

Surveillance Distribuée de Systèmes Multi-agents

UPJV, Département EEA

Master 2 3EA, EC53

UE alternants

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

fabio.morbidi@u-picardie.fr

Mardi, Mercredi et Jeudi

13h30-16h00 (CM et TD salle CURI 305)

13h30-17h30 (TP salle CURI 305)

AU 2022-2023



Ch. 3: Estimation distribuée

• Introduction à la théorie des graphes **Partie 1**

• Protocole de consensus **Partie 2**

• Dynamic average consensus estimators **Partie 3**

• Méthode des moindres carrés distribuée **Partie 4**

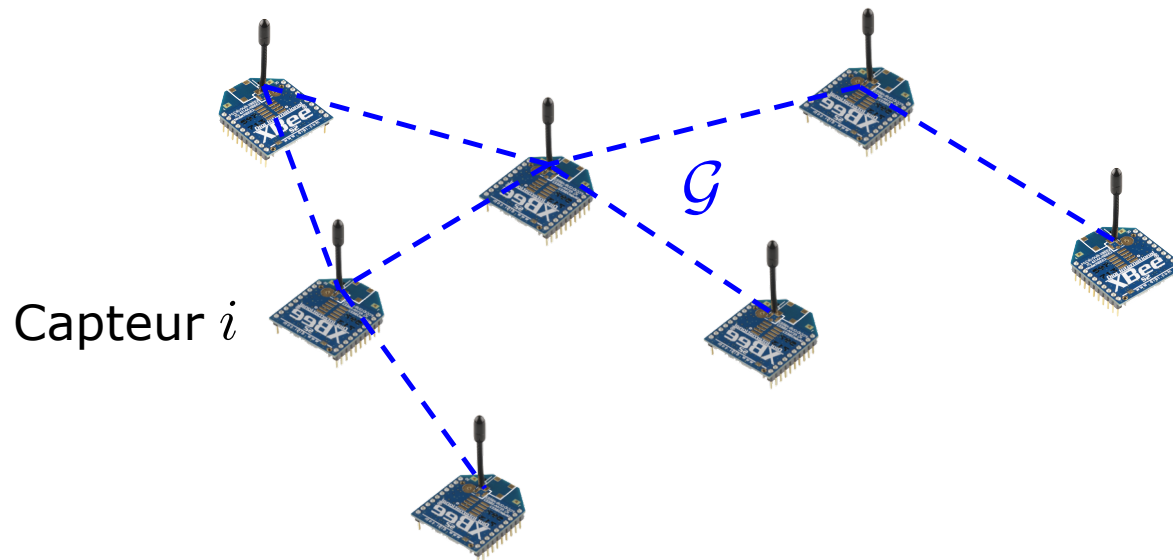
• Filtre de Kalman distribué **Partie 5**

Filtre de Kalman distribué : introduction

Étant donnés n capteurs "intelligents" connectés sur un réseau \mathcal{G} , chaque capteur:

- Réalise des *observations incertaines* de l'état dynamique $\mathbf{x}(k)$ d'un **système linéaire**
- Communique avec les plus proches voisins sur \mathcal{G}

Objectif : chaque capteur doit estimer *localement* et de manière *aussi précise que possible*, l'état $\mathbf{x}(k)$ du système linéaire



Filtre de Kalman : le système dynamique

Soit le système linéaire à temps discret suivant, $k \in \{1, 2, \dots\}$:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

avec

$\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ état du système à l'instant k

$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ état initial du système

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ entrée (connue) du système

$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ sortie du système (ou vecteur de mesure)

$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ bruit de modèle avec matrice de covariance constante \mathbf{Q}

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^p$ bruit de mesure avec matrice de covariance constante \mathbf{R}

On fera l'hypothèse que les assumptions "classiques" sur le bruit de modèle et le bruit de mesure vues dans le Ch. 2, soient satisfaites

Équations du filtre de Kalman

- **Prédiction:**

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k),$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k|k) \mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}.$$

