

# Surveillance Distribuée de Systèmes Multi-agents

UPJV, Département EEA

Master 2 3EA, EC53

UE alternants

**Fabio MORBIDI**

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

[fabio.morbidi@u-picardie.fr](mailto:fabio.morbidi@u-picardie.fr)

Mardi, Mercredi et Jeudi

13h30-16h00 (CM et TD salle CURI 305)

13h30-17h30 (TP salle CURI 305)

**AU 2022-2023**



# Introduction

Un **système multi-agents** est un système constitué d'un ensemble d'**unités autonomes intelligentes** qui *communiquent* et *collaborent* entre eux



Cohorte de robots mobiles



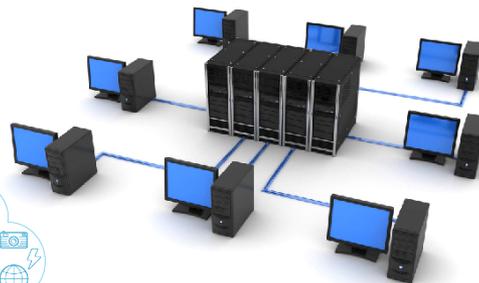
Membres d'un réseau social (Facebook, Twitter, TikTok)



Générateurs d'énergie dans un réseau électrique (parc éolien, centrale solaire photovoltaïque, etc.)



Réseau d'ordinateurs (Internet), objets connectés (IoT)



Réseau de téléphonie mobile

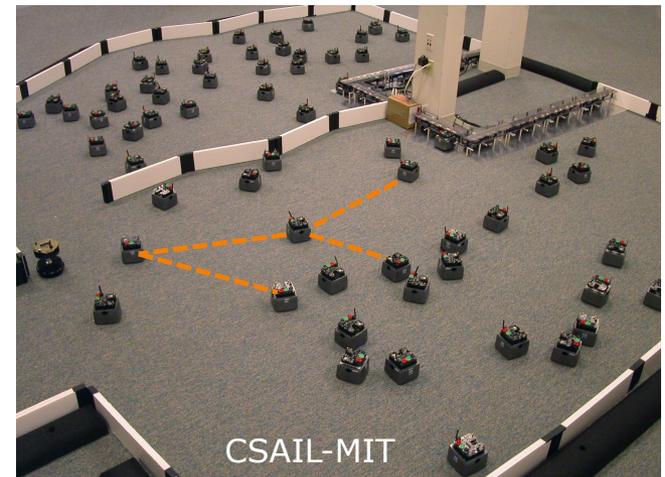
# Introduction

Étude de systèmes multi-agents en réseau:

- Modélisation de l'incertitude
- Fusion des mesures
- Estimation distribuée (pour le diagnostic et la surveillance)

## Applications d'intérêt :

Réseaux multi-capteurs, réseaux de distribution électrique, objets et véhicules connectés, robots collaboratifs, systèmes à grande échelle



# Plan du cours

## Chapitre 1: **Modélisation de l'incertitude**

1. Introduction
2. Représentation de l'erreur
3. Incertitude d'un capteur
4. Propagation d'incertitude

## Chapitre 2: **Traitement des mesures**

1. Réseaux multi-capteurs
2. Fusion des mesures

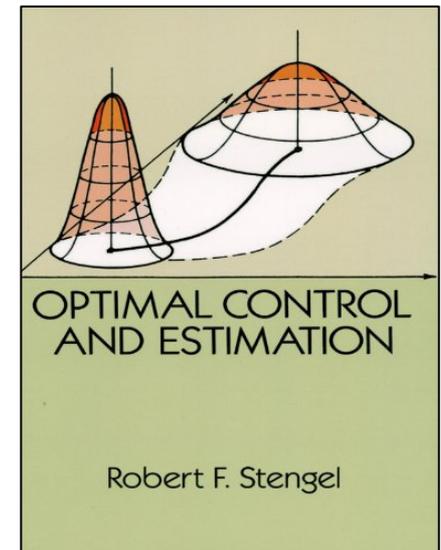
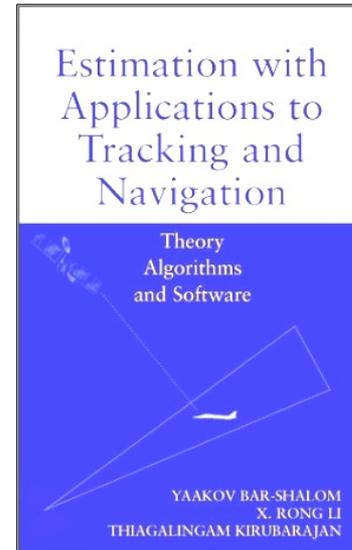
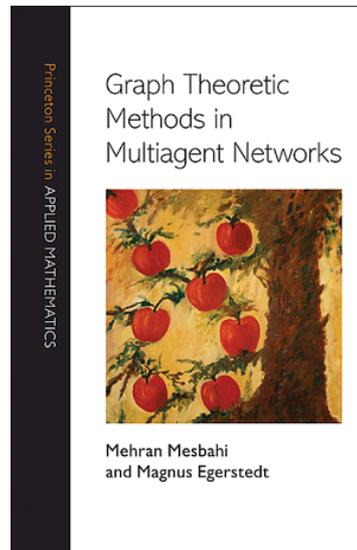
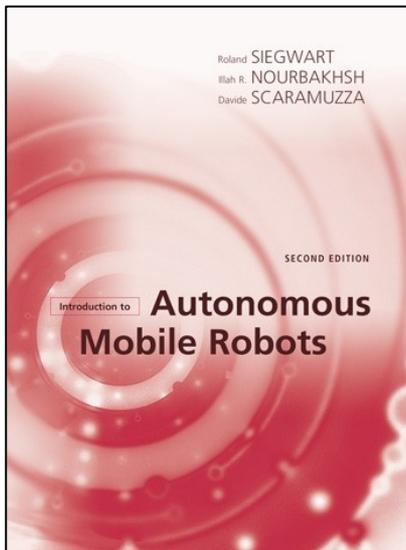
## Chapitre 3: **Estimation distribuée**

1. Introduction à la théorie des graphes
2. Protocole de consensus
3. Dynamic average consensus estimators
4. Méthode des moindres carrés distribuée
5. Filtre de Kalman distribué

**Découverte des laboratoires:** Activités de recherche du laboratoire MIS

# Bibliographie

- *"Introduction to Autonomous Mobile Robots"*, R. Siegwart, I.R. Nourbakhsh, D. Scaramuzza, MIT press, 2<sup>e</sup> éd., 2011 [Ch. 4]
- *"Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks"*, M. Mesbahi, M. Egerstedt, Princeton University Press, 2010 [Ch. 8]
- *"Estimation with Applications to Tracking and Navigation"*, Y. Bar-Shalom, X. Rong Li, T. Kirubarajan, Wiley & Sons, 1<sup>re</sup> éd., 2001 [Ch. 5, 12]
- *"Optimal Control and Estimation"*, R.F. Stengel, Dover Publications, 1994 [Ch. 4], 27 €



# Bibliographie

- *Diapos du cours*

[http://home.mis.u-picardie.fr/~fabio/Teaching\\_SDSM22-23.html](http://home.mis.u-picardie.fr/~fabio/Teaching_SDSM22-23.html)

## Surveillance Distribuée de Systèmes Multi-agents

UPJV, Département EEA

Master 2 3EA, EC53

UE alternants

**Fabio MORBIDI**

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

fabio.morbidi@u-picardie.fr

Mardi, Mercredi et Jeudi

13h30-16h00 (CM et TD salle CURI 305)

13h30-17h30 (TP salle CURI 305)

**AU 2022-2023**



# Connaissances préalables

On part du principe que vous possédez de bonnes connaissances de:

- *Algèbre linéaire* (opérations sur les vecteurs et les matrices)
- *Calcul différentiel* (gradient, matrice jacobienne, etc.)
- *Calcul des probabilités et théorie de l'estimation* (variables aléatoires, distributions de probabilité, etc.)
- *Théorie des systèmes* (équations différentielles ordinaires, représentation d'état d'un système LTI à temps discret et à temps continu)

$$\mathbf{Note\ finale} = \frac{1}{2} \left[ \text{DS} + \left( \frac{\text{TP1} + \text{TP2} + \text{TP3}}{3} \right) \right]$$

# Ch. 1: Modélisation de l'incertitude

- Introduction

**Partie 1**

- Représentation de l'erreur

**Partie 2**

- Incertitude d'un capteur

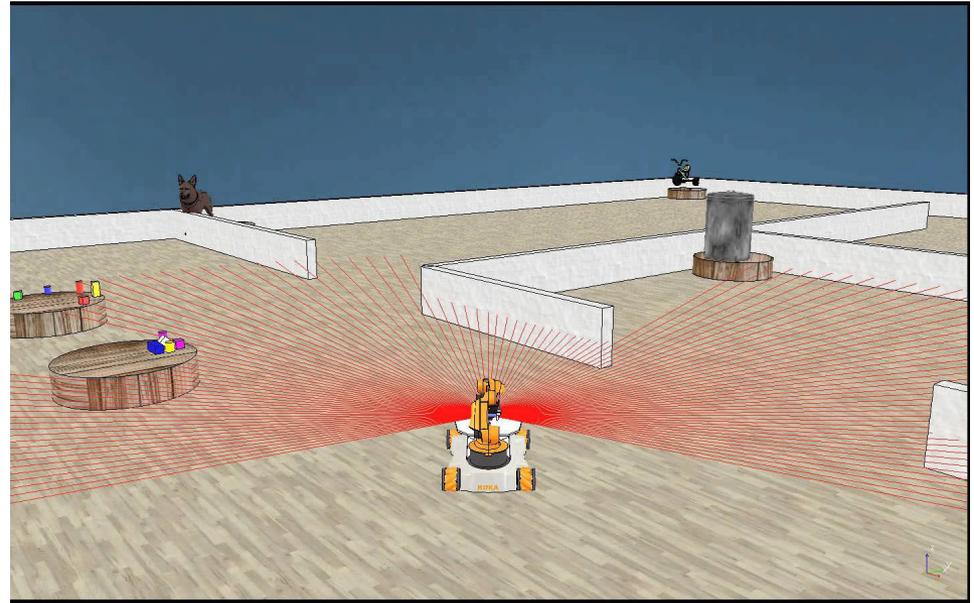
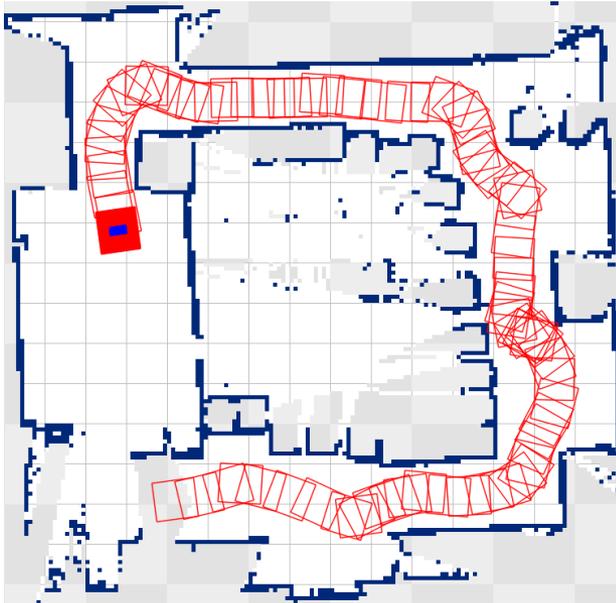
**Partie 3**

