Surveillance Distribuée de Systèmes Multi-agents

UPJV, Département EEA

Master 2 3EA, EC53

UE alternants

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
fabio.morbidi@u-picardie.fr

Mardi, Mercredi et Jeudi
13h30-16h00 (CM et TD salle CURI 305)
13h30-17h30 (TP salle CURI 305)

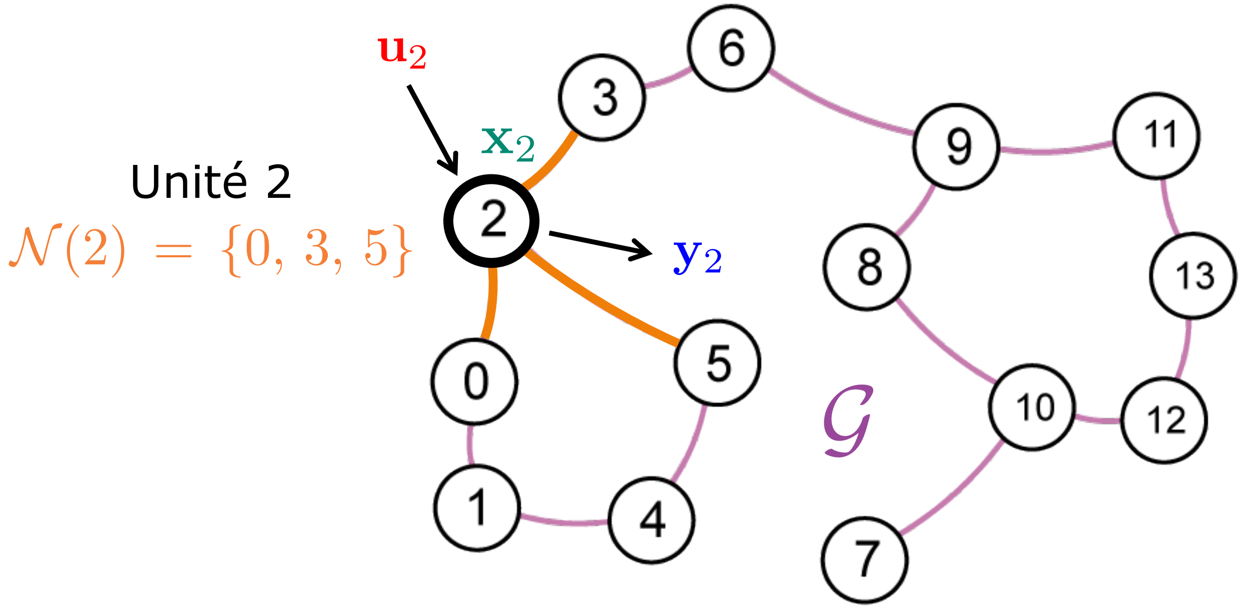
AU 2022-2023

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Ch. 3: Estimation distribuée

Estimation distribuée : introduction

- n unités (ou agents) dynamiques en réseau (graphe $\mathcal{G}$)
- L'unité i a une entrée $\mathbf{u}_i$, une sortie $\mathbf{y}_i$ et un état local $\mathbf{x}_i$
- L'unité i communique *uniquement* avec ses voisins $j \in \mathcal{N}(i)$



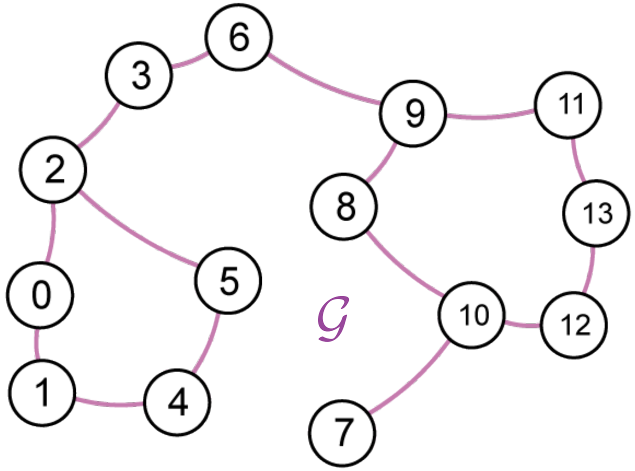
Objectif : chaque unité doit estimer une ou plusieurs "*variables globales*" du système en réseau