- **Correction:**

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)],$$

$$\mathbf{P}(k+1|k+1) = [\mathbf{P}^{-1}(k+1|k) + \mathbf{H}^T(k+1)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(k+1)]^{-1},$$

où

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1)[\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}]^{-1},$$

est le *gain de Kalman*

Filtre d'information

- Le *filtre d'information* est utile pour mettre en place une version distribuée du filtre de Kalman
 - Cette forme équivalente est obtenue en écrivant les équations du filtre de Kalman en fonction de deux quantités:
 - **Matrice d'information** (ou de *Fisher*): $\mathcal{I} = \mathbf{P}^{-1}$
 - **Vecteur d'information**: $\hat{\mathbf{y}} = \mathcal{I} \hat{\mathbf{x}}$
-

Prédiction:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = (\mathbf{I}_n + \mathbf{M}(k) \mathbf{Q})^{-1} [\mathbf{A}^{-T}(k) \hat{\mathbf{y}}(k|k) + \mathbf{M}(k) \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k)]$$

$$\mathcal{I}(k+1|k) = (\mathbf{I}_n + \mathbf{M}(k) \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{M}(k)$$

avec

$$\mathbf{M}(k) = \mathbf{A}^{-T}(k) \mathcal{I}(k|k) \mathbf{A}^{-1}(k) \text{ et } \mathbf{A}^{-T}(k) = (\mathbf{A}^T(k))^{-1} = (\mathbf{A}^{-1}(k))^T$$

Remarque: pour trouver les deux équations du pas de prédiction du filtre d'information, nous avons utilisé l'*identité matricielle de Woodbury*:

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{M} \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{M}(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{M})^{-1}$$

Filtre d'information

TD3, ex. V

Correction:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) + \mathbf{H}^T(k+1)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}(k+1),$$

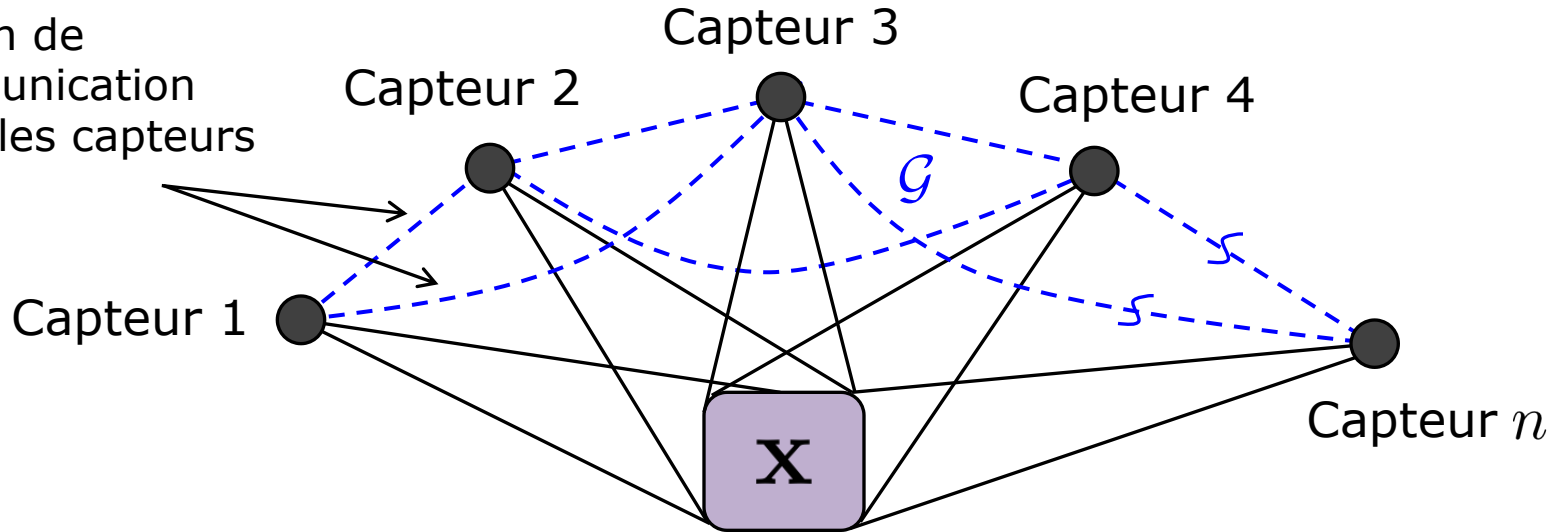
$$\mathcal{I}(k+1|k+1) = \mathcal{I}(k+1|k) + \mathbf{H}^T(k+1)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(k+1).$$