- Propagation d'incertitude

**Partie 4**

# Introduction: modéliser l'incertain

- Les mesures en provenance d'un capteur sont toujours *entachées* d'une certaine erreur
- Il est nécessaire de *représenter* cette incertitude, de la *propager* et de la prendre en compte dans le processus en aval
  - Par ex. pour la localisation et la planification de trajectoire d'un robot mobile



# Modéliser l'incertain: les objectifs

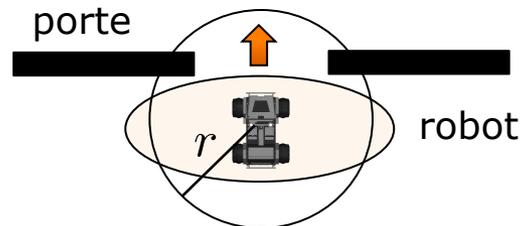
- **Nos objectifs**

- Quantifier un degré de confiance dans une *mesure*
- *Propager l'incertitude* de chaque mesure sur l'état
- *Évaluer l'adéquation modèle/mesure* tenant compte de l'incertitude et quantifier un degré de confiance dans l'*état estimé*
- Modéliser l'incertain entachant les mesures et les *combiner* (fusion des mesures)

---

## Exemple 1: robot mobile

Un robot se déplace dans un environnement connu, muni d'un capteur de distance. Passera-t-il par une porte ?



**Problème:** Comment estimer la position du robot à chaque instant ?  
Avec quelle précision ?

## Exemple 2: radar de contrôle routier

Vitesse retenue du véhicule = vitesse mesurée – marge technique

Marge technique (*écart type* sur les mesures de vitesse):

- **Radar fixe:** 5 km/h pour des vitesses < 100 km/h et 5% pour des vitesses  $\geq$  100 km/h
- **Radar mobile:** 10 km/h pour des vitesses < 100 km/h et 10% pour des vitesses  $\geq$  100 km/h



Source: [www.securite-routiere.gouv.fr](http://www.securite-routiere.gouv.fr)

# Les différents types d'erreur

- **Erreurs systématiques (ou déterministes)**

Une erreur systématique est soit constante (**biais**), soit à variation lente en fonction du temps (**dérive**)  
→ Décalage entre la valeur vraie et la valeur mesurée

Exemples: erreur sur la valeur d'une grandeur de référence, erreur due à la surchauffe d'un appareil (par ex. une caméra)

- **Erreurs aléatoires (ou accidentelles)**

Exemples: bruit induit par une carte de numérisation ou par un microphone

- **Erreurs aberrantes**

Écart « énorme » entre la vraie valeur et la valeur mesurée

Exemple: erreur de mise en correspondance en vision par ordinateur

## Petit rappel:

### Méthode des moindres carrés

**Modèle théorique:** Famille de fonctions  $h(\mathbf{x}; \beta)$  d'une ou plusieurs *variables muettes*  $\mathbf{x}$ , indexées par un ou plusieurs *paramètres*  $\beta$  inconnus

- La méthode des moindres carrés permet de sélectionner parmi ces fonctions celle qui reproduit (explique) le mieux les *données expérimentales*
- La méthode consiste en une prescription, qui est que la fonction  $h(\mathbf{x}; \beta)$  qui décrit « le mieux » les données est celle qui *minimise la somme quadratique des déviations des mesures  $y_i$  aux prédictions de  $h(\mathbf{x}; \beta)$*

# Méthode des moindres carrés

- Si nous disposons de  $n$  mesures  $y_1, \dots, y_n$ , les paramètres « optimaux »  $\beta$  au sens de la *méthode des moindres carrés* sont ceux qui minimisent la fonction de coût:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n d_i^2(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - h_i(x_i; \beta))^2$$

avec

$d_i(\beta)$  : *résidu du modèle* (c'est l'écart entre la mesure  $y_i$  et la prédiction  $h_i(x_i; \beta)$  donnée par le modèle)

$S(\beta)$  : mesure de la "distance" entre les données expérimentales et le modèle théorique qui prédit ces données

- La prescription des moindres carrés commande que cette distance soit minimale, à savoir:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} S(\beta)$$

# Méthode des moindres carrés

Si  $h(\mathbf{x}; \beta)$  est **linéaire**, on parle de méthode des moindres carrés *ordinaire* (ou des moindres carrés *linéaires*). Le calcul du vecteur de paramètres  $\hat{\beta}$  optimal est direct dans ce cas

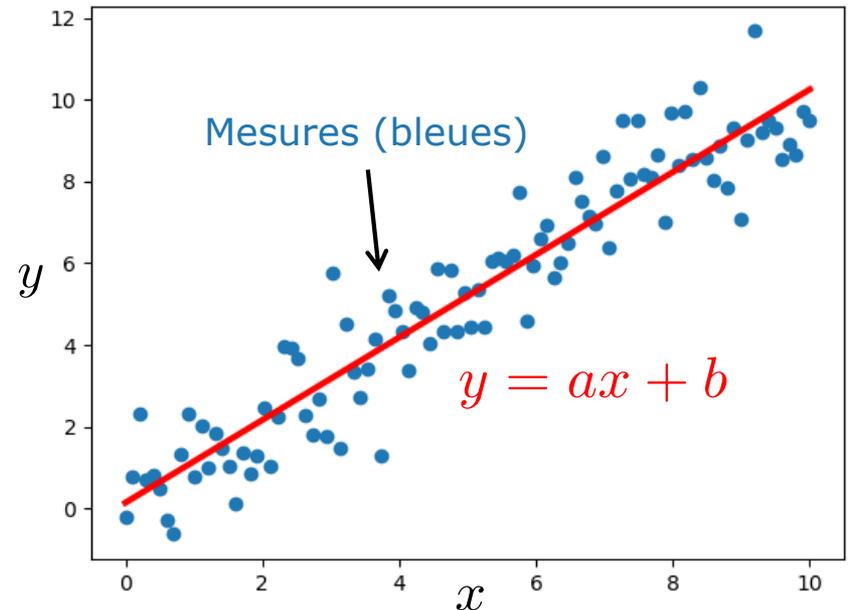
**Exemple** (une seule variable muette  $x$ ):

$$\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$h_i(x_i; a, b) = ax_i + b$$

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

Régression linéaire (ajustement de droite)



# Ch. 1: Modélisation de l'incertitude

- Introduction

Partie 1

- Représentation de l'erreur

**Partie 2**

- Incertitude d'un capteur

**Partie 3**

- Propagation d'incertitude

**Partie 4**

# Représentation de l'erreur

La représentation doit permettre de composer et de fusionner facilement les erreurs

## 1) Représentation par distribution de probabilité

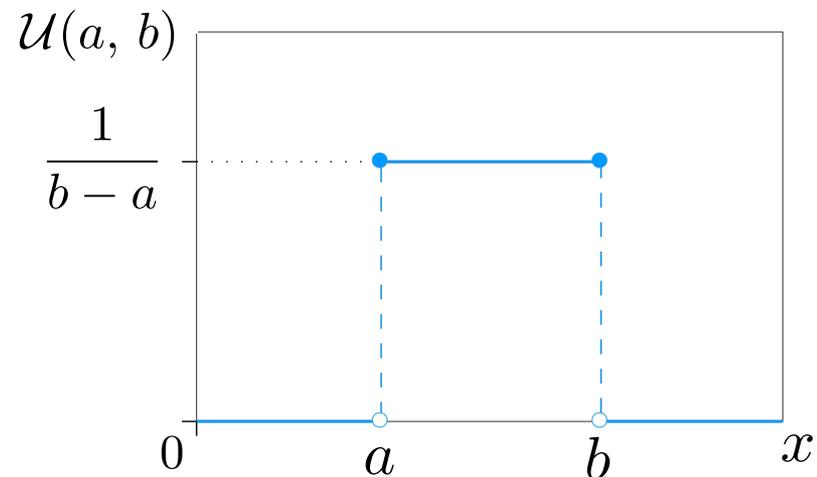
- Une mesure = réalisation d'une variable aléatoire (v.a.)
- En répétant plusieurs fois une mesure, on obtient des résultats plus ou moins différents, dont la répartition est aléatoire

