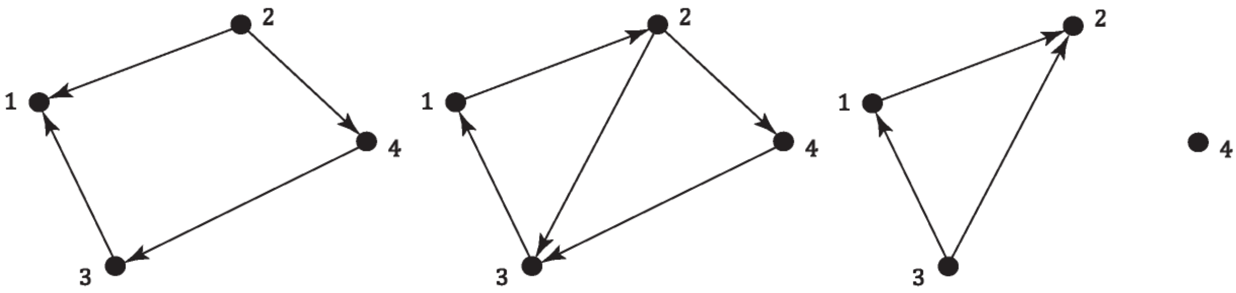
TD 1 : Théorie des Graphes

<u>Exercice I</u> : Connexité d'un graphe orienté

Pour les trois graphes orientés suivants :

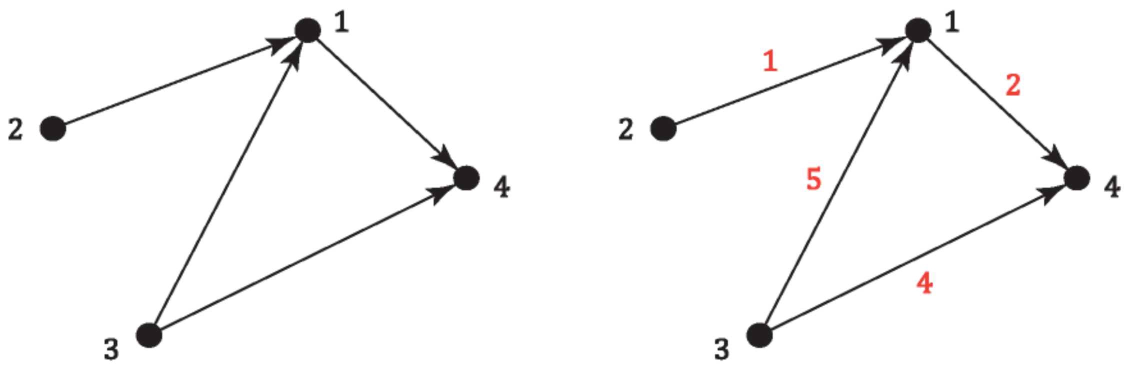


1. Déterminer s'il s'agit d'un graphe faiblement connexe ou fortement connexe,
2. Déterminer le degré entrant de chaque sommet.

<u>Exercice II</u> : Graphes et matrices

Déterminer la matrice des degrés, la matrice d'adjacence, la matrice d'incidence et la matrice laplacienne des (di)graphes suivants :

1. $\mathcal{G} = S_5$
2. $\mathcal{G} = C_6$
3. $\mathcal{G} = P_3$
4. $\mathcal{G} = K_4$
5. $\mathcal{D} = C_5$ (cycle orienté),
6. $\mathcal{D} = P_5$ (chaîne orientée),
7. Les deux digraphes $\mathcal{D}$ montrés ci-dessous :



<u>Attention</u> : Pour les digraphes considérer toujours la notion de degré entrant.

<u>Exercice III</u> : Matrice laplacienne

En sachant que la matrice laplacienne du graphe $\mathcal{G}$ est

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et que la matrice laplacienne du digraphe $\mathcal{D}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dessiner $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$.

<u>Exercice IV</u> : Operations sur les graphes

1. Le *graphe complémentaire* (ou *graphe inversé*) d'un graphe simple $\mathcal{G}$ est un graphe simple $\mathcal{G}'$ ayant les même sommets et tel que deux sommets distincts de $\mathcal{G}'$ soient adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans $\mathcal{G}$. Vérifier les propriétés suivantes :

- Le complémentaire du complémentaire est le graphe original,
- La somme d'un graphe et de son complémentaire est le graphe complet.

Déterminer les graphes complémentaires de $\mathcal{G} = S_5$, $\mathcal{G} = K_3$ et $\mathcal{G} = P_4$.