Remarques:

- Si on propage la matrice d'information \mathcal{I} au lieu de la matrice de covariance \mathbf{P} , les équations du pas de prédiction sont plus compliquées tandis que celles du pas de correction sont **plus simples**
- Le filtre d'information est plus avantageux que le filtre de Kalman dans des problèmes qui comportent des *grands vecteurs de mesures*. Il est aussi convenient dans des *problèmes de diagnostic et de détection de plusieurs défauts simultanés*
- Dans le cadre du filtre d'information, on peut écrire le *gain de Kalman*:
$$\mathbf{K}(k+1) = \mathcal{I}^{-1}(k+1|k+1)\mathbf{H}^T(k+1)\mathbf{R}^{-1}.$$
- **Attention:** si l'état initial n'est pas incertain, à savoir $\mathbf{P}(0|0) = \mathbf{0}$, *on ne peut pas initialiser* le filtre d'information (car $\mathbf{P}(0|0)$ n'est pas inversible !)

Filtre de Kalman sur un réseau de capteurs

Liaison de communication entre les capteurs



Considérons le système dynamique linéaire à temps discret

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k),$$

qui est observé par n capteurs via l'équation de mesure:

$$\mathbf{z}_i(k) = \mathbf{H}_i(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}_i(k), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

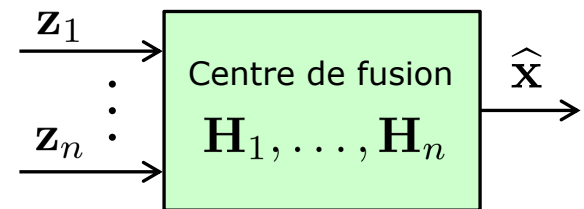
où $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ est un bruit blanc gaussien à moyenne zéro avec matrice de covariance constante \mathbf{R}_i

Filtre de Kalman sur un réseau de capteurs

- Une solution naturelle au problème du filtrage à la Kalman, consiste à combiner les mesures \mathbf{z}_i issues des n capteurs dans un **centre de fusion**

- On peut donc réunir les mesures dans un même vecteur de taille $p = p_1 + \dots + p_n$

$$\mathbf{z}(k) = [\mathbf{z}_1^T(k), \mathbf{z}_2^T(k), \dots, \mathbf{z}_n^T(k)]^T,$$



qu'on peut traiter à l'aide d'un *filtre de Kalman centralisé* pour le système:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k)$$

avec

$$\mathbf{H}(k) = [\mathbf{H}_1^T(k) \quad \mathbf{H}_2^T(k) \quad \dots \quad \mathbf{H}_n^T(k)]^T$$

$$\mathbf{r}(k) = [\mathbf{r}_1^T(k) \quad \mathbf{r}_2^T(k) \quad \dots \quad \mathbf{r}_n^T(k)]^T$$

à condition que les bruits de mesure \mathbf{r}_i des n capteurs soient *statistiquement indépendants*

Filtre de Kalman sur un réseau de capteurs

- Cette *architecture centralisée* a l'inconvenient que tous les calculs sont réalisés au niveau du **centre de fusion** et les capteurs sont utilisés uniquement pour:
 - Effectuer les mesures
 - Relayer les mesures au centre de fusion
- Un examen plus approfondi du pas de correction du *filtre d'information* révèle une **propriété additive** intéressante du vecteur d'information et de la matrice d'information:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) + \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^T(k+1) \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{z}_i(k+1),$$

$$\mathbf{I}(k+1|k+1) = \mathbf{I}(k+1|k) + \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^T(k+1) \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i(k+1).$$