**Intérêt:** facilité de manipulation (composition, comparaison et transformation de deux densités de probabilité)

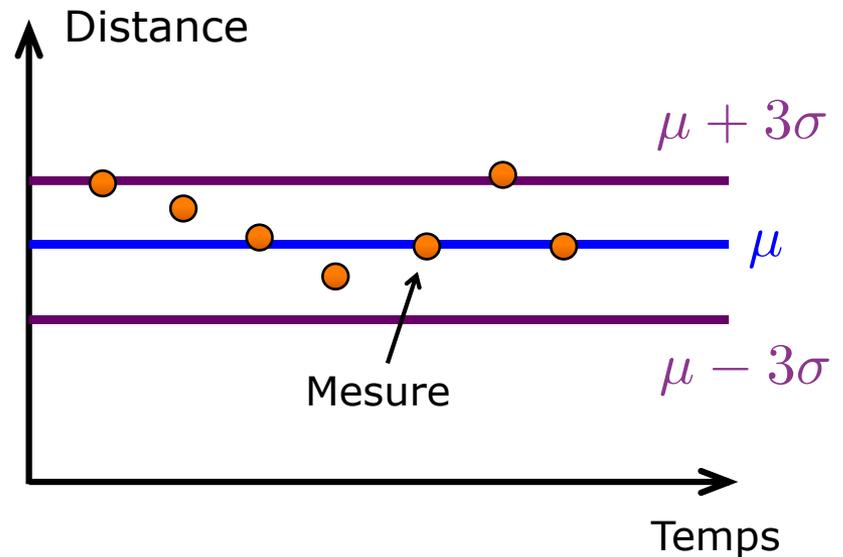
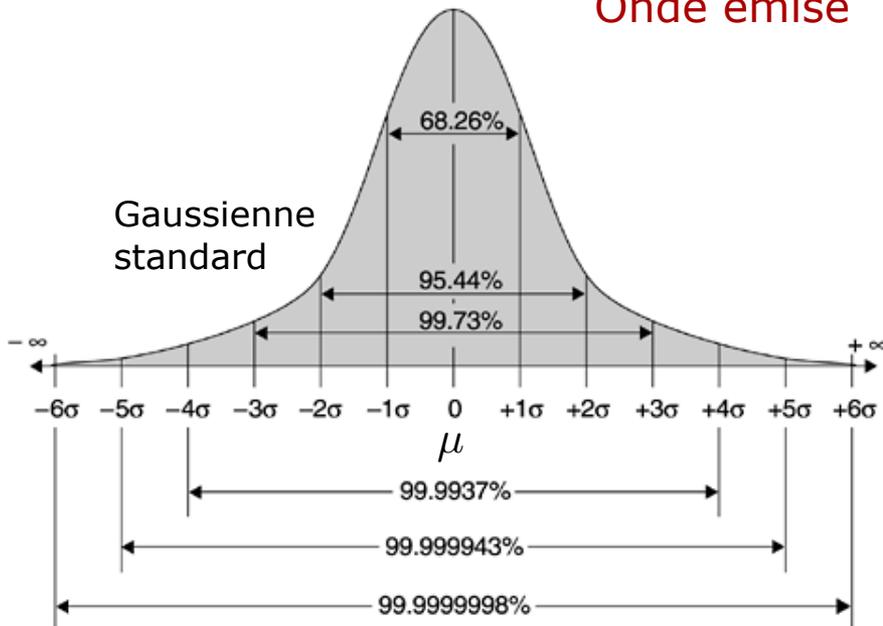
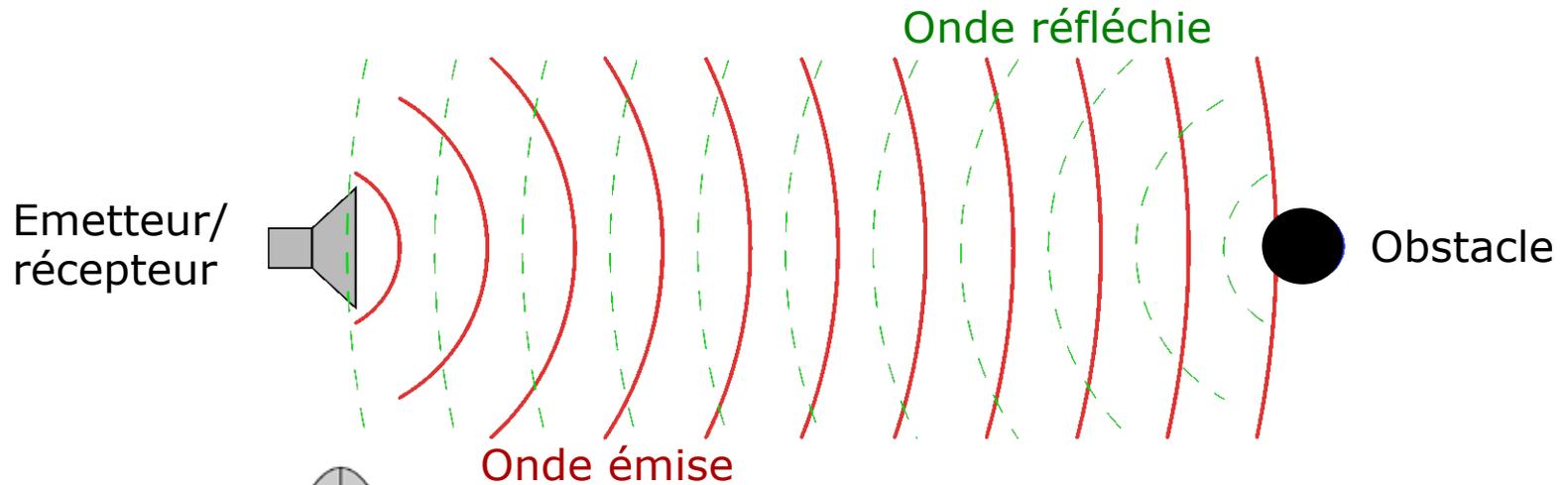
Remarque:

Représentation par zone  
d'incertitude:

→ Utilisation d'une distribution  
uniforme  $\mathcal{U}(a, b)$



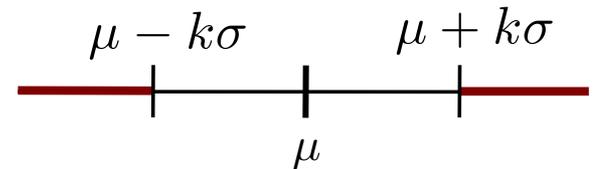
# Incertitude d'un capteur: exemple du sonar



# Représentation de l'erreur

Soit  $X$  une v.a. d'espérance  $\mu$  et de variance finie  $\sigma^2 > 0$ .  
L'**inégalité de Bienaymé-Chebyshev** s'énonce de la façon suivante. Pour tout réel strictement positif  $k$ :

$$\Pr(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$



(en réalité, seulement le cas de  $k > 1$  est utile)

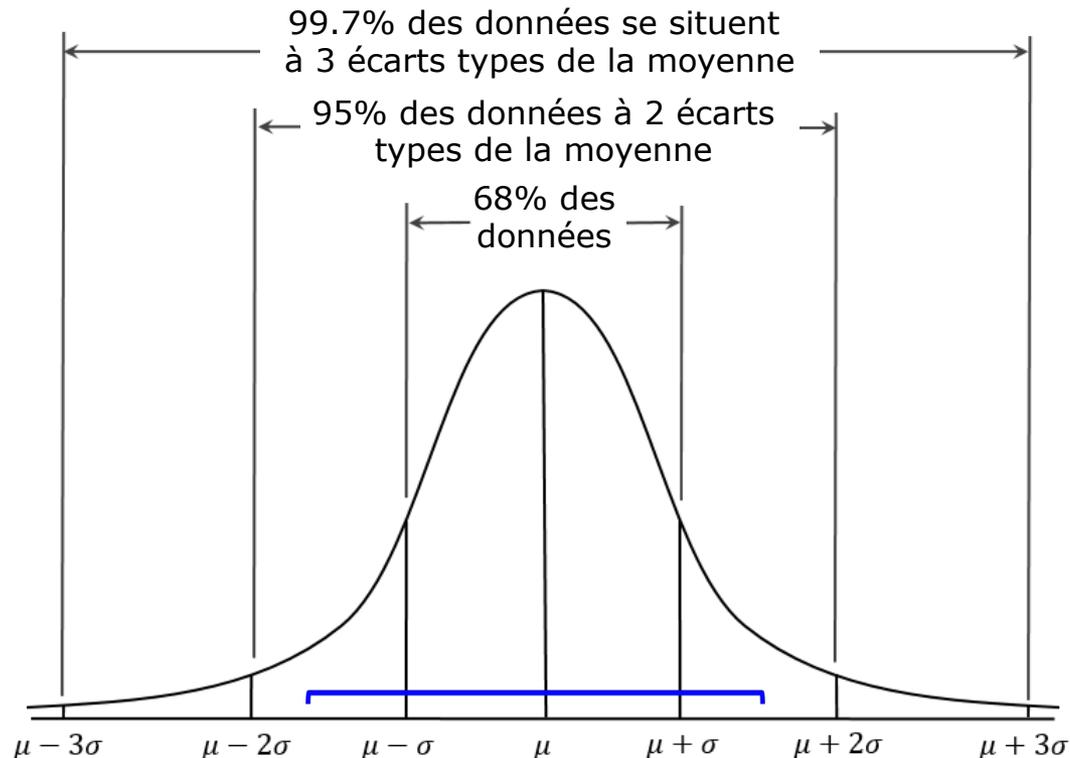
- Cette inégalité montre qu'une v.a. prend avec *une grande probabilité* une valeur relativement proche de son espérance  $\mu$
- On déduit de cette inégalité que pour  $k = 3$ :

$$\Pr(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$$

À savoir, l'intervalle  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  contient au moins  $8/9$  (88.8%)  
c'est-à-dire, l'essentiel de la distribution

# Représentation de l'erreur

- Cette majoration est souvent excessive (trop conservatrice)
- En effet, pour la loi normale de moyenne nulle et d'écart type unitaire (*gaussienne centrée réduite* ou *standard* avec  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ ) l'intervalle  $[-1.65, 1.65]$  contient 90% de la distribution (au lieu de  $100(1 - 1/1.65^2) = 63.2\%$ )

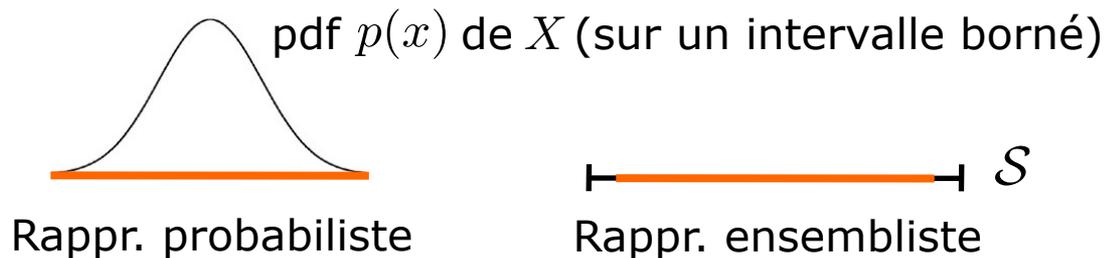


# Modélisation et représentation de l'erreur

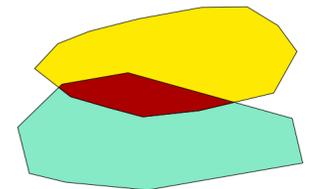
## 2) Représentation par régions (ou ensembliste)

- Définition d'une zone où la vraie grandeur doit se trouver
- En statistique, une v.a. vectorielle  $\mathbf{X}$  est représentée par une distribution de probabilité. Au contraire, dans une *approche ensembliste*,  $\mathbf{X}$  est représentée par un ensemble  $\mathcal{S}$  dans lequel  $\mathbf{X}$  est supposée d'appartenir (à savoir, le support de la fonction de densité de probabilité (pdf) de  $\mathbf{X}$  est inclus à l'intérieur de  $\mathcal{S}$ )

### Illustration 1D (intervalle):



- *Propagation de contraintes* sur les régions: uniquement des opérations (intersection, union, etc.) sur des ensembles. Polytopes en général, mais aussi ellipsoïdes