Estimation distribuée : introduction

- Le ***protocole de consensus*** peut être utilisé dans de nombreux *problèmes d'estimation distribuée*

- En particulier, nous étudierons les estimateurs suivants:

  1. *Dynamic average consensus estimators* ("estimateurs basés sur le consensus dynamique en moyenne")
  2. *Méthode des moindres carrés distribuée*
  3. *Filtre de Kalman distribué*



Estimation distribuée : introduction

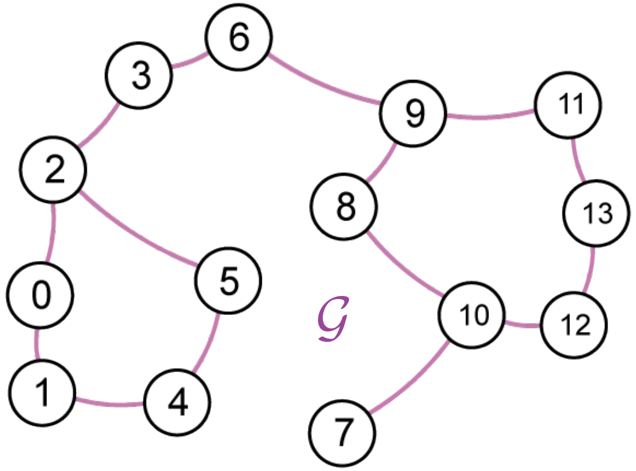
- Le ***protocole de consensus*** peut être utilisé dans de nombreux *problèmes d'estimation distribuée*

- En particulier, nous étudierons les estimateurs suivants:

  1. ***Dynamic average consensus estimators*** ("estimateurs basés sur le consensus dynamique en moyenne")

  2. *Méthode des moindres carrés distribuée*

  3. *Filtre de Kalman distribué*



Dynamic average consensus estimators

Nous avons vu que si le graphe non orienté $\mathcal{G}$ est *connexe*, alors l'état $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ du **protocole de consensus**,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G})\,\mathbf{x}(t)$$

converge vers la moyenne des états initiaux $\mathbf{x}_0 = [x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}]^T$ c'est-à-dire:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{1}^T\mathbf{x}_0}{n}\mathbf{1} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{0,i}\right]\mathbf{1}$$

où $\mathbf{L}$ est la matrice laplacienne du graphe et $\mathbf{1} = [1, 1, \ldots, 1]^T$.

Ce problème de consensus en moyenne est parfois appelé **statique**, car il incorpore uniquement la donnée initiale *constante* $\mathbf{x}_0$

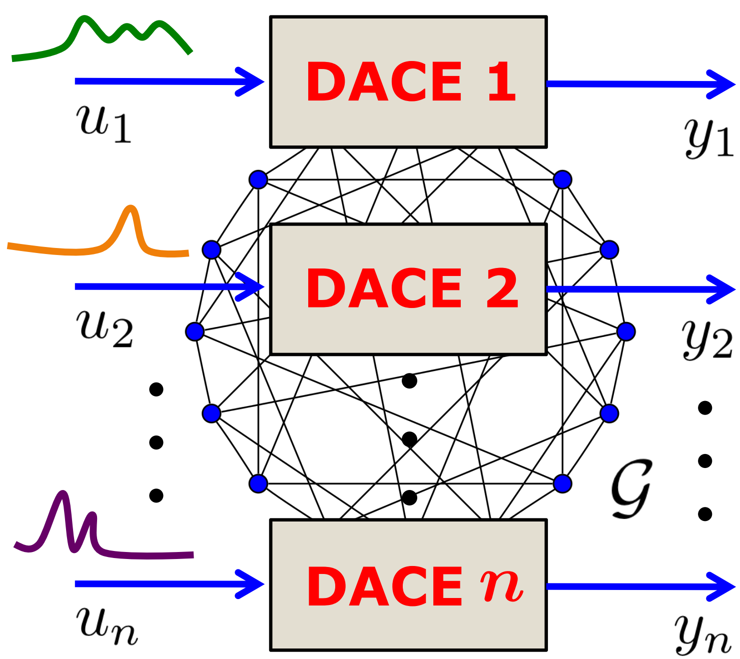
Objectif:

Concevoir un protocole (estimateur) distribué capable de **suivre la moyenne** d'**entrées variables dans le temps**

