

Surveillance Distribuée de Systèmes Multi-agents

UPJV, Département EEA

Master 2 3EA, EC53

UE alternants

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

fabio.morbidi@u-picardie.fr

Mardi, Mercredi et Jeudi

13h30-16h00 (CM et TD salle CURI 305)

13h30-17h30 (TP salle CURI 305)

AU 2022-2023



Ch. 3: Estimation distribuée

• Introduction à la théorie des graphes

Partie 1

• Protocole de consensus

Partie 2

• Dynamic average consensus estimators

Partie 3

• Méthode des moindres carrés distribuée

Partie 4

• Filtre de Kalman distribué

Partie 5

Introduction

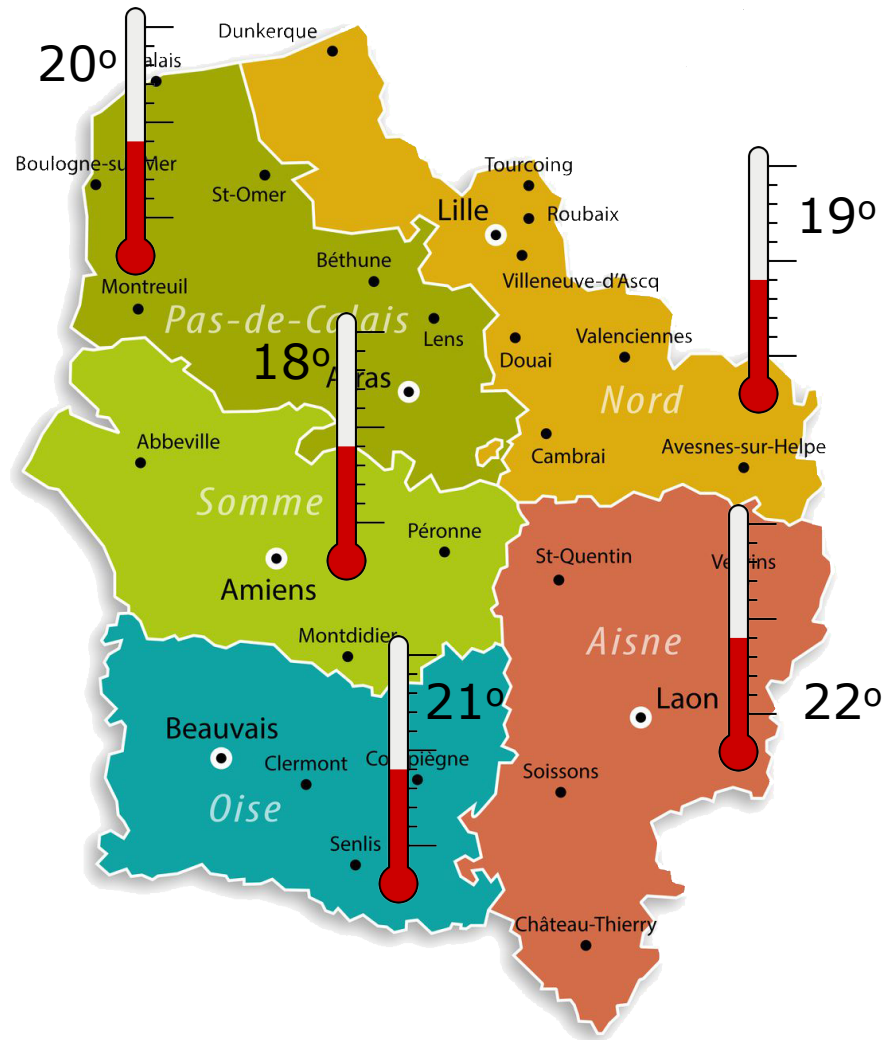
- Le problème de l'**accord** (ou de l'*agreement*) est l'un des problèmes les plus importants pour la coordination d'un système multi-agents
 - ⇒ Un groupe d'agents doit *parvenir à un accord* sur la valeur d'un *état partagé*



- Nous étudierons la *dynamique* du *protocole de consensus* sur des **réseaux statiques non orientés**
- Nous verrons l'**interdépendance** entre les propriétés de convergence du protocole de consensus et les attributs structurels du réseau sous-jacent