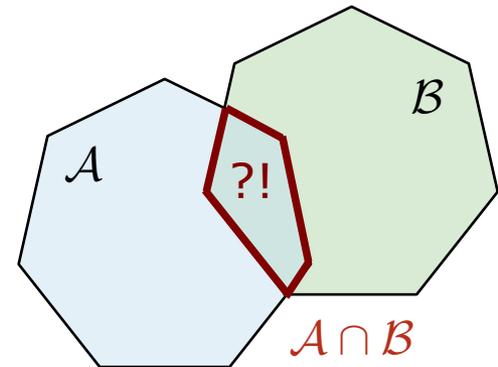


# Modélisation et représentation de l'erreur

## 2) Représentation par régions (ou ensembliste)

### Avantages et inconvénients:

- Si on représente une v.a. vectorielle par un ensemble, on a besoin de *moins* d'assumptions sur la v.a. (par ex. l'hypothèse d'indépendance des variables) et on peut traiter les *non linéarités* plus facilement
- Cependant:
  - 1) Une pdf fournit des informations *plus riches* que l'ensemble qui enferme son support
  - 2) Par composition, la région peut devenir très complexe et/ou ne plus appartenir à la famille de représentation choisie (*calculs onéreux*)
  - 3) La représentation par des régions peut se révéler assez *conservatrice*



"Applied Interval Analysis: With Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics", L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, E. Walter, Springer, 2001

# Ch. 1: Modélisation de l'incertitude

- Introduction

Partie 1

- Représentation de l'erreur

Partie 2

- Incertitude d'un capteur

Partie 3

- Propagation d'incertitude

**Partie 4**

# Propagation d'incertitude: introduction

- Combiner des mesures incertaines
- Par ex. en robotique mobile:
  - Plusieurs mesures
    - Différents capteurs
    - Différents instants de temps



Sonar



Laser



Caméra RGB-D

$$Y_j = f_j(X_1, \dots, X_n)$$



Quelle incertitude sur  $Y_j$ , connaissant  $f_j$  sur  $X_1, \dots, X_n$  ?

# Propagation d'incertitude

- Soit  $X$  une v.a. continue et  $x$  la valeur spécifique (ou réalisation) que  $X$  prend
- Soit  $f(X) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction déterministe (connue)

**Problème:** Comment calculer (ou approcher), l'espérance et la variance de  $f$ , à savoir:

$$\mathbb{E}[f(X)], \text{Var}[f(X)] ?$$

Si  $X$  admet une *fonction de densité de probabilité* (pdf)  $p(x)$ , c'est direct:

$$\mathbb{E}[f(X)] = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx$$

$$\text{Var}[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \bar{x})^2 p(x) dx$$

# Propagation d'incertitude

De la même façon, soient:

$\mathbf{X}$  : vecteur de  $n$  variables aléatoires (vecteur aléatoire)

$\mathbf{f}(\mathbf{X}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  : fonction déterministe de plusieurs variables

Si chaque v.a. de  $\mathbf{X}$  admet une pdf  $p(x)$ , alors:

$$\mathbb{E}[\mathbf{f}(\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[f_1(\mathbf{X})] \\ \mathbb{E}[f_2(\mathbf{X})] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[f_m(\mathbf{X})] \end{bmatrix} \quad (\text{vecteur } m \times 1)$$

$$\text{Var}[\mathbf{f}(\mathbf{X})] = \mathbb{E}[(\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbb{E}[\mathbf{f}(\mathbf{X})])(\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbb{E}[\mathbf{f}(\mathbf{X})])^T] \quad \begin{array}{l} (\text{matrice de} \\ \text{covariance} \\ m \times m) \end{array}$$

# Propagation d'incertitude

$$\text{Var}[\mathbf{f}(\mathbf{X})] = \mathbb{E}[(\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbb{E}[\mathbf{f}(\mathbf{X})])(\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbb{E}[\mathbf{f}(\mathbf{X})])^T]$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Var}[f_1] & \text{Cov}[f_1, f_2] & \cdots & \text{Cov}[f_1, f_m] \\ \text{Cov}[f_2, f_1] & \text{Var}[f_2] & \cdots & \text{Cov}[f_2, f_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[f_m, f_1] & \cdots & \cdots & \text{Var}[f_m] \end{bmatrix}$$

## Propriétés:

- La matrice de covariance est **symétrique**: les éléments diagonaux sont les *variances* et les éléments extra-diagonaux sont les *covariances* de couples de v.a.
- La matrice de covariance est **semi-définie positive** (les valeurs propres de la matrice sont positives ou nulles)

# Propagation d'incertitude

- Les quantités précédentes peuvent toujours être calculées par *intégration numérique* ...

... mais cela pose un problème si on veut faire des développements formels !

Par ex. si la v.a.  $X$  dépend d'un paramètre  $a$ , trouver  $a$  tel que  $\text{Var}[X(a)]$  soit minimale ou maximale

Il y a donc un intérêt à disposer de *formules*, même approchées, pour la propagation d'incertitude

# Propagation d'incertitude: cas linéaire

Dans le *cas linéaire*:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

$\mathbf{X}$  : vecteur colonne de  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : matrice  $m \times n$  connue

---

D'après la linéarité de l'espérance:

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = \mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{X}] = \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{X}] \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{Y}] &= \text{Var}[\mathbf{A}\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T \mathbf{A}^T] \\ &= \mathbf{A}\text{Var}[\mathbf{X}]\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{aligned}$$

# Propagation d'incertitude: cas non linéaire

Dans le *cas non linéaire*:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$$

$\mathbf{X}$  : vecteur colonne de  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$

---

En l'absence d'autres informations, on approche la fonctionne  $\mathbf{f}(\mathbf{X})$  avec l'application linéaire tangente (en d'autres termes, on utilise une *approximation de Taylor* de  $\mathbf{f}$  au 1<sup>er</sup> ordre)

Soit alors

$$\mathbf{X}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{X}]$$

# Propagation d'incertitude: cas non linéaire

Au premier ordre:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \simeq \mathbf{f}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

avec matrice jacobienne (évaluée sur  $\mathbf{X}_0$ ):

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_0) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X_1}(\mathbf{X}_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X_n}(\mathbf{X}_0) \right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{Y}] &\simeq \mathbb{E}[\mathbf{f}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)] \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0)(\mathbb{E}[\mathbf{X}] - \mathbf{X}_0) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{X}_0) \end{aligned}$$

# Propagation d'incertitude: cas non linéaire

En outre:

$$\begin{aligned}\text{Var}[\mathbf{Y}] &= \mathbb{E}[(\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbb{E}[\mathbf{f}(\mathbf{X})])(\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbb{E}[\mathbf{f}(\mathbf{X})])^T] \\ &\simeq \mathbb{E}[(\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_0))(\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_0))^T] \\ &\simeq \mathbb{E}[(\mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0))(\mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0))^T] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \mathbf{J}_f^T(\mathbf{X}_0)] \\ &= \mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0) \text{Var}[\mathbf{X}] \mathbf{J}_f^T(\mathbf{X}_0)\end{aligned}$$

## Remarque:

Cas linéaire:

$$\text{Var}[\mathbf{AX}] = \mathbf{A} \text{Var}[\mathbf{X}] \mathbf{A}^T$$

Cas non linéaire:

$$\text{Var}[\mathbf{f}(\mathbf{X})] \simeq \mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0) \text{Var}[\mathbf{X}] \mathbf{J}_f^T(\mathbf{X}_0)$$

## Propagation d'incertitude: conclusion

- Sous l'hypothèse de v.a. indépendantes, la matrice de covariance « d'entrée »  $\text{Var}[\mathbf{X}] \triangleq \mathbf{C}_X$  devient diagonale, à savoir:

$$\mathbf{C}_X = \text{diag}(\sigma_{X_1}^2, \sigma_{X_2}^2, \dots, \sigma_{X_n}^2) = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}$$

**Rappel:** Deux v.a.  $X, Y$  sont dites *non corrélées*, si leur covariance est zéro:

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[X Y] - \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y] = 0$$

Si  $X$  et  $Y$  sont *indépendantes* avec moments d'ordre 2 finis, alors elles sont non corrélées. Toutefois, pas toutes les v.a. non corrélées sont indépendantes. Si  $X$  et  $Y$  sont *conjointement gaussiennes* et non corrélées, alors elles sont *indépendantes*

# Propagation d'incertitude: conclusion

- Approximation de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre de  $f(\mathbf{X})$

Nous avons la matrice jacobienne suivante:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \frac{\partial f_m}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- **Loi de propagation d'incertitude** (formule compacte):

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} \stackrel{(\approx)}{=} \mathbf{F}_{\mathbf{X}} \mathbf{C}_{\mathbf{X}} \mathbf{F}_{\mathbf{X}}^T$$

Matrice de  
covariance  
« de sortie »

## Exemple (1/3)

Soit  $\mathbf{X} = [X, Y]^T$  un vecteur gaussien de moyenne  $[0, 0]^T$  et de covariance

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Soit la v.a. scalaire

$$X' = f(X, Y) = X^2 + 3X - 2Y + 5$$

**Objectif:** Comparer les valeurs exactes et les valeurs approchées de la variance de  $X'$

---

**Rappel:** Soit  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$  un vecteur aléatoire.  $\mathbf{X}$  est dit *vector gaussien*, si et seulement si, pour toute suite  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de nombres réels, la v.a.

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

est une v.a. gaussienne

## Exemple (2/3)

Nous avons la pdf suivante ( $p(\mathbf{X}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ):

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

$$\begin{matrix} \nearrow \\ = \end{matrix} \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(X^2 + \frac{1}{4}Y^2\right)\right)$$

$$\boldsymbol{\mu} = [0, 0]^T$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

En intégrant numériquement avec Maple (ou Matlab), nous obtenons:

$$\mathbb{E}[X'] = 5 + \sigma^2$$

$$\text{Var}[X'] = 25\sigma^2 + 2\sigma^4$$

## Exemple (3/3)

Par contre, en utilisant nos formules approchées:

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{X}) = \left[ \frac{\partial f(X, Y)}{\partial X}, \frac{\partial f(X, Y)}{\partial Y} \right] = [2X + 3, -2]$$

Donc, au point  $\mathbf{X}_0 = [0, 0]^T$ :

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0) = [3, -2]$$

D'où

$$\mathbb{E}[X'] \simeq f(\mathbf{X}_0) = 5$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X'] &\simeq \mathbf{J}_f(\mathbf{X}_0) \text{Var}[\mathbf{X}] \mathbf{J}_f^T(\mathbf{X}_0) \\ &= \sigma^2 [3, -2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 25 \sigma^2 \end{aligned}$$

**Conclusion:** Si  $\sigma$  est petite,  $\sigma^4$  est négligeable devant  $\sigma^2$  et l'approximation fournie de la variance de  $X'$  est *précise*

## Ellipsoïdes d'incertitude

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{F}_X \mathbf{C}_X \mathbf{F}_X^T$$

La matrice  $\mathbf{C}_Y$  est une matrice carrée symétrique et semi-définie positive: on peut lui associer un **ellipsoïde d'incertitude** pour avoir une représentation graphique

Dans ce but, on peut faire recours à la décomposition en valeurs et vecteurs propres de  $\mathbf{C}_Y$ :

$$\mathbf{C}_Y \mathbf{U} = \mathbf{U} \Lambda$$

où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ,  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_m]$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$  : *valeurs propres* de la matrice  $\mathbf{C}_Y$   
triées par **ordre décroissant**

$\mathbf{u}_i$  : *vecteur propre* associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

**Exemple:** représentation de l'incertitude de localisation d'un robot en deux dimensions (plan du sol) mais à **3 degrés de liberté** ( $C_Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ), par une ellipse d'incertitude autour de la position estimée.