2. Le *graphe transposé* $\mathcal{D}^T$ (ou *graphe inverse*) d'un graphe orienté $\mathcal{D} = (V, E)$ est obtenu en conservant tous les sommets de V et en inversant toutes les arêtes de E. Autrement dit, $\mathcal{D}^T = (V, E^T)$ avec $E^T = \{(y, x) : (x, y) \in E\}$. Vérifier les propriétés suivantes :

- Le transposé du transposé d'un graphe $\mathcal{D}$ est le graphe $\mathcal{D}$,
- La matrice d'adjacence du graphe transposé est la transposée de la matrice d'adjacence du graphe original,
- La matrice d'incidence du graphe transposé est moins la matrice d'incidence du graphe original.

Déterminer les graphes transposés de $\mathcal{D} = C_5$ et $\mathcal{D} = P_5$ (cycle orienté et chaîne orientée, respectivement).

<u>Exercice V</u> : Connexité par rapport aux arêtes d'un graphe

Un graphe non orienté $\mathcal{G}$ est dit *k-connexe* (par rapport aux arêtes), s'il faut supprimer au moins k arêtes pour le déconnecter. De façon équivalente, un graphe non orienté $\mathcal{G}$ est dit

k-connexe si la suppression de tout sous-ensemble de $k-1$ arêtes laisse le graphe connexe.

Il est à noter que la définition précédente est telle que si le graphe $\mathcal{G}$ est, par exemple 3-connexe, alors il est aussi 2-connexe et 1-connexe (où être 1-connexe équivaut à être connexe).

La connexité par rapport aux arêtes d'un graphe $\mathcal{G}$ est le plus grand entier k pour lequel le graphe est k-connexe, c'est-à-dire, le minimum k qui permet de déconnecter le graphe en supprimant k arêtes. Si le graphe décrit un réseau de communication ou de transport, la connexité sur les arêtes représente une mesure importante de robustesse et fiabilité.

Déterminer la connexité par rapport aux arêtes des graphes suivants : $\mathcal{G} = P_n$, $\mathcal{G} = C_n$, $\mathcal{G} = K_n$, $\mathcal{G} = K_{m,n}$ et le graphe Petersen.

<u>Exercice VI</u> : Étude des propriétés d'un graphe [Matlab]

1. Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée un graphe non orienté arbitraire (à vous de choisir la représentation la plus adaptée) et qui fournit en sortie la valeur de Fiedler et le vecteur de Fiedler de sa matrice laplacienne,
2. Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée un graphe orienté ou non orienté arbitraire et qui fournit en sortie la matrice d'incidence du graphe,
3. Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée un graphe non orienté arbitraire et qui fournit en sortie a) une variable booléenne qui vaut 1 si le graphe est connexe et 0 sinon, et b) un vecteur qui contient les degrés des sommets du graphe,
4. Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée un graphe non orienté arbitraire et qui fournit en sortie le nombre de chemins de longueur k allant du sommet i au sommet j où k, i et j sont des paramètres fournis par l'utilisateur (il est à noter que si $\mathbf{A}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe fini, le nombre de chemins de longueur k allant de i à j est l'élément en position (i, j) de la matrice $\mathbf{A}^k$),
5. Créer une fonction Matlab qui permet d'étudier comment la valeur propre la plus forte λ_n de la matrice laplacienne du graphe $\mathcal{G} = C_n$ varie, pour n qui tend vers l'infini.

<u>Exercice VII</u> : Graphes aléatoires [Matlab]

Les graphes aléatoires peuvent être utilisés pour la modélisation de systèmes en réseaux où le nombre de sommets (les agents) et/ou d'arêtes (les canaux de communication) n'est pas fixe mais suit un processus aléatoire.

Il existe plusieurs modèles de graphes aléatoires dans la littérature. Un des modèles les plus simples et étudiés est le *graphe aléatoire binomial*, souvent noté $\mathcal{G}(n,p)$ où n indique le nombre de sommets. Dans un graphe aléatoire binomial $\mathcal{G}(n,p)$, chacune des $n(n-1)/2$ arêtes est présente avec probabilité p et absente avec probabilité $1 - p$, cela indépendamment du statut des autres arêtes. Le cas $p = 1/2$ a été étudié par le célèbre mathématicien Paul Erdös dès 1947. Le nombre N_p d'arêtes de $\mathcal{G}(n,p)$ suit la loi binomiale de paramètres $n(n-1)/2$ et p.

Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée le paramètres n et p d'un graphe aléatoire binomial et qui utilise les outils graphiques de Matlab pour en dessiner une réalisation.