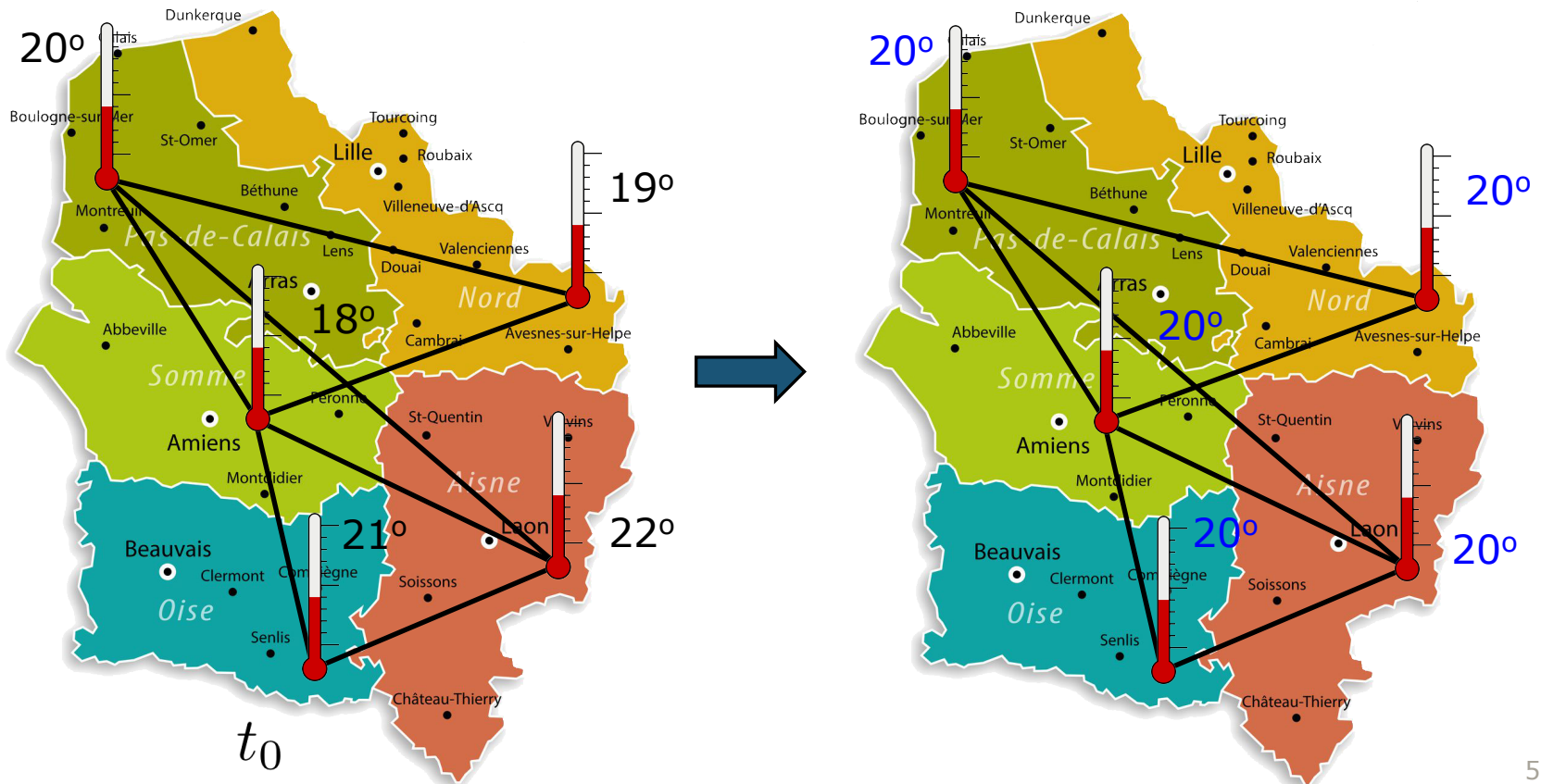
Protocole de consensus : un exemple motivant

- Un groupe de capteurs mesure la *température* en Hauts-de-France



Protocole de consensus : un exemple motivant

- En utilisant un **réseau de communication** pour échanger les informations, les capteurs doivent parvenir à un accord sur la *seule valeur* (par ex. 20°) qui représente la température de la région Hauts-de-France
- Dans ce but, les capteurs doivent mettre en œuvre un **protocole** sur le réseau, leur permettant de parvenir à un accord sur la valeur commune mesurée