- Les deux premières coordonnées  $u_{1,x}$  et  $u_{1,y}$  du vecteur propre  $u_1$  associé à la valeur propre la plus forte  $\lambda_1$  de  $C_Y$  nous permettent de calculer l'*orientation*  $\theta_e$  de l'ellipse d'incertitude:

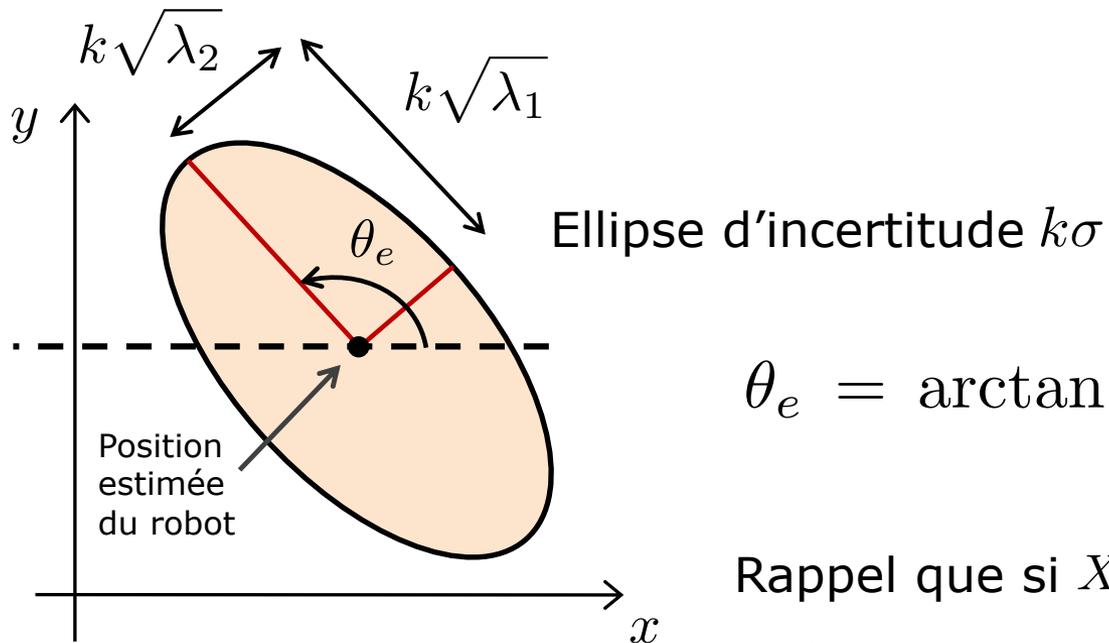
$$\theta_e = \arctan\left(\frac{u_{1,y}}{u_{1,x}}\right)$$

- La longueur des demi-axes de l'ellipse est définie par la racine carrée des deux valeurs propres de  $C_Y$  les plus fortes, c'est-à-dire  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

On peut interpréter  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  comme des *variances*.  
Les demi-axes de l'ellipse auront donc pour longueurs:

$$k\sqrt{\lambda_1}, k\sqrt{\lambda_2}, k \in \{1, 2, \dots\}$$

# Illustration graphique



$$\theta_e = \arctan\left(\frac{u_{1,y}}{u_{1,x}}\right)$$

Rappel que si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ :

$$\Pr(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0.68269$$

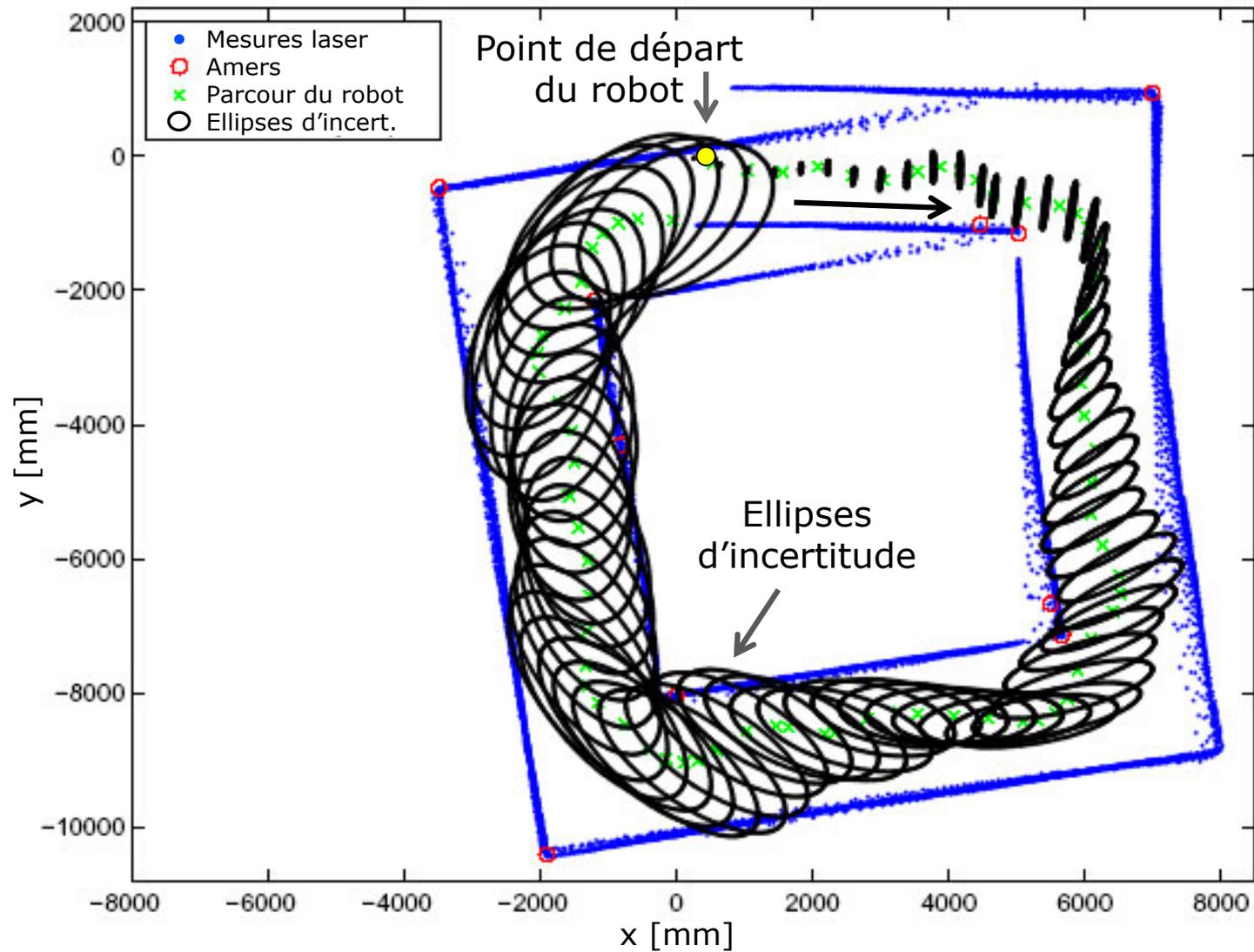
$$\Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0.95450$$

$$\Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0.99730$$

$$\Pr(\mu - 4\sigma \leq X \leq \mu + 4\sigma) \simeq 0.99993$$

$$\Pr(\mu - 5\sigma \leq X \leq \mu + 5\sigma) \simeq 0.99999$$

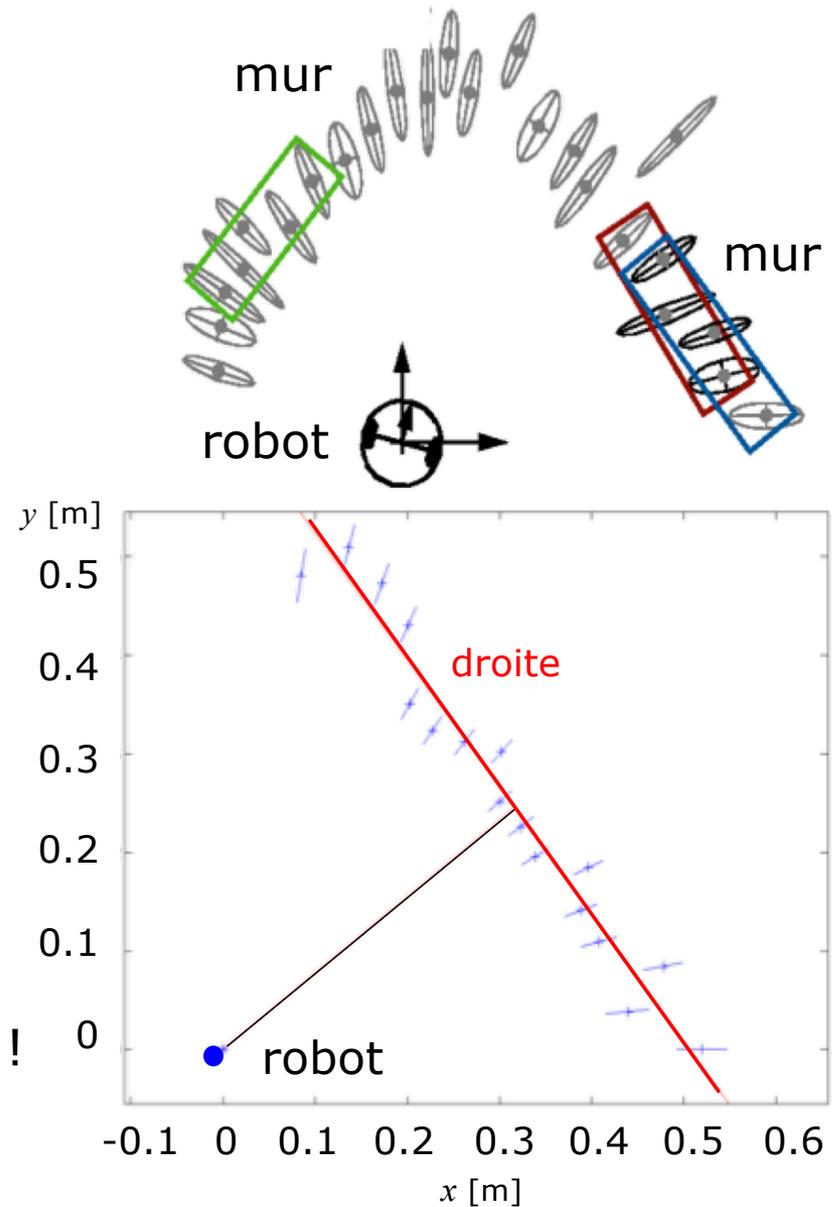
# Exemple: localisation d'un robot



# **Propagation d'incertitude: cas d'étude**

# Ajustement de droites

- Données en provenance de *scanners lasers* ou *sonars*: points 2D ou 3D
- Localisation et cartographie
  - **Connaissance d'un plan**
    - Comparer l'ensemble des points à la carte de référence est très coûteux
    - Comparer quelques droites à la carte est très rapide
  - **Construction de plan**
    - Points seuls: énormément de données à stocker
    - Droites ajustées: beaucoup moins de données à traiter !