Dynamic average consensus estimators

- Les "Dynamic Average Consensus Estimators" (DACE) généralisent les *protocoles statiques de consensus* au cas d'**entrées variables**

- Ces estimateurs permettent à chaque sommet du réseau de suivre (approximativement) la *moyenne des entrées variables* $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ des n nœuds, en utilisant uniquement l'information locale



Idéalement, nous voudrions que la sortie y_i de chaque nœud $i \in \{1, \ldots, n\}$ satisfasse la propriété suivante:

$$y_i(t) \to \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \text{ lorsque } t \to \infty$$

ou, sous forme matricielle:

$$\mathbf{y}(t) \to \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n} \mathbf{u}(t) \text{ lorsque } t \to \infty$$

Remarque: pour simplifier la notation, on fera l'hypothèse que les entrées u_i et les sorties y_i sont des *scalaires*

Dynamic average consensus estimators

- On analysera **deux familles** importantes de DACE:

  1. DACE *passe-haut* (ou *proportionnel*)

  2. DACE *proportionnel-intégral* (*PI*)

Dynamic average consensus estimators

1. DACE passe-haut

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\gamma\, x_i - K_P \sum\limits_{j \in \mathcal{N}(i)} (y_i - y_j), \\ y_i = x_i + u_i, \end{cases} \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

avec

- u_i entrée de l'agent i
- y_i estimé de l'agent i de la moyenne des entrées de tous les agents
- x_i état de l'estimateur de l'agent i
- $K_P > 0$ gain de l'estimateur
- $\gamma \geq 0$ *forgetting factor* (ou "facteur d'oubli"): ce paramètre règle le taux avec lequel la nouvelle information remplace l'ancienne information dans le processus dynamique de calcul de la moyenne

Dynamic average consensus estimators

1. DACE passe-haut

On peut récrire de façon compacte les n estimateurs, comme suit:

$$\dot{\mathbf{x}} = -(\gamma \mathbf{I}_n + K_P \mathbf{L})\mathbf{x} - \underbrace{K_P \mathbf{L}}_{\mathbf{B}\ \text{(matrice d'entrée)}} \mathbf{u},$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u},$$

avec $\mathbf{x} \triangleq [x_1, \ldots, x_n]^T$, $\mathbf{u} \triangleq [u_1, \ldots, u_n]^T$ et $\mathbf{y} \triangleq [y_1, \ldots, y_n]^T$.

Remarques:

- Cet estimateur est appelé *passe-haut*, car le système LTI entre les entrées u_i et les sorties y_i, est un *filtre passe-haut* avec un gain unitaire à haute fréquence

- L'estimateur **n'est pas robuste** au bruit et aux erreurs d'initialisation, et il a une **erreur en régime permanent** avec des *entrées constantes*

Pour plus de détails, voir:

- "*Dynamic Consensus for Mobile Networks*", D.P. Spanos, R. Olfati-Saber, R.M. Murray, in Proc. 16th IFAC World Congress, 2005

- "*Multi-Agent Coordination by Decentralized Estimation and Control*", P. Yang, R.A. Freeman, K.M. Lynch, IEEE Trans. Autom. Contr., vol. 53, n. 11, pp. 2480-2496, 2008

Dynamic average consensus estimators

1. DACE passe-haut

Définissons la *dynamique de l'erreur* suivante:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \boxed{\frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n}\mathbf{u}(t)}$$

Vecteur des "vraies" moyennes de toutes les entrées $u_1, \ldots, u_n$

et supposons que l'entrée *varie lentement*, à savoir il existe un $\delta > 0$ tel que:

$$\|\gamma\,\mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t)\| \leq \delta, \;\; \forall\, t \geq 0.$$

Proposition:
Soit $\mathcal{G}$ un graphe connexe. Si l'entrée $\mathbf{u}(t)$ varie lentement selon la condition précedente, alors nous avons la borne suivante sur l'erreur $\mathbf{e}(t)$:

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{e}(t)\| \leq \frac{\delta\sqrt{2}}{\gamma + \epsilon},$$

pour quelque $\epsilon > 0$.