- Les *sommations* dans ces deux équations suggèrent une méthode directe pour rendre le filtre de Kalman sur un réseau de capteurs *plus distribué*

Filtre de Kalman sur un réseau de capteurs

- Supposons que chaque capteur puisse stocker une *copie locale* de la matrice d'information $\mathcal{I}(k+1|k)$ et du vecteur d'information $\hat{\mathbf{y}}(k+1|k)$
- De cette façon:
 - La *matrice d'information* peut être mise à jour en calculant la somme des matrices $\mathbf{H}_i^T(k+1)\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{H}_i(k+1)$ reçues par chaque capteur, avec $\mathcal{I}(k+1|k)$
 - Le *vecteur d'information* peut être mis à jour en calculant la somme des vecteurs $\mathbf{H}_i^T(k+1)\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{z}_i(k+1)$ reçus par chaque capteur, avec $\hat{\mathbf{y}}(k+1|k)$
- Le **pas de prédiction** peut être effectué au niveau de chaque capteur en utilisant la *forme classique* du filtre de Kalman ou la *forme d'information*

Filtre de Kalman sur un réseau de capteurs

- Filtre de Kalman distribué avec un **coordonateur**

Noter que: $\mathcal{I}_i(k+1|k) \hat{\mathbf{x}}_i(k+1|k) = \hat{\mathbf{y}}_i(k+1|k)$,

$$\mathbf{H}_i^T(k+1) \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i(k+1) = \mathcal{I}_i(k+1|k+1) - \mathcal{I}_i(k+1|k).$$

Coordonateur

Pas de correction

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) &= \mathbf{P}(k+1|k+1) [\mathcal{I}(k+1|k) \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ &+ \sum_{i=1}^n (\mathcal{I}_i(k+1|k+1) \hat{\mathbf{x}}_i(k+1|k+1) - \mathcal{I}_i(k+1|k) \hat{\mathbf{x}}_i(k+1|k))], \\ \mathcal{I}(k+1|k+1) &= \mathcal{I}(k+1|k) + \sum_{i=1}^n [\mathcal{I}_i(k+1|k+1) - \mathcal{I}_i(k+1|k)] \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1)$
 $\mathcal{I}(k+1|k+1)$

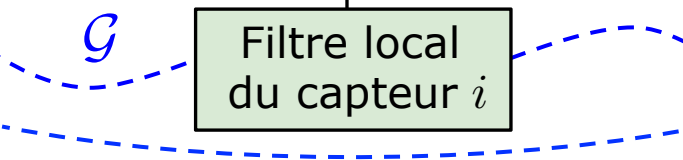
...

$\mathcal{I}_i(k+1|k+1)$
 $\hat{\mathbf{x}}_i(k+1|k+1)$
 $\mathcal{I}_i(k+1|k)$...
 $\hat{\mathbf{x}}_i(k+1|k)$