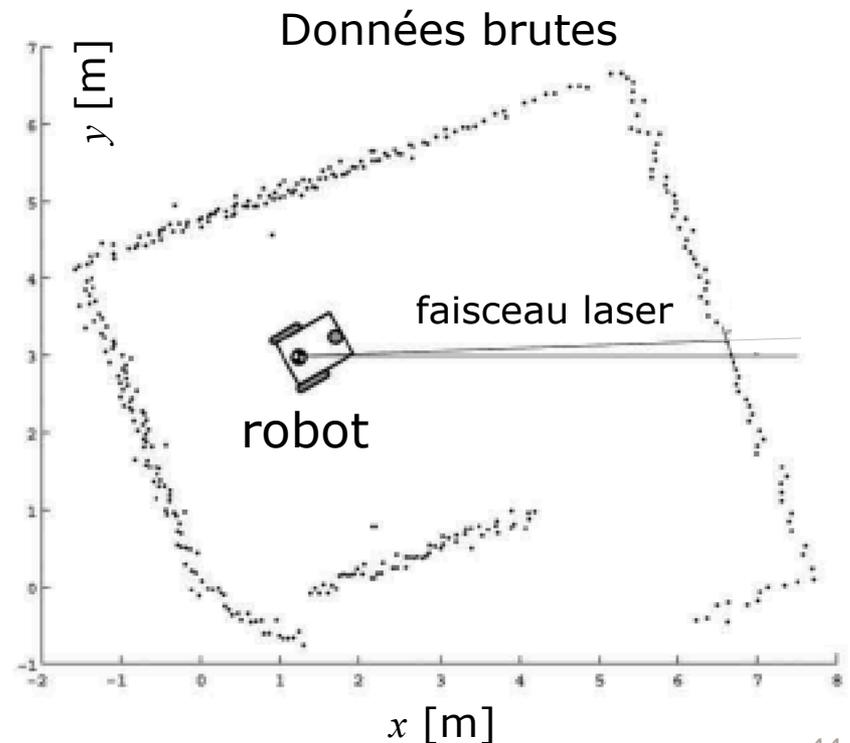
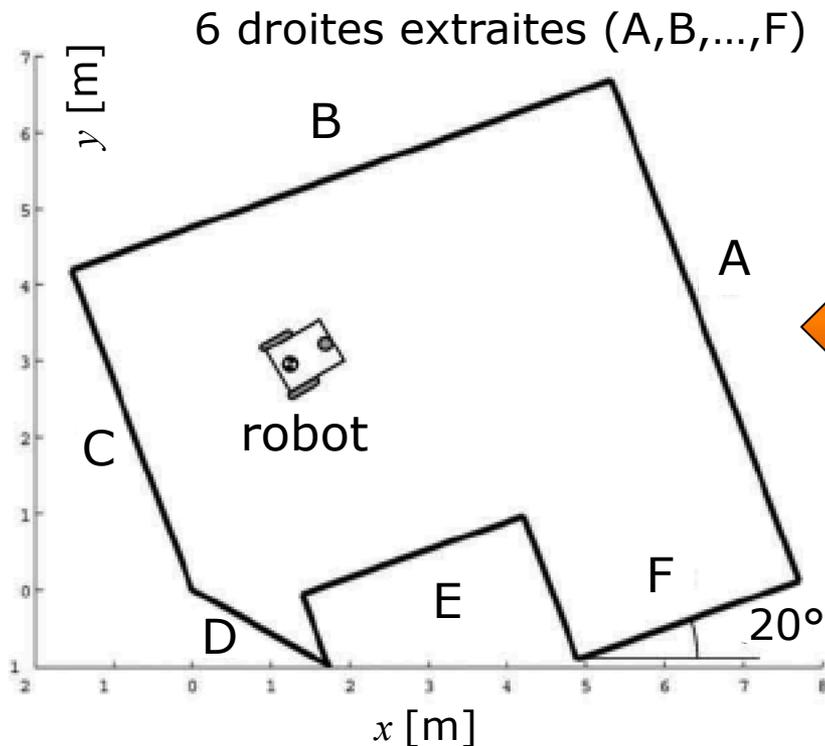


# Extraction de droite

- Dans le monde réel: plusieurs droites possibles !

## Algorithmes existants

- Split-and-merge
- **Moindres carrés**
- Incrémental
- Transformée de Hough
- Espérance-Maximisation (EM)
- RANSAC

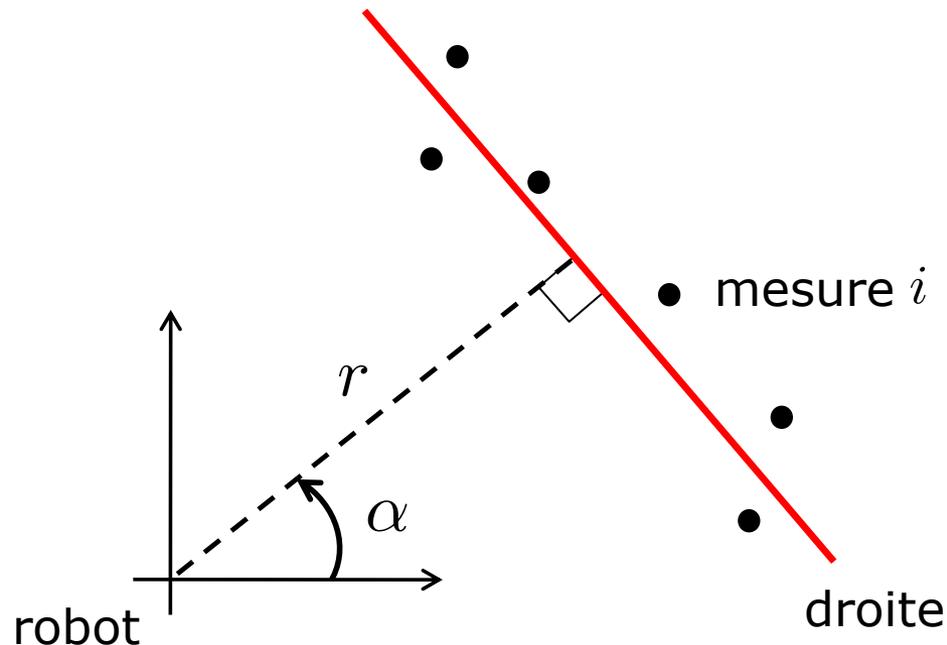


# Extraction de droite

**Objectif:** extraire une droite d'un ensemble de mesures de points incertains en distance et en orientation

Les paramètres  $r$  et  $\alpha$  suffisent à représenter une unique droite en *coordonnées polaires*  $(\rho, \theta)$  :

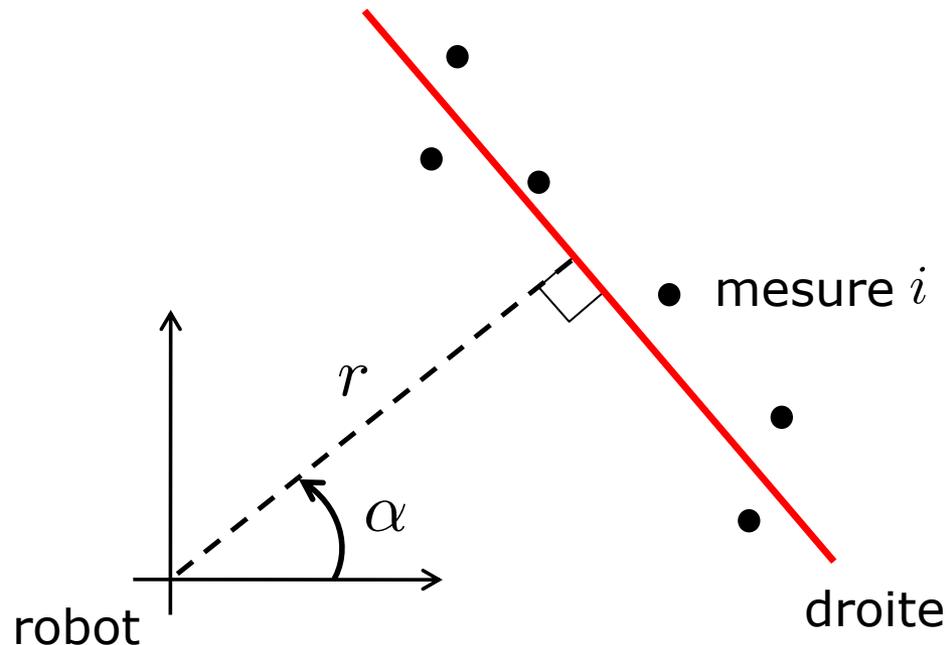
$$\rho(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) - r = \rho \cos(\theta - \alpha) - r = 0$$



# Extraction de droite

**Problème:** quelle est l'incertitude de la droite extraite en connaissant les incertitudes de mesure des points qu'ont permis de l'obtenir ?

