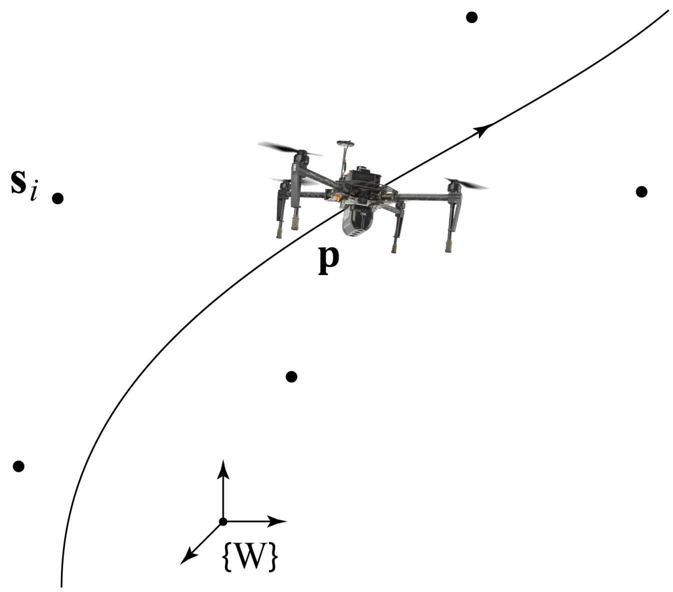

Figure 4 : Localisation d'un drone à partir des mesures de distance de n balises de position connue $\mathbf{s}_i$.