Filtre local
du capteur 1

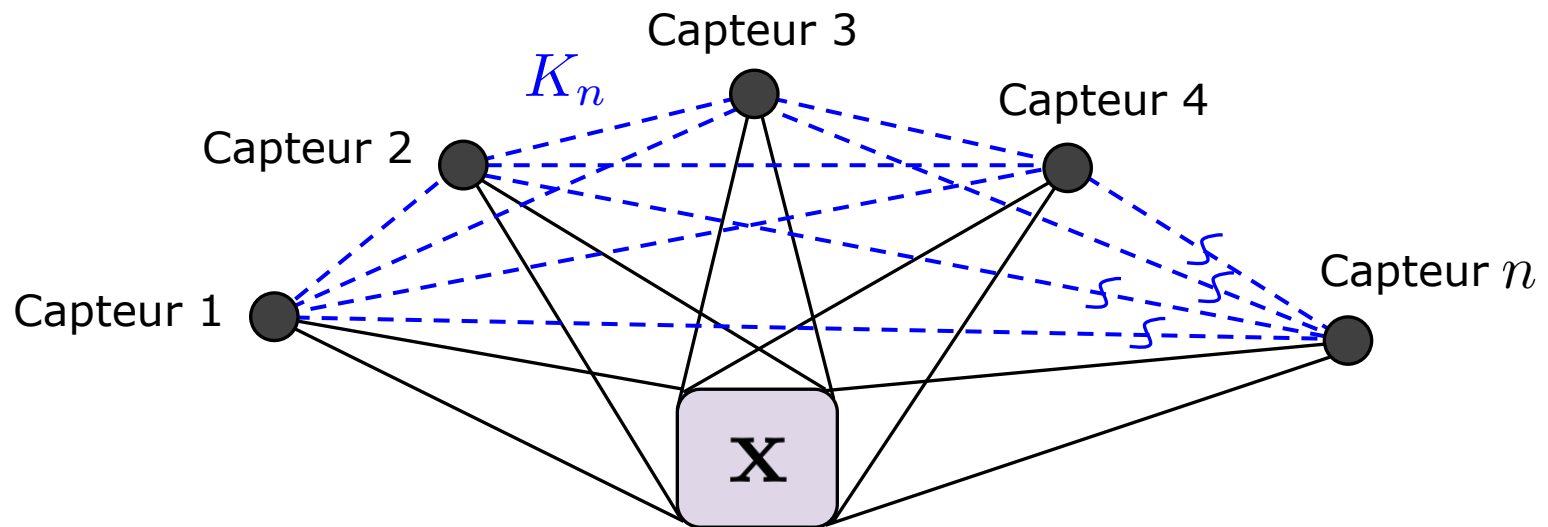
Filtre local
du capteur i

Filtre local
du capteur n



Filtre de Kalman sur un réseau de capteurs

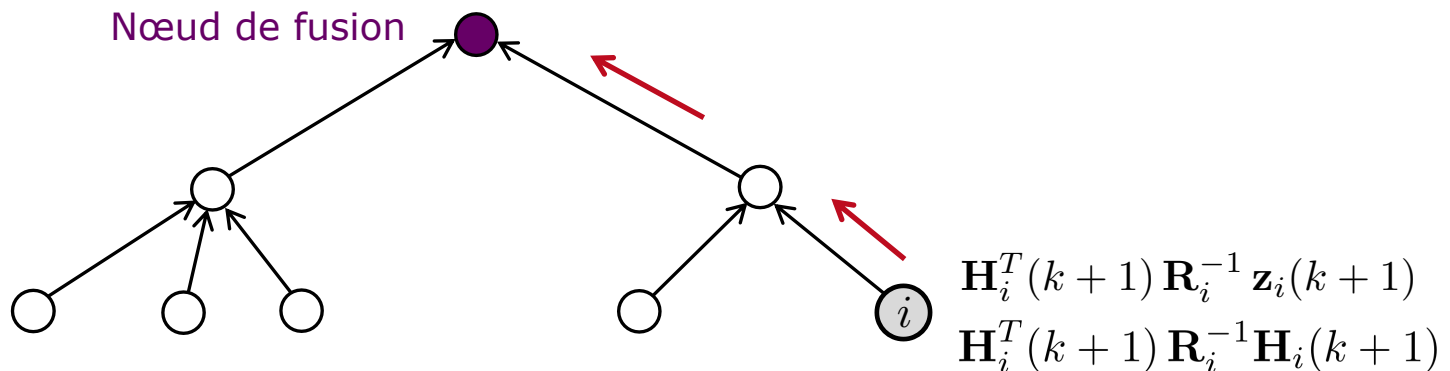
- Le filtre de Kalman distribué permet d'utiliser les *ressources computationnelles locales* des capteurs (en rehaussant leur statut de simple relayeur des mesures vers le centre de fusion) et de réduire le temps de calcul
- **Problème:** l'architecture proposée nécessite implicitement que chaque capteur puisse recevoir les informations requises de la part de *tous les autres capteurs* (communication "all-to-all"). Le graphe de communication est donc le *graphe complet* ($\mathcal{G} = K_n$)