Dynamic average consensus estimators

2. DACE proportionnel-intégral

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \gamma(u_i - x_i) - K_P \sum\limits_{j \in \mathcal{N}(i)} (x_i - x_j) + K_I \sum\limits_{j \in \mathcal{N}(i)} (z_i - z_j), \\ \dot{z}_i = -K_I \sum\limits_{j \in \mathcal{N}(i)} (x_i - x_j), \qquad\qquad i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ y_i = x_i, \end{cases}$$

avec

- u_i entrée de l'agent i
- $y_i = x_i$ estimé de l'agent i de la moyenne des entrées de tous les agents
- z_i état interne de l'estimateur de l'agent i
- $K_P, K_I > 0$ *gain proportionnel* et *gain intégral* de l'estimateur
- $\gamma > 0$ *forgetting factor* (**Attention**: $\gamma = 0$ n'est plus autorisé, car maintenant ce paramètre a un impact direct sur la valeur d'entrée u_i de l'estimateur, voir la 1re équation)

Dynamic average consensus estimators

2. DACE proportionnel-intégral

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \gamma(u_i - x_i) - K_P \sum\limits_{j \in \mathcal{N}(i)} (x_i - x_j) + K_I \sum\limits_{j \in \mathcal{N}(i)} (z_i - z_j), \\ \dot{z}_i = -K_I \sum\limits_{j \in \mathcal{N}(i)} (x_i - x_j), \qquad\qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ y_i = x_i \end{cases}$$

Remarques:

- Cet estimateur est appelé *proportionnel-intégral* (PI) à cause de la présence de l'intégral z_i de la différence entre les estimés locaux x_i et x_j (voir la 2e équation)

- Contrairement à l'estimateur passe-haut, dans l'estimateur PI il n'y a pas un *lien direct* entre l'entrée u_i et la sortie y_i : par conséquent, il peut filtrer plus efficacement les bruits à *haute fréquence* (en d'autres termes, l'estimateur PI a un filtre stable entre l'entrée bruitée et la sortie)

Dynamic average consensus estimators

2. DACE proportionnel-intégral

On peut récrire de façon compacte les n estimateurs PI, comme suit:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma \mathbf{I}_n - K_P \mathbf{L} & K_I \mathbf{L} \\ -K_I \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{B} \\ \text{(matrice} \\ \text{d'entrée)}}} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x},$$

où

$$\mathbf{x} \triangleq [x_1, \ldots, x_n]^T, \quad \mathbf{z} \triangleq [z_1, \ldots, z_n]^T,$$

$$\mathbf{u} \triangleq [u_1, \ldots, u_n]^T, \quad \mathbf{y} \triangleq [y_1, \ldots, y_n]^T,$$

sont des vecteurs à n dimensions

Dynamic average consensus estimators

2. DACE proportionnel-intégral

Théorème (Résultat principal):

Soit $\mathcal{G}$ un graphe connexe avec n sommets et supposons que chaque agent i met en œuvre un estimateur PI avec paramètres K_P, K_I, $\gamma > 0$.

Alors, pour tout ensemble **constant d'entrées** $\mathbf{u}$ et *pour tous les états initiaux* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$, les états $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ des estimateurs PI convergent asymptotiquement vers des *vecteurs constants* et l'erreur

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n}\mathbf{u}(t),$$

converge exponentiellement vers zéro lorsque $t \to \infty$.

Dynamic average consensus estimators

2. DACE proportionnel-intégral

Remarque:

- L'ensemble des n estimateurs PI est input-to-state stable (ISS), à l'exclusion d'un seul état scalaire *non controllable* et *non observable* (qui reste constant)

- Par conséquent, même si les entrées $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ *varient de façon arbitrairement rapide*, tant que le réseau reste connexe et que $K_P,\, K_I,\, \gamma > 0$, une ***borne*** sur $\|\mathbf{u}(t)\|$ implique une ***borne*** sur la norme de l'erreur $\|\mathbf{e}(t)\|$.