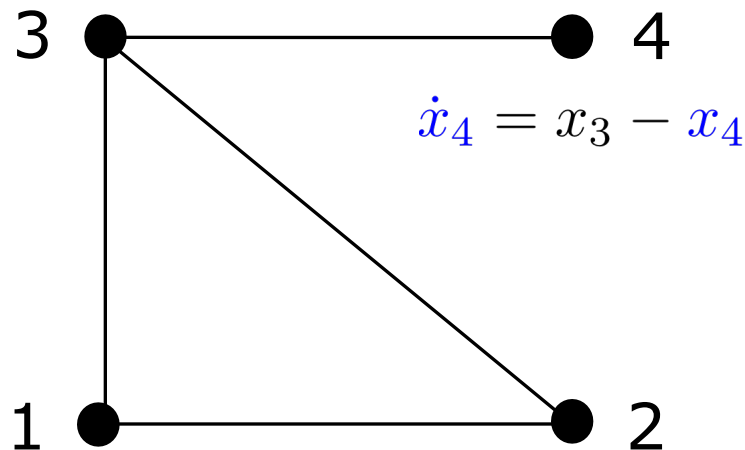


Protocole de consensus

- Le protocole de consensus implique n **unités dynamiques** interconnectées par des liaisons où les informations relatives circulent
- On fait l'hypothèse que le **taux de variation** de l'état de chaque unité (la température dans notre exemple) est régi par la somme des états relatifs par rapport aux unités voisines

Exemple:

$$\dot{x}_3 = (x_1 - x_3) + (x_2 - x_3) + (x_4 - x_3)$$



$$\dot{x}_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) \quad \dot{x}_2 = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)$$

Protocole de consensus

- Si l'état scalaire du sommet i est noté x_i , alors nous avons:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (x_j(t) - x_i(t)), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

où $\mathcal{N}(i)$ est le voisinage du sommet i dans le réseau (c'est-à-dire l'ensemble des sommets adjacents à i)

- Nous pouvons récrire le système global, sous forme vectorielle, comme suit:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G}) \mathbf{x}(t) \quad \text{dynamique de consensus}$$

- $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ est la matrice laplacienne du réseau d'interaction des agents
- $\mathbf{x}(t) \triangleq [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$.

Protocole de consensus : exemple électrique

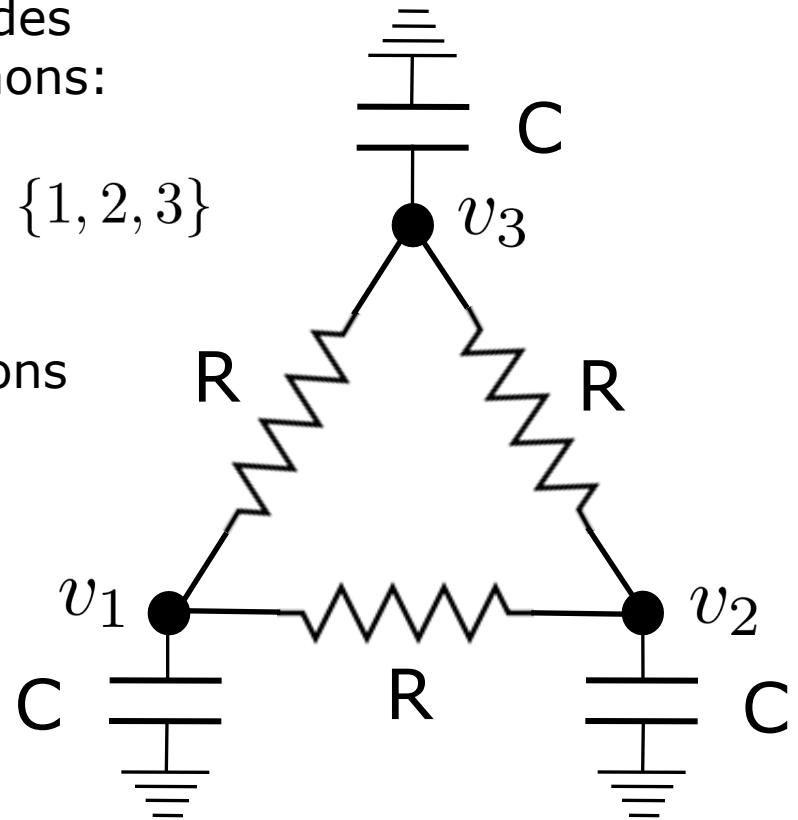
Exemple (Circuit RC):

- Soient $R = 1 \Omega$ et $C = 1 F$
- Si on applique la loi de Kirchhoff des nœuds et des mailles, nous obtenons:

$$\dot{v}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (v_j(t) - v_i(t)), i \in \{1, 2, 3\}$$

qui décrit la dynamique des tensions sur les condensateurs

$\mathcal{N}(i)$ représente ici l'ensemble des nœuds dans le circuit qui sont connectés au nœud i par une résistance



Protocole de consensus

Remarque (États non scalaires):

Si $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^s$, $s > 1$ (par ex. la position (x, y) d'un robot), on peut encore écrire la dynamique de consensus de façon compacte en utilisant le **produit de Kronecker**

Le *produit de Kronecker* de deux matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$, est la matrice par blocs de taille $mp \times nq$ définie par:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad \text{Commande Matlab: } \text{kron}$$

En effet, nous avons que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (-\mathbf{L}(\mathcal{G}) \otimes \mathbf{I}_s) \mathbf{x}(t),$$

où \mathbf{I}_s est la matrice identité $s \times s$ et $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{ns}$.

