TD 1 : Propagation d'incertitude

Solution

<u>Exercice I</u> : Loi d'Ohm

On mesure la tension d'une résistance quand celle-ci est traversée par un courant. Si la tension mesurée $V_m = V \pm \sigma_V$ et le courant mesuré $I_m = I \pm \sigma_I$ où σ_V et σ_I sont les incertitudes (écarts types) sur V_m et I_m, respectivement :

1. Evaluer l'incertitude sur le calcul de la résistance R.
2. Quelles sont vos conclusions ?

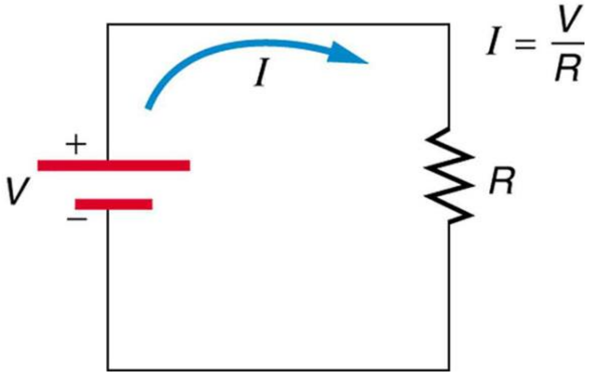

Figure 1 : Résistance traversée par un courant.

Solution :

1. Par la loi d'Ohm, nous savons que la tension $V = RI$ et donc que $R = V/I$. Nous savons aussi que $V_m = V \pm \sigma_V$ et que $I_m = I \pm \sigma_I$. Notre objectif est de calculer $\sigma_R = \mathrm{Var}[R]^{1/2}$.

La loi de propagation d'incertitude vue en cours (cf. Chapitre 1, Partie 4), nous dit que la variance d'une certaine fonction $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ de la variable aléatoire vectorielle $\mathbf{X}$, peut être calculée *de façon approchée* en utilisant la formule suivante :

$$\mathrm{Var}[\mathbf{f}(\mathbf{X})] \cong \mathbf{J}_\mathbf{f}(\mathbf{X}_0)\, \mathrm{Var}[\mathbf{X}]\, \mathbf{J}_\mathbf{f}^{T}(\mathbf{X}_0)$$

où $\mathbf{J}_\mathbf{f}(\mathbf{X}_0)$ est la matrice jacobienne de la fonction $\mathbf{f}$ évaluée sur le point $\mathbf{X}_0 = E[\mathbf{X}]$ et $\mathrm{Var}[\mathbf{X}]$ est la variance du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$.

Dans le problème en question, nous avons que la fonction $\mathbf{f}$ est scalaire et elle est donnée par $f(\mathbf{X}) = f(V, I) = V/I$. En outre, l'espérance de notre vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ est simplement $[V, I]^T$. Le calcul de la matrice jacobienne de $f(V, I)$, nous donne :

$$\mathbf{J}_f(V, I) = [\partial f/\partial V, \partial f/\partial I] = [1/I, -V/I^2].$$

Sous l'hypothèse de mesures non corrélées, nous obtenons :

$$\mathrm{Var}[R] \cong [1/I, -V/I^2]\, \mathrm{diag}(\sigma_V^2, \sigma_I^2)\, [1/I, -V/I^2]^T = \sigma_V^2/I^2 + V^2 \sigma_I^2/I^4.$$

L'incertitude sur R recherchée, est donc $\sigma_R = \mathrm{Var}[R]^{1/2} \cong (\sigma_V^2 + V^2 \sigma_I^2/I^2)^{1/2}/I$.

2. À partir de la formule précédente, nous pouvons remarquer, entre autres, que si le courant I est "grand" et la tension V est "petite", la variance σ_V^2 aura un impact plus important sur l'incertitude de R que σ_I^2.

<u>Exercice II</u> : Volume et aire totale d'un cylindre

Sachant que les erreurs relatives sont de 3% sur le rayon *r* et de 2% sur la hauteur *h*, calculer les erreurs relatives sur le volume et sur l'aire totale d'un cylindre circulaire droit (voir la Figure 2).