1. Établir une transformation: mesures  $\mapsto$  droite
2. Appliquer la loi de propagation d'incertitude



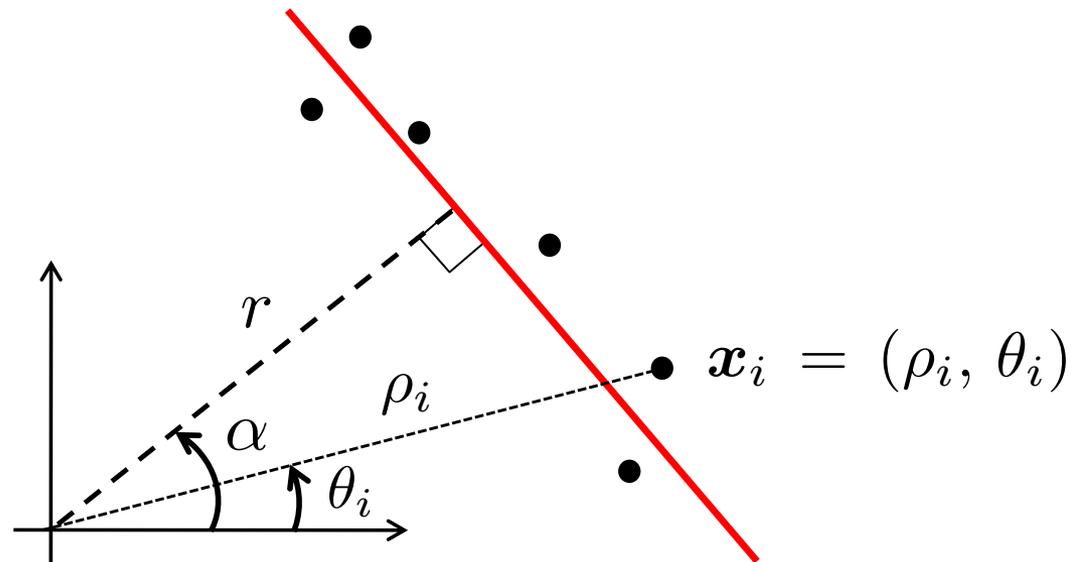
# Mesures et incertitudes

- Un scanner laser donne  $n$  points de mesure:

$$\mathbf{x}_i = (\rho_i, \theta_i), i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- On les modélise comme deux *variables aléatoires*:

$$\mathbf{X}_i = (P_i, Q_i)$$



# Mesures et incertitudes

Dans ce qui suit, on fera les deux hypothèses suivantes:

**1)** Les v.a.  $P_i$  et  $Q_i$  sont indépendantes, c'est-à-dire:

$$\mathbb{E}[P_i P_j] = \mathbb{E}[P_i] \mathbb{E}[P_j], \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \neq j$$

$$\mathbb{E}[Q_i Q_j] = \mathbb{E}[Q_i] \mathbb{E}[Q_j], \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \neq j$$

$$\mathbb{E}[P_i Q_j] = \mathbb{E}[P_i] \mathbb{E}[Q_j], \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

**2)** Chaque point  $\mathbf{X}_i = (P_i, Q_i)$  est bruité selon une *loi gaussienne* sur les deux coordonnées, à savoir:

$$P_i \sim \mathcal{N}(\rho_i, \sigma_{\rho_i}^2)$$

$$Q_i \sim \mathcal{N}(\theta_i, \sigma_{\theta_i}^2)$$

# Transformation des mesures en droite

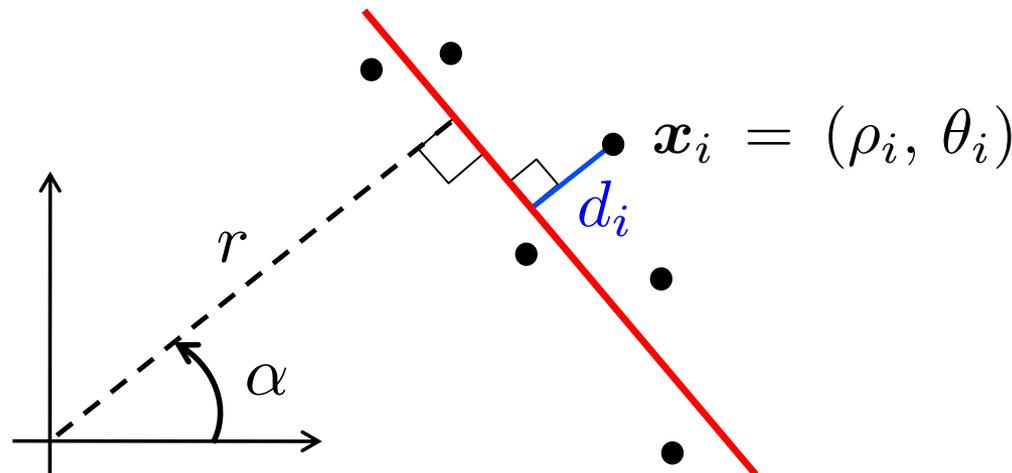
- On cherche une droite passant par les  $n$  points de mesure et qui a pour équation:

$$\rho \cos(\theta - \alpha) - r = 0$$

- Pour chaque point de mesure, l'*erreur* par rapport à la droite est donnée par:

$$\rho_i \cos(\theta_i - \alpha) - r = d_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Illustration  
graphique



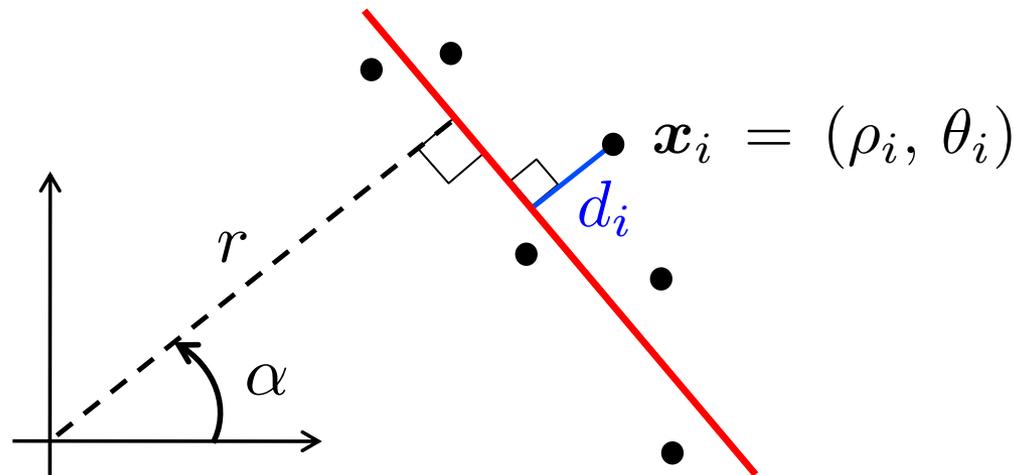
# Transformation des mesures en droite

- Ajustement par la **méthode des moindres carrés**:

$$S(r, \alpha) = \sum_{i=1}^n d_i^2(r, \alpha) = \sum_{i=1}^n (\rho_i \cos(\theta_i - \alpha) - r)^2$$

$d_i$  : résidu du modèle

$S(r, \alpha)$  : fonction de coût à **minimiser**



## Transformation des mesures en droite

$$S(r, \alpha) = \sum_{i=1}^n d_i^2(r, \alpha) = \sum_{i=1}^n (\rho_i \cos(\theta_i - \alpha) - r)^2$$

Pour minimiser  $S(r, \alpha)$ , on calcule les dérivées partielles par rapport à  $r$  et à  $\alpha$  et on les met à zéro:

$$\frac{\partial S(r, \alpha)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial S(r, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

Si on résout le système de deux équations par rapport à  $r$  et à  $\alpha$  on obtient la solution suivante

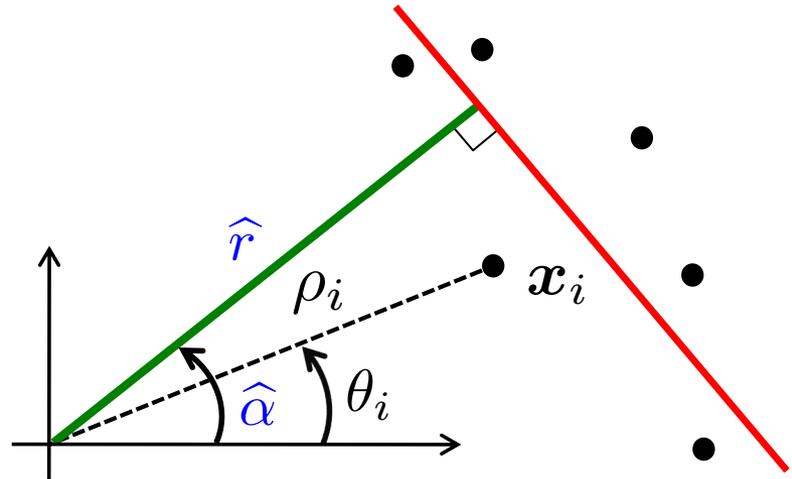
# Transformation des mesures en droite

Solution au sens des *moindres carrés*:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i^2 \sin(2\theta_i) - \frac{2}{n} \sum_{i,j=1}^n \rho_i \rho_j \cos \theta_i \sin \theta_j}{\sum_{i=1}^n \rho_i^2 \cos(2\theta_i) - \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \rho_i \rho_j \cos(\theta_i + \theta_j)} \right)$$

$$\hat{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i \cos(\theta_i - \hat{\alpha})$$

**Remarque:** dans la 1<sup>re</sup> formule on préfère typiquement utiliser l'arc tangente à deux arguments (atan2)



# Transformation des mesures en droite

## Remarque:

- Si on dispose d'une estimation de la variance du bruit qui entache chaque mesure, on peut l'utiliser pour « pondérer » la contribution de la mesure dans la fonction de coût  $S(r, \alpha)$
- Une mesure aura d'autant plus de poids que son incertitude sera *faible*. Cela nous amène à l'ajustement par la **méthode des moindres carrés pondérés**, où la fonction de coût à minimiser est:

$$S_w(r, \alpha) = \sum_{i=1}^n w_i (\rho_i \cos(\theta_i - \alpha) - r)^2$$

Le poids  $w_i$  est l'*inverse de la variance* du bruit qui affecte la mesure  $i$ . Par exemple, un choix possible est:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_{\rho_i}^2}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

# Transformation des mesures en droite

Solution au sens des *moindres carrés pondérés*:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\sum_{i=1}^n w_i \rho_i^2 \sin(2\theta_i) - \frac{2}{\sum_{i=1}^n w_i} \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \rho_i \rho_j \cos \theta_i \sin \theta_j}{\sum_{i=1}^n w_i \rho_i^2 \cos(2\theta_i) - \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \rho_i \rho_j \cos(\theta_i + \theta_j)} \right)$$

$$\hat{r} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \sum_{i=1}^n w_i \rho_i \cos(\theta_i - \hat{\alpha})$$

## Remarque:

Si  $w_1 = \dots = w_n = 1$  (c'est-à-dire, même poids pour chaque mesure), on retrouve la solution aux moindres carrés *ordinaire* vue précédemment

# Propagation d'incertitude

**Objectif:** comprendre comment les incertitudes sur les mesures de distance et d'orientation *se propagent* et *affectent* l'incertitude sur la droite à estimer

En d'autres termes, comment l'incertitude sur  $\rho_i$  et  $\theta_i$  se propage dans les équations précédentes et influence  $\hat{r}$  et  $\hat{\alpha}$  ?