Ensemble de consensus

- Dans les exemples précédents, nous avons remarqué que l'état de chaque sommet dans le réseau est "**tiré**" vers les états des sommets voisins
 - Est-ce que tous les sommets parviendront à une **moyenne pondérée** de leurs états initiaux, qui correspond aussi à un **point fixe** de la dynamique collective ?
-

Définition (Ensemble de *consensus*)

L'**ensemble de consensus** $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ est le sous-espace $\text{span}\{\mathbf{1}\}$, c'est-à-dire:

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j, \text{ pour tous les } i, j\}.$$

Exemples:

$$[2, 2, \dots, 2]^T \in \mathcal{A}, \quad [-7, -7, \dots, -7]^T \in \mathcal{A}.$$

Protocole de consensus : étude de convergence

Le spectre de la matrice laplacienne d'un graphe *connexe* non orienté est:

$$0 = \lambda_1(\mathbf{L}(\mathcal{G})) < \lambda_2(\mathbf{L}(\mathcal{G})) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{L}(\mathcal{G})),$$

et $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ est le **vecteur propre** qui correspond à la *valeur propre zéro*.

Considérons la **factorisation spectrale** de la matrice laplacienne (rappel: $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ est une *matrice symétrique*):

$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}(\mathcal{G}) \mathbf{U}^T,$$

où

$$\mathbf{\Lambda}(\mathcal{G}) = \text{diag}(\lambda_1(\mathcal{G}), \dots, \lambda_n(\mathcal{G})),$$

et

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n],$$

est une matrice $n \times n$ dont les colonnes sont les vecteurs propres *normalisés* et mutuellement orthogonaux de $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ avec $\mathbf{u}_1 = \mathbf{1}/\sqrt{n}$

Remarque: pour plus de simplicité, par la suite on écrira $\lambda_i(\mathcal{G})$ au lieu de $\lambda_i(\mathbf{L}(\mathcal{G}))$

Protocole de consensus : étude de convergence

- La solution de l'équation différentielle $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G}) \mathbf{x}(t)$, avec état initial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, est:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{L}(\mathcal{G})t} \mathbf{x}_0.$$

Si nous utilisons la *factorisation spectrale* de la matrice laplacienne, nous avons que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{-\mathbf{L}(\mathcal{G})t} \mathbf{x}_0 \\ &= e^{-(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}(\mathcal{G})\mathbf{U}^T)t} \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{U}e^{-\mathbf{\Lambda}(\mathcal{G})t} \mathbf{U}^T \mathbf{x}_0 \\ &= (e^{-\lambda_1(\mathcal{G})t} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + e^{-\lambda_2(\mathcal{G})t} \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \dots + e^{-\lambda_n(\mathcal{G})t} \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T) \mathbf{x}_0 \\ &\stackrel{\textcircled{=}}{=} e^{-\lambda_1(\mathcal{G})t} (\mathbf{u}_1^T \mathbf{x}_0) \mathbf{u}_1 + e^{-\lambda_2(\mathcal{G})t} (\mathbf{u}_2^T \mathbf{x}_0) \mathbf{u}_2 + \dots + e^{-\lambda_n(\mathcal{G})t} (\mathbf{u}_n^T \mathbf{x}_0) \mathbf{u}_n. \end{aligned}$$

↖ Décomposition selon chaque "axe propre"

Protocole de consensus : étude de convergence

Théorème

Soit \mathcal{G} un *graphe connexe*. Alors, le protocole $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G}) \mathbf{x}(t)$ converge vers l'ensemble de consensus \mathcal{A} avec une vitesse de convergence qui est dictée par $\lambda_2(\mathbf{L}(\mathcal{G}))$

Preuve:

La preuve est une conséquence directe de l'équation,

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\lambda_1(\mathcal{G})t} (\mathbf{u}_1^T \mathbf{x}_0) \mathbf{u}_1 + e^{-\lambda_2(\mathcal{G})t} (\mathbf{u}_2^T \mathbf{x}_0) \mathbf{u}_2 + \dots + e^{-\lambda_n(\mathcal{G})t} (\mathbf{u}_n^T \mathbf{x}_0) \mathbf{u}_n,$$

si on observe que pour un graphe connexe $\lambda_i(\mathcal{G}) > 0$, pour $i \geq 2$; comme toujours, $\lambda_1(\mathcal{G}) = 0$. Donc,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = (\mathbf{u}_1^T \mathbf{x}_0) \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{x}_0}{n} \mathbf{1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0) \right) \mathbf{1} \quad \text{Consensus en moyenne}$$

et par conséquent $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathcal{A}$. Comme $\lambda_2(\mathcal{G})$ est la valeur propre positive la plus faible de la matrice laplacienne, elle détermine le *mode de convergence le plus lent* dans la limite ci-dessus. \square