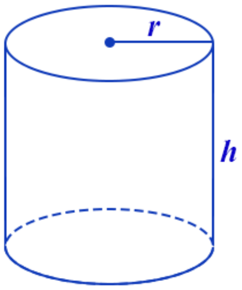

Figure 2 : Cylindre de rayon *r* et hauteur *h.*

Solution :

a. <u>Volume du cylindre</u> :

Le volume d'un cylindre circulaire droit de rayon *r* et de hauteur *h* est donné par la formule $V = \pi r^2 h$. Nous savons que $r_m = r \pm 0.03r$ et que $h_m = h \pm 0.02h$. Pour calculer Var[V], nous pouvons utiliser la loi de propagation d'incertitude. Cela nous donne,

$$\mathrm{Var}[V] \cong \mathbf{J}_f(r, h)\mathrm{Var}[(r, h)^T]\mathbf{J}_f^T(r, h)$$

où

$$\mathbf{J}_f(r, h) = [\partial f/\partial r, \partial f/\partial h] = [2\pi rh, \pi r^2].$$

Sous l'hypothèse de mesures non corrélées, nous obtenons ainsi :

$$\mathrm{Var}[V] \cong [2\pi rh, \pi r^2]\ \mathrm{diag}((0.03r)^2, (0.02h)^2)[2\pi rh, \pi r^2]^T = 0.4 \times 10^{-2}\ \pi^2\, r^4 h^2.$$

Donc

$$V_m = E[V] \pm \sigma_V = \pi r^2 h \pm 0.063\pi r^2 h = (1 \pm 0.063)\pi r^2 h$$

qui correspond à une erreur relative de 6.3% sur le volume du cylindre.

b. <u>Aire totale du cylindre</u> :

L'aire totale d'un cylindre circulaire droit de rayon *r* et de hauteur *h* est donnée par la formule $A = 2\pi r(h + r)$. Pour calculer Var[A], nous pouvons utiliser à nouveau la loi de propagation d'incertitude, qui nous donne :

$$\mathrm{Var}[A] \cong \mathbf{J}_f(r, h)\mathrm{Var}[(r, h)^T]\mathbf{J}_f^T(r, h)$$

où cette fois

$$\mathbf{J}_f(r, h) = [\partial f/\partial r, \partial f/\partial h] = [2\pi(h + 2r), 2\pi r].$$

Sous l'hypothèse de mesures non corrélées, nous obtenons enfin :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[A] &\cong [2\pi(h+2r),\, 2\pi r]\ \mathrm{diag}((0.03r)^2, (0.02h)^2)\ [2\pi(h+2r),\, 2\pi r]^T \\ &= (2\pi r)^2\ [0.03^2\,(h+2r)^2 + 0.02^2 h^2].\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}A_m &= E[A] \pm \sigma_A \\ &= 2\pi r(h+r) \pm 2\pi r[0.03^2\,(h+2r)^2 + 0.02^2 h^2]^{1/2}.\end{aligned}$$

<u>Exercice III</u> : Ajustement de droite

Dans une image on détecte N points de contours de coordonnées (x_i, y_i), $i \in \{1,2,\ldots,N\}$. Ces points sont détectés avec une incertitude σ_x et σ_y sur les deux axes principaux. On souhaite calculer une droite d'équation $y = ax + b$ passant par les N points.

1. Donner l'expression des coefficients a et b.
2. Donner les incertitudes σ_a et σ_b sur les coefficients estimés a et b.

Solution (ébauche) :

Dans le cours (cf. Chapitre 1, Partie 4), nous avons vu l'ajustement de droites réalisé par la méthode des moindres carrés. La seule différence, dans cet exercice, est que la droite est représentée en coordonnées cartésiennes plutôt qu'en coordonnées polaires. Donc, nous avons $y = ax + b$ (où x est la variable muette) au lieu de $\rho\cos(\theta - \alpha) - r = 0$, et les paramètres à estimer par la méthode des moindres carrés sont (a, b) au lieu de (r, α).

<u>Exercice IV</u> : Gyroscope mécanique

On effectue des mesures pour déterminer le moment d'inertie I du disque d'un gyroscope mécanique en étudiant son mouvement de précession (voir la Figure 3). La physique nous apprend que :

$$\tau = I\,\omega\,\Omega = g\,m\,\mathrm{b}$$

où

τ : couple réactif du gyroscope,
I : moment d'inertie du disque du gyroscope [kg m^2],
ω : vitesse angulaire de rotation du disque, mesurée avec une précision relative de 1%,
Ω : vitesse angulaire de précession du gyroscope, mesurée à ± 0.01 rad/s,
g : accélération due à la pesanteur (9.81 m/s^2),
m : masse "supplémentaire" (de l'armature externe du gyroscope), mesurée à ± 2 g,
b : bras de levier, mesuré avec une précision relative de 0.1%,
O : point fixe unique du gyroscope.