- La matrice de covariance « de sortie » à déterminer est:

$$\mathbf{C}_{RA} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_{r\alpha} \\ \sigma_{\alpha r} & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

où  $R$  et  $A$  sont les v.a. associées à  $r$  et à  $\alpha$ , respectivement

# Propagation d'incertitude

- Matrice de covariance d'entrée (diagonale):

$$\mathbf{C}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_P & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{C}_Q \end{bmatrix}$$
$$= \text{diag}(\sigma_{\rho_1}^2, \dots, \sigma_{\rho_n}^2, \sigma_{\theta_1}^2, \dots, \sigma_{\theta_n}^2) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

- Loi de propagation d'incertitude:

$$\mathbf{C}_{RA} = \mathbf{F}_X \mathbf{C}_X \mathbf{F}_X^T$$

# Propagation d'incertitude

- Dans la formule:

$$\mathbf{C}_{RA} = \mathbf{F}_X \mathbf{C}_X \mathbf{F}_X^T$$

la matrice jacobienne  $\mathbf{F}_X = \mathbf{F}_{PQ} \in \mathbb{R}^{2 \times 2n}$  prend la forme suivante:

$$\mathbf{F}_X = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial P_1} & \frac{\partial r}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial P_n} & \frac{\partial r}{\partial Q_1} & \frac{\partial r}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial Q_n} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial P_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial \alpha}{\partial P_n} & \frac{\partial \alpha}{\partial Q_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial \alpha}{\partial Q_n} \end{bmatrix}$$

avec

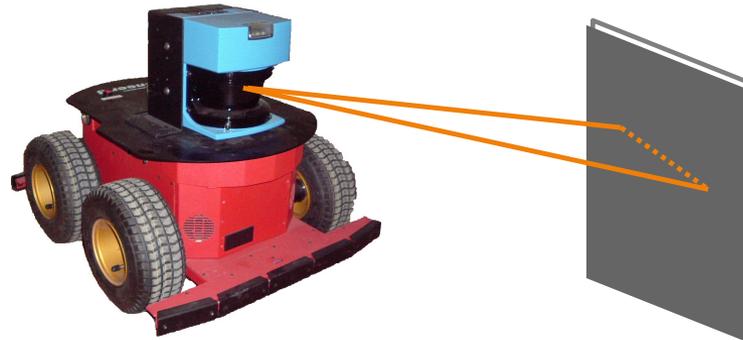
$$r = \rho \cos(\theta - \alpha)$$

et

$$\alpha = \theta - \arccos(r/\rho)$$

**Exemple** [cf. sect. 4.7.1.1 du Livre de Siegwart *et al.*]

**17 mesures** prises par un télémètre laser 2D embarqué sur un robot mobile (voir le tableau dans la diapo suivante)



### Hypothèses simplificatrices:

- L'incertitude de mesure devrait être *proportionnelle à la distance mesurée*, mais pour plus de simplicité on fera l'hypothèse que l'incertitude associée à chaque mesure soit *la même*
- Les mesures sont *non corrélées*
- Le robot *n'est pas en mouvement* lorsqu'il réalise une mesure

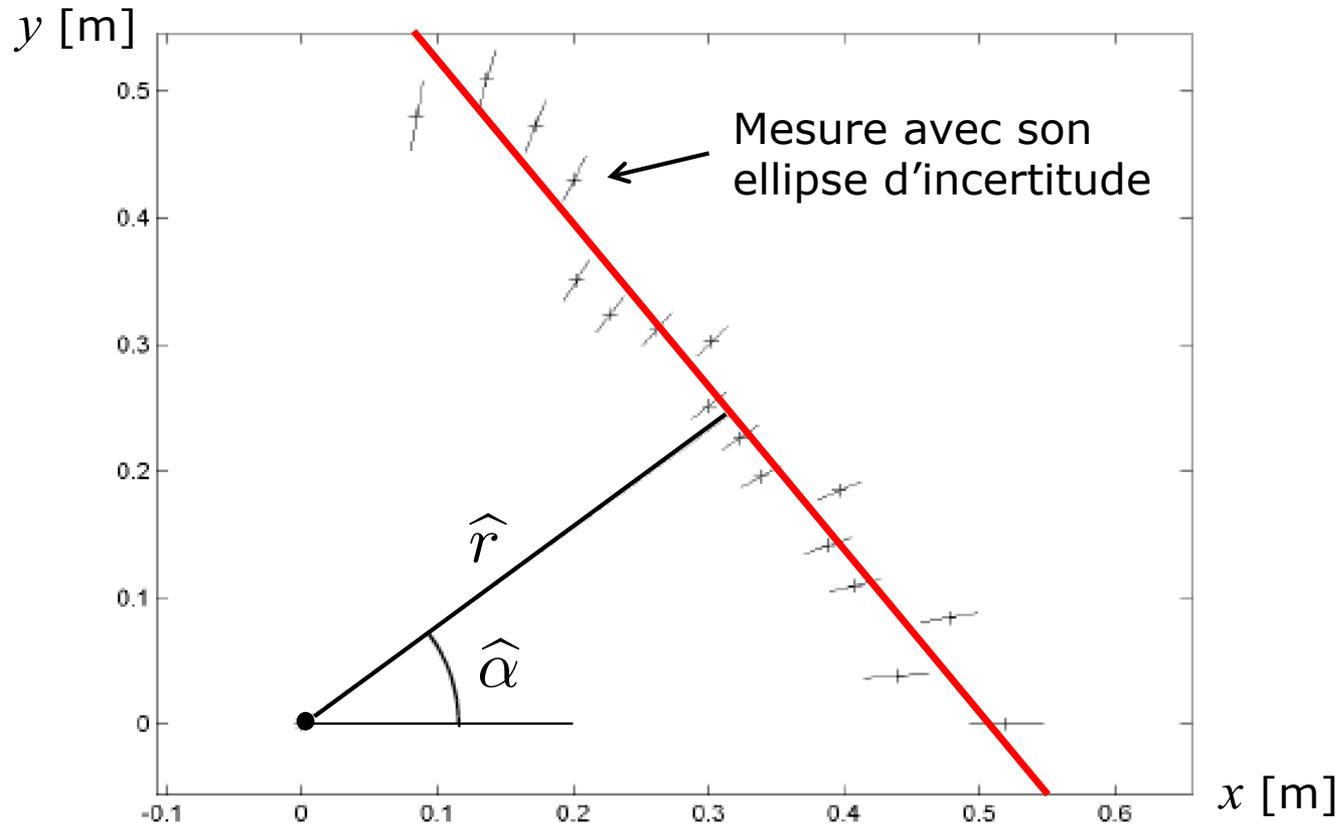
Les 17 mesures réalisées

Angle d'inclinaison $\theta_i$ du capteur [deg]	Distance $\rho_i$ [m]
0	0.5197
5	0.4404
10	0.4850
15	0.4222
20	0.4132
25	0.4371
30	0.3912
35	0.3949
40	0.3919
45	0.4276
50	0.4075
55	0.3956
60	0.4053
65	0.4752
70	0.5032
75	0.5273
80	0.4879

## Exemple

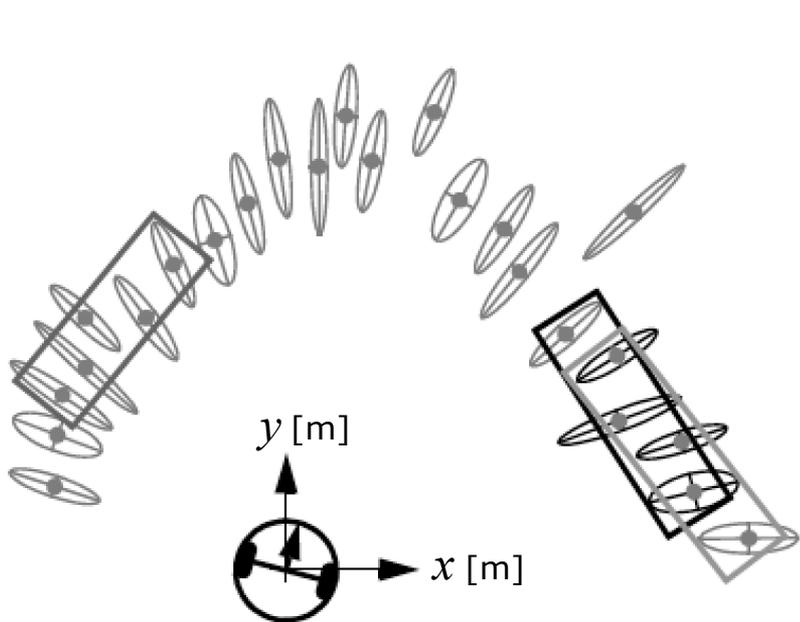
Si nous calculons la solution aux moindres carrés, nous trouvons la droite optimale définie par (rouge dans la figure ci-dessous):

$$\hat{r} = 0.4 \text{ m}, \hat{\alpha} = 37.36^\circ$$

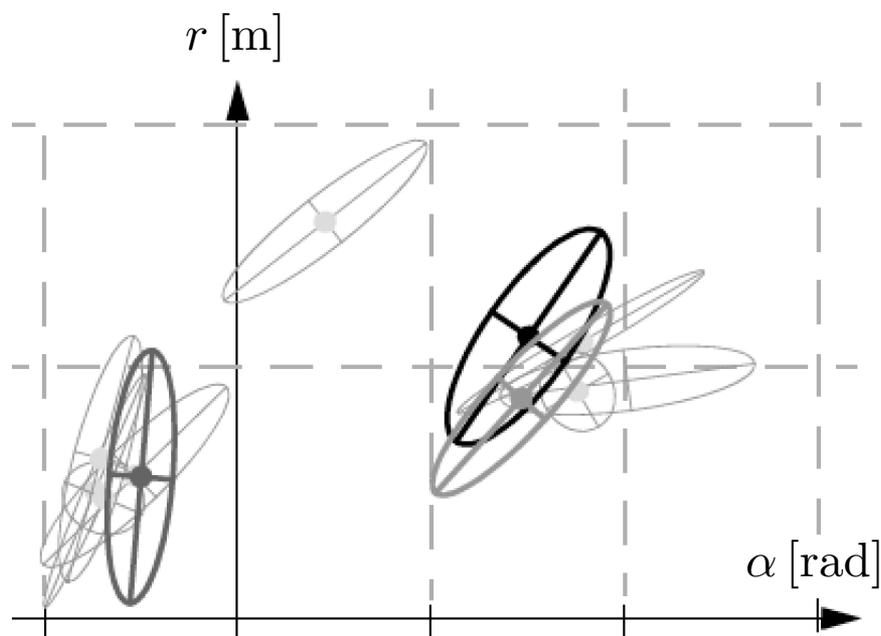


## Exemple

Représentation de l'incertitude par des ellipses dans l'espace cartésien du robot et dans l'espace  $(r, \alpha)$  des droites



Espace du robot  
(incertitude des mesures)



Espace des droites