Protocole de consensus : étude de convergence

Exemples ($n = 6$):

Graphe complet

Le spectre de la matrice laplacienne de K_6 est:

$$\{0, 6, 6, 6, 6, 6\}$$

$$\text{Donc } \lambda_2(K_6) = 6$$

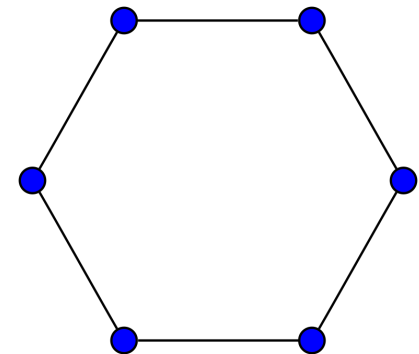
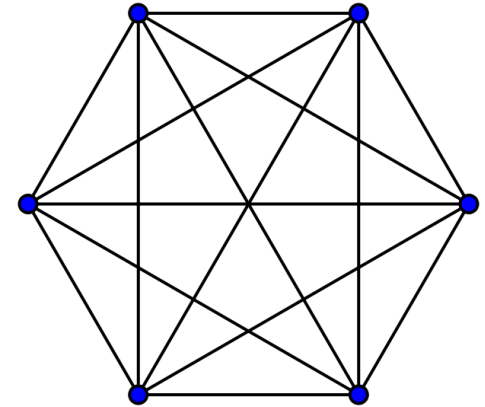
Graphe cycle

Les valeurs propres de la matrice laplacienne de C_6 sont:

$$2 - 2 \cos \left(\frac{\pi k}{3} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Donc } \lambda_2(C_6) = 1$$

Remarque : $\lambda_2(K_6) > \lambda_2(C_6)$



Protocole de consensus : remarque I

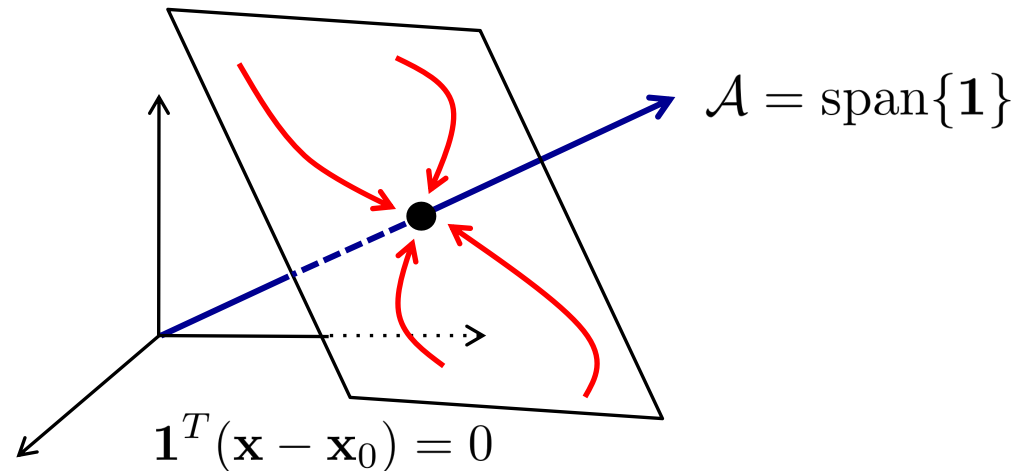
Il est à noter que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{1}^T \mathbf{x}(t)}{n} \right) = \frac{\mathbf{1}^T (-\mathbf{L}(\mathcal{G}) \mathbf{x}(t))}{n} = -\frac{\mathbf{x}^T(t) \mathbf{L}(\mathcal{G}) \mathbf{1}}{n} = 0.$$

Donc, la quantité

$$\frac{\mathbf{1}^T \mathbf{x}(t)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad \forall t \geq 0,$$

c'est-à-dire le **centroïde** des états des agents, est une **constante du mouvement** pour la dynamique de consensus $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G}) \mathbf{x}(t)$ (à savoir, elle est *conservée* pendant l'évolution du système)



Protocole de consensus : remarque II

Définition (*Arbre*)