- Il y a **3 options** pour **relâcher** la contrainte de communication

Relâchement de la contrainte de communication

1. Si on veut que un des capteurs (ou le centre de fusion) calcule l'estimé de l'état $\hat{\mathbf{x}}$, il doit alors recevoir les informations de la part de tous les autres *filtres de Kalman locaux*
 - Cela peut se faire, par exemple, en organisant le réseau comme un **arbre enraciné à ramification entrante** (ou *in-branching*). En fait, cette organisation facilite l'acheminement des sommes requises vers le nœud de fusion ou permet de réaliser les sommes *par étapes* (de façon "systolique")



- Cette implémentation distribuée des filtres (sous l'hypothèse d'un *fonctionnement synchrone* des capteurs) est complètement équivalente au filtre de Kalman original, avec toutes les garanties d'*optimalité* et de *stabilité* qui viennent avec

Relâchement de la contrainte de communication

2. Si on connaît le nombre n de capteurs, on peut exécuter deux **protocoles de consensus** à temps discret sur chaque nœud du réseau \mathcal{G} , pour estimer les moyennes marquées en bleu ci-après:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) + n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^T(k+1) \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{z}_i(k+1),$$

$$\mathcal{I}(k+1|k+1) = \mathcal{I}(k+1|k) + n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^T(k+1) \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i(k+1).$$

Par exemple, on peut utiliser à cet effet des *dynamic average consensus estimators* (DACE)

Inconvénient:

Lors de la phase de conception du filtre de Kalman, il faut prendre en compte aussi la *vitesse de convergence* des n DACE

Relâchement de la contrainte de communication

3. Une autre approche pour calculer les sommes précédentes de façon distribuée (alors que chaque capteur peut opérer grâce à ses propres mesures locales), consiste à combiner le pas de correction des filtres de Kalman locaux avec un *protocole de consensus* qui détermine implicitement la somme de façon distribuée, par exemple via:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_i(k+1|k+1) &= \hat{\mathbf{x}}_i(k+1|k) + K_i^o(\mathbf{z}_i(k+1) - \mathbf{H}_i(k+1)\hat{\mathbf{x}}_i(k+1|k)) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} K_{ij}^c(\hat{\mathbf{x}}_j(k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}_i(k+1|k))\end{aligned}$$

avec

K_i^o : gain utilisé par le capteur i dans le terme de correction obtenu à partir de ses propres mesures

K_{ij}^c : gain utilisé par le capteur i dans les termes de correction obtenus grâce à la communication avec ses voisins $j \in \mathcal{N}(i)$

Inconvénient:

Avec cette approche on perd toute garantie d'optimalité de l'estimé

Filtre de Kalman distribué : conclusion

- Si l'idée du filtre de Kalman distribué est connue depuis au moins les années 1980 (l'utilité du *filtre d'information* pour l'estimation distribuée a été mise en évidence pour la première fois par Rao & Durrant-Whyte), ce n'est que récemment que ces résultats ont été revisités sous la lumière du *protocole de consensus*
 - "*Fully decentralized algorithms for multisensor Kalman filtering*", B.S. Rao, H.F. Durrant-Whyte, IEE Proceedings-D, vol. 138, n. 5, pp. 413-420, 1991
-

- Une littérature très riche a vu le jour ces dernières 15 années au sujet du *filtre de Kalman basé sur des stratégies de consensus*

Voir par exemple:

- "*Distributed Kalman filtering for sensor networks*", R. Olfati-Saber, in Proc. 46th IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 5492-5498, 2007
- "*Distributing the Kalman filter for large-scale systems*", U.A. Khan, J.M.F. Moura, IEEE Trans. Signal Proc., vol. 56, n. 10, pp. 4919-4935, 2008
- "*Distributed Kalman filtering based on consensus strategies*", R. Carli, A. Chiuso, L. Schenato, S. Zampieri, IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 26, n. 4, pp. 622-633, 2008