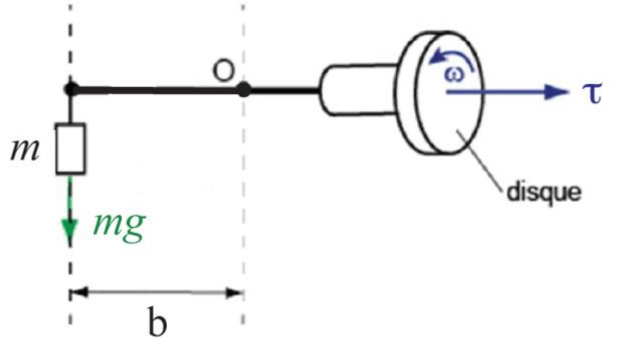

Figure 3 : Gyroscope mécanique.

En sachant que les mesures suivantes ont été obtenues :

$$b = 25 \text{ cm}$$
$$m = 0.384 \text{ kg}$$
$$\omega = 481.3 \text{ rad/s}$$
$$\Omega = 0.116 \text{ rad/s.}$$

1. Déterminer le moment d'inertie I du disque du gyroscope et son incertitude ΔI.

2. Quelle mesure faut-il particulièrement soigner pour améliorer la précision sur la détermination de I ?

Solution :

1. À partir de la formule donnée dans le sujet et le cahier des charges, nous déduisons que $I = gm\text{b}/(\omega\Omega)$ et que :

$$m = 0.384 \pm 0.002 \text{ kg}$$
$$\text{b} = 0.25 \pm 0.00025 \text{ m}$$
$$\omega = 481.3 \pm 4.813 \text{ rad/s}$$
$$\Omega = 0.116 \pm 0.01 \text{ rad/s.}$$

Le moment d'inertie est une fonction non linéaire des paramètres m, b, ω et Ω, c'est-à-dire $I = \text{f}(\mathbf{X}) = \text{f}(m, \text{b}, \omega, \Omega)$. L'espérance du moment d'inertie est donnée par :

$$\text{E}[I] \cong \text{f}(\mathbf{X}_0)$$

avec $\mathbf{X}_0 = \text{E}[\mathbf{X}] = [0.384, 0.25, 481.3, 0.116]^{\text{T}}$. Par conséquent, $\text{E}[I] \cong 0.0169 \text{ kg m}^2$. D'autre part, la variance du moment d'inertie est donnée par :

$$\text{Var}[I] \cong \mathbf{J}_{\text{f}}(\mathbf{X}_0)\, \text{Var}[\mathbf{X}]\, \mathbf{J}_{\text{f}}^{\text{T}}(\mathbf{X}_0).$$

Sous l'hypothèse de mesures non corrélées,

$$\text{Var}[\mathbf{X}] = \text{diag}(0.002^2, 0.00025^2, 4.813^2, 0.01^2).$$

Calculons maintenant la matrice jacobienne de f(**X**) :

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{X}) = [\partial f/\partial m,\ \partial f/\partial b,\ \partial f/\partial \omega,\ \partial f/\partial \Omega] = [gb/(\omega\Omega),\ gm/(\omega\Omega),\ -gmb/(\omega^2\Omega),\ -gmb/(\omega\Omega^2)].$$

Si la matrice jacobienne est évaluée sur le point $\mathbf{X}_0$, nous obtenons :

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0) = [0.0439,\ 0.0675,\ -3.5047 \times 10^{-5},\ -0.1454].$$

Nous trouvons ainsi que $\mathrm{Var}[I] \cong 2.1506 \times 10^{-6}$ kg² m⁴ et $\Delta I = \mathrm{Var}[I]^{1/2} \cong 1.5 \times 10^{-3}$ kg m². En conclusion,

$$I_m = E[I] \pm \Delta I = (16.9 \pm 1.5) \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

2. Une solution possible consiste à écrire les quatre variables aléatoires du vecteur **X** en utilisant une représentation paramétrique, à savoir :

$$\begin{aligned} m_m &= m \pm \sigma_m \\ b_m &= b \pm \sigma_b \\ \omega_m &= \omega \pm \sigma_\omega \\ \Omega_m &= \Omega \pm \sigma_\Omega \end{aligned}$$

et à répéter l'analyse effectuée au point **1.**