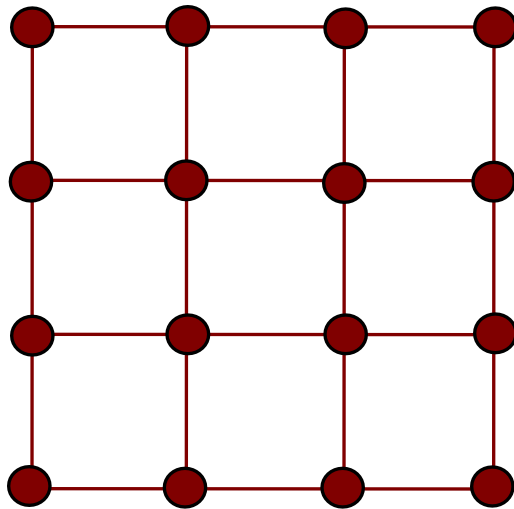
Un *arbre* est un graphe connexe sans cycles

Définition (*Arbre couvrant* ou *spanning tree*)

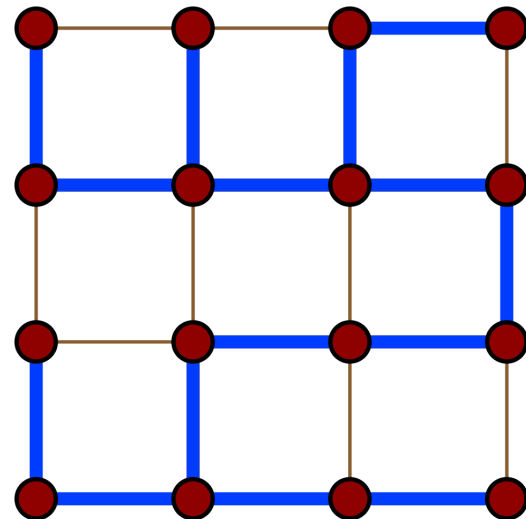
Un *arbre couvrant* d'un graphe connexe \mathcal{G} est un arbre composé de tous les sommets et de certaines (ou éventuellement toutes) les arêtes de \mathcal{G}

De façon informelle, un arbre couvrant de \mathcal{G} est un sous-ensemble des arêtes de \mathcal{G} formant un arbre qui couvre tous les sommets

Exemple:



Graphe grille \mathcal{G}



Bleu: arbre couvrant de \mathcal{G}

Protocole de consensus : remarque II

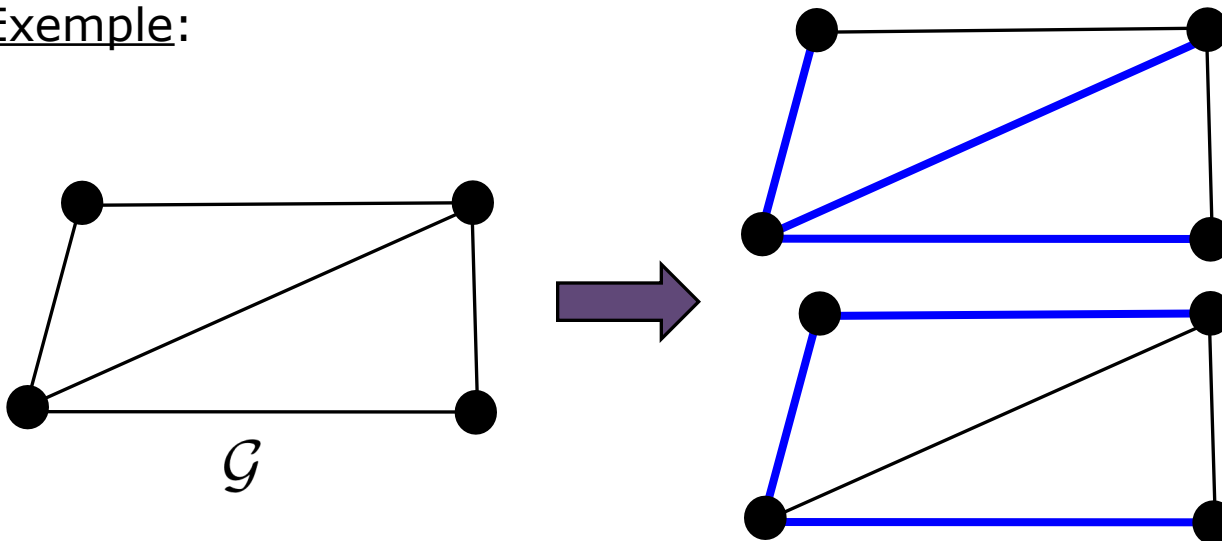
Proposition

Une condition *nécessaire* et *suffisante* pour la convergence du protocole de consensus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G}) \mathbf{x}(t),$$

vers l'ensemble de consensus \mathcal{A} pour toute condition initiale \mathbf{x}_0 est que le graphe sous-jacent \mathcal{G} contient un ***arbre couvrant***

Exemple:



Deux possibles arbres couvrants de \mathcal{G} (bleus).
Attention: Il y en a d'autres !