Pour plus de détails, voir:

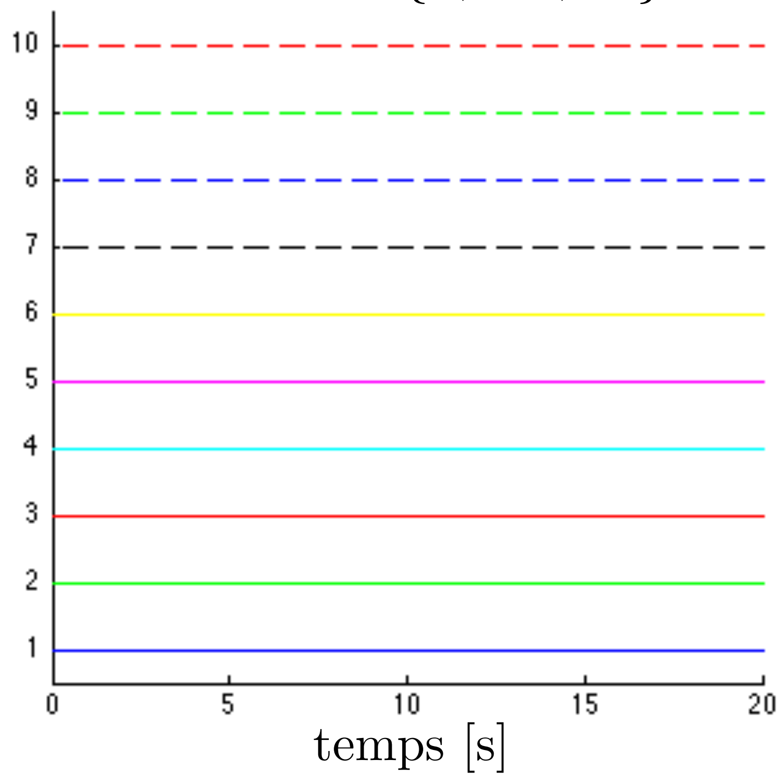
"*Decentralized Environmental Modeling by Mobile Sensor Networks*", K.M. Lynch, I.B. Schwartz, P. Yang, R.A. Freeman, IEEE Trans. Robotics, vol. 24, n. 3, pp. 710-724, 2008

Dynamic average consensus estimators

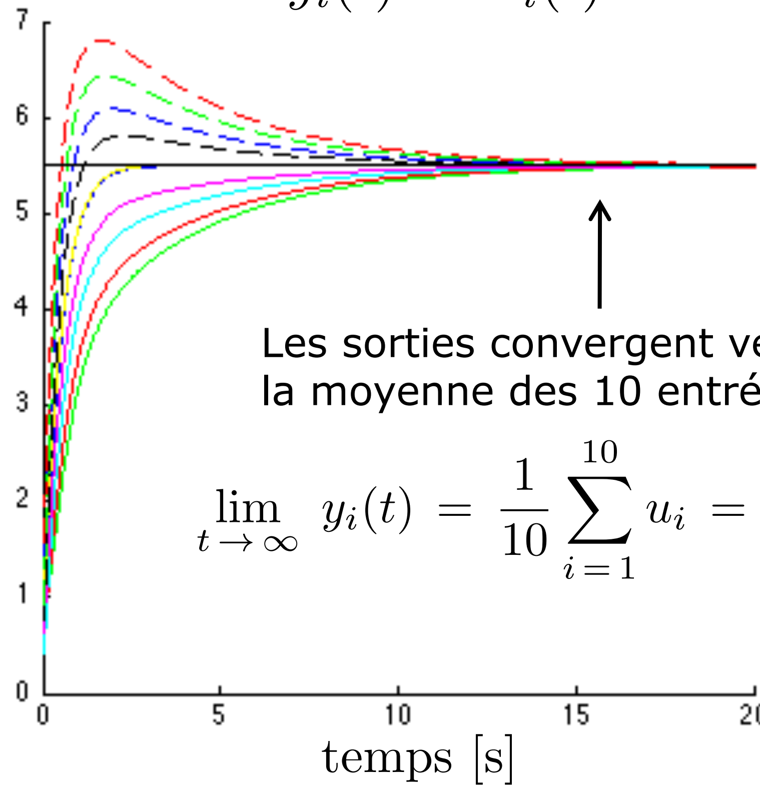
Exemple (10 agents, graphe étoile $S_{10}, \gamma = 2,\ K_P = 2,\ K_I = 1$)

Entrées constantes:

$u_i \ = i \in \{1, \ldots, 10\}$



$y_i(t) \ = \ x_i(t)$



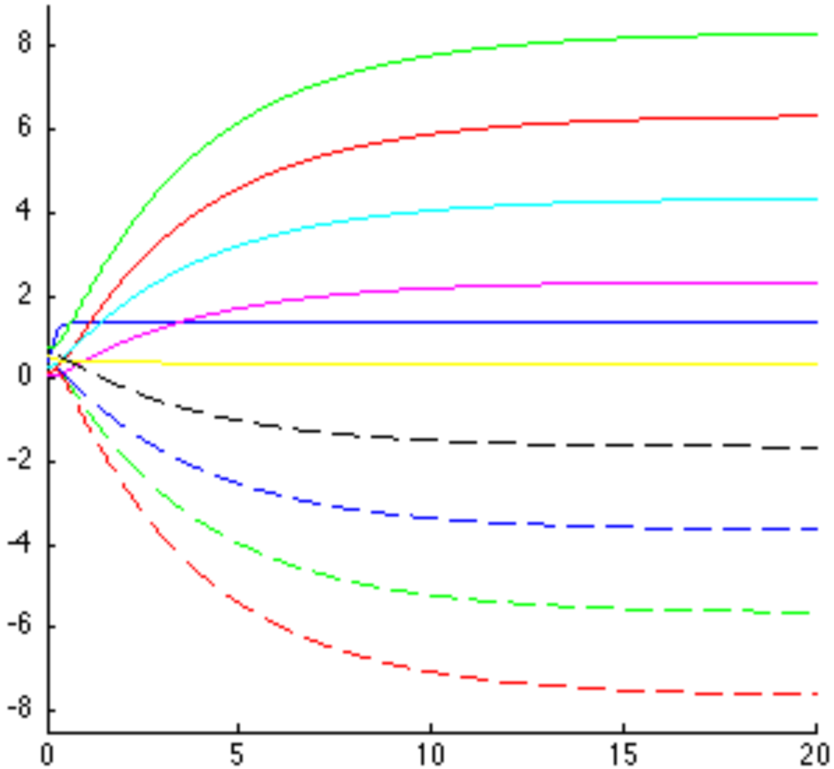
Les sorties convergent vers la moyenne des 10 entrées:

$$\lim_{t \to \infty} \ y_i(t) \ = \ \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} u_i \ = \ \frac{11}{2}$$

Dynamic average consensus estimators

Exemple (10 agents, graphe étoile S_{10}, $\gamma = 2,\ K_P = 2,\ K_I = 1$)

$z_i(t), \in \{1, \dots, 10\}$



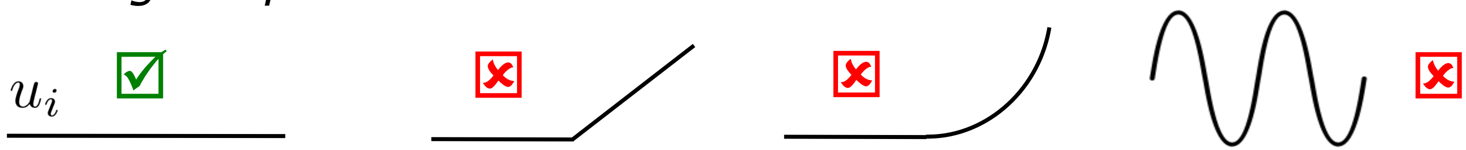
temps [s]

Les états internes $z_i(t)$ des estimateurs PI convergent aussi vers des valeurs constantes

TD3, ex. III
Fichiers Matlab:
DACE_P.m
DACE_PI.m

Dynamic average consensus estimators

- Est-ce possible de concevoir des estimateurs distribués qui permettent de suivre la moyenne d'**entrées non constantes** (par ex. rampes, sinusoïdes, etc.) avec une **erreur zéro** *en régime permanent* ?



- Oui, c'est possible, si on "incorpore" le modèle du signal d'entrée directement dans l'estimateur en utilisant le *Principle du Modèle Interne* [Francis & Wonham, 1976]

  Inconvénient : La nature des signaux d'entrée doit être connue *au préalable* !

Pour plus de détails, voir:

• "*Robust dynamic average consensus of time-varying inputs*", H. Bai, R.A. Freeman, K.M. Lynch, in Proc. 49th IEEE Conf. Decision and Control, pp. 3104-3109, 2010

• "*Tutorial on Dynamic Average Consensus: The Problem, Its Applications, and the Algorithms*", S.S. Kia, B. Van Scoy, J. Cortés, R.A. Freeman, K.M. Lynch, S. Martinez, IEEE Control Systems Magazine, vol. 39, n. 3, pp. 40-72, 2019