Exemple 1 : problème du rendez-vous

Protocole de consensus "en action"

- n robots mobiles avec un modèle dynamique de type *integrateur*

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

doivent se rencontrer au même endroit. Ici, $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i]^T$ dénote la position du robot i dans le plan

- Le point de rendez-vous **n'est pas connu** au préalable et les robots **n'ont pas accès** à leurs *positions absolues* (pas de GPS embarqué)
- Les robots peuvent uniquement mesurer leurs **déplacements relatifs** par rapport aux voisins

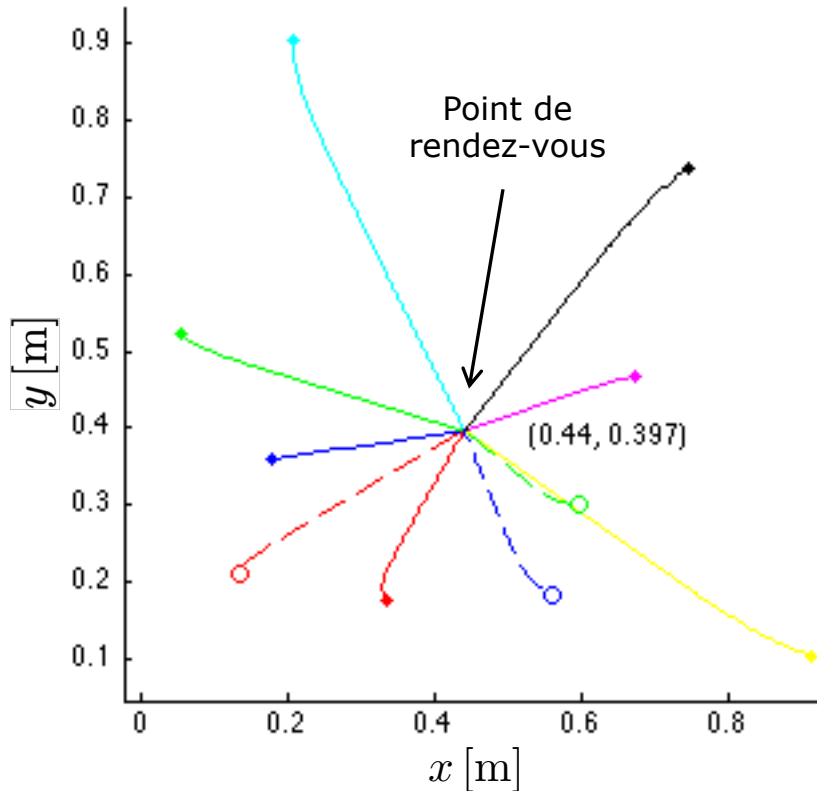
Solution:

Choisir l'entrée de commande suivante pour le robot i :

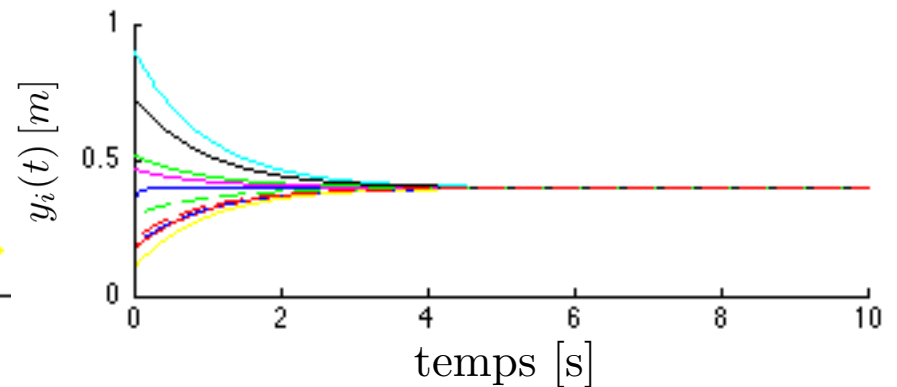
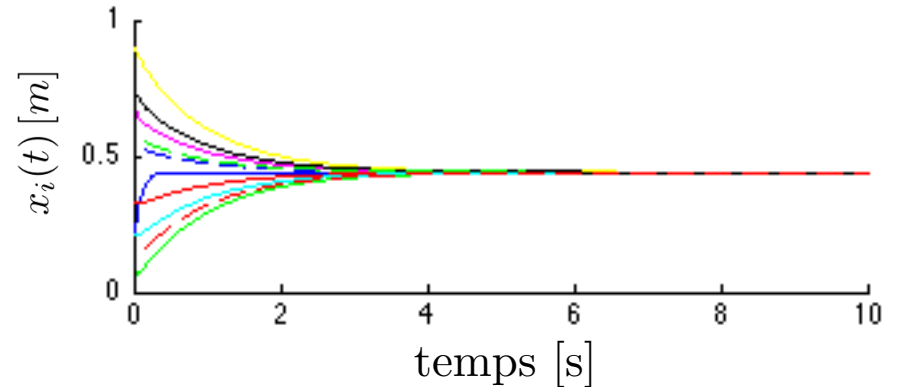
$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))$$

Exemple 1 : problème du rendez-vous

- **Simulation sur Matlab** (Topologie du réseau: S_{10})



Trajectoire 2D des 10 robots



Évolution temporelle des coordonnées x et y des 10 robots

Exemple 2 : poursuite cyclique (n -bug problem)

- Considérons n robots mobiles avec un modèle dynamique de type *integrateur*

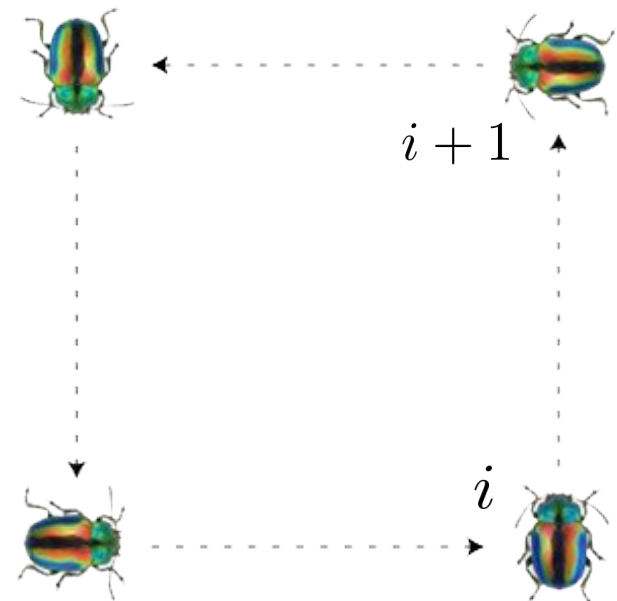
$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

et supposons que le robot i doit **poursuivre** le robot $i + 1$ modulo n . Comme auparavant, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$ indique la position du robot i dans le plan

- Nous pouvons choisir l'*entrée de commande* suivante pour le robot i :

$$\mathbf{u}_i(t) = k(\mathbf{x}_{i+1}(t) - \mathbf{x}_i(t))$$

où k est un *gain positif*



Exemple 2 : poursuite cyclique (n -bug problem)

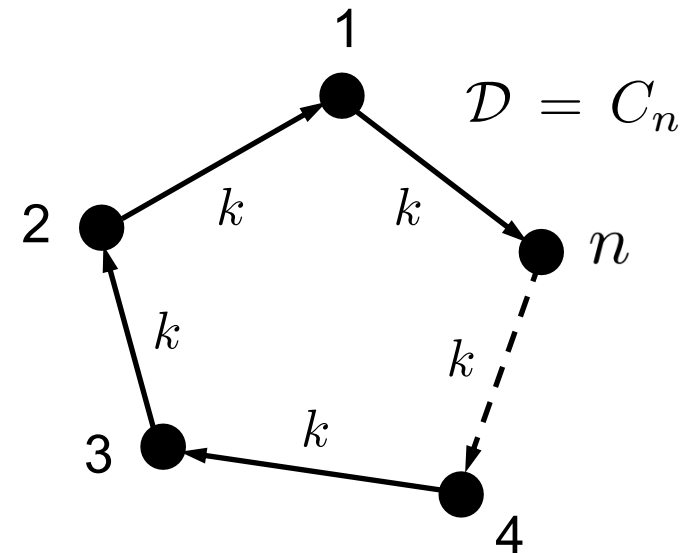
- Cela nous amène à nouveau au système dynamique suivant:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (-\mathbf{L}(\mathcal{D}) \otimes \mathbf{I}_2) \mathbf{x}(t)$$

où $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t), \dots, \mathbf{x}_n^T(t)]^T$ et

$$\mathbf{L}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k & -k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k & -k \\ -k & 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}$$

↖ Matrice circulante



(dans une matrice circulante, la ligne $i + 1$ est obtenue à partir de la ligne i par **décalage circulaire**)

Pour plus de détails, voir la monographie "*Flocking and Rendezvous in Distributed Robotics*", B.A. Francis, M. Maggiore, Springer, 2016

Exemple 2 : poursuite cyclique (n -bug problem)

- Positions initiales (vertes) et trajectoires des robots (bleues):

