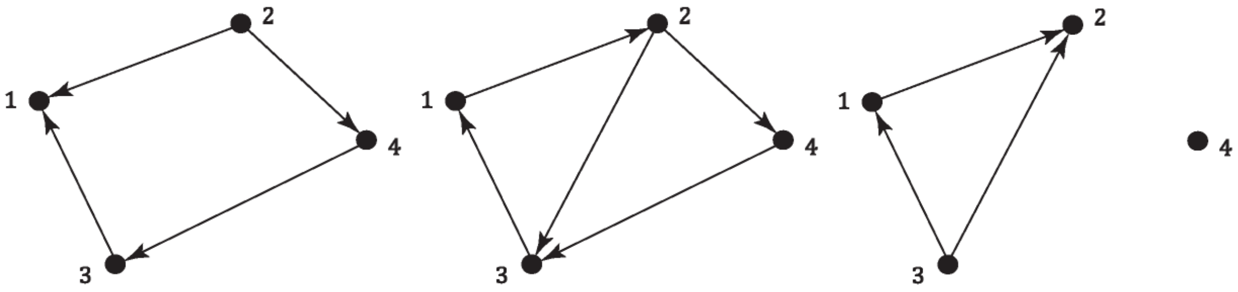
TD 1 : Théorie des Graphes

<u>Exercice I</u> : Connexité d'un graphe orienté

Pour les trois graphes orientés suivants :

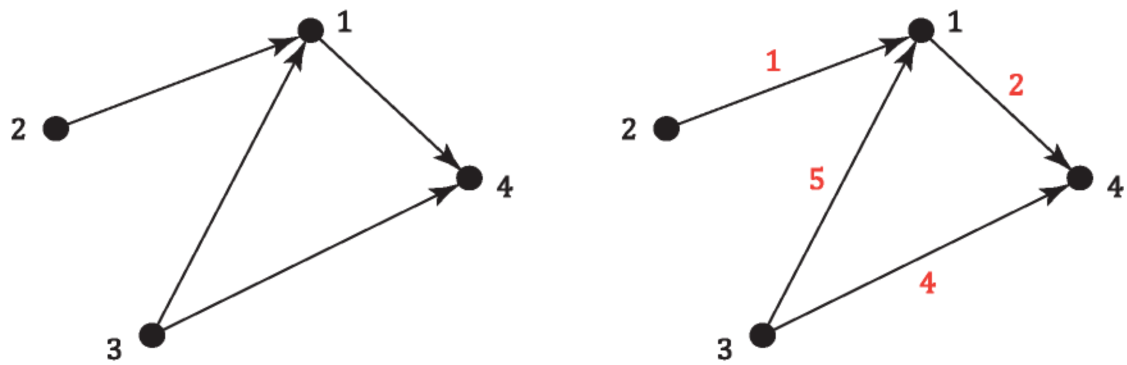


1. Déterminer s'il s'agit d'un graphe faiblement connexe ou fortement connexe.
2. Déterminer le degré entrant de chaque sommet.

<u>Exercice II</u> : Graphes et matrices

Déterminer la matrice des degrés, la matrice d'adjacence, la matrice d'incidence et la matrice laplacienne des (di)graphes suivants :

1. $\mathcal{G} = S_5$
2. $\mathcal{G} = C_6$
3. $\mathcal{G} = P_3$
4. $\mathcal{G} = K_4$
5. $\mathcal{D} = C_5$ (cycle orienté)
6. $\mathcal{D} = P_5$ (chaîne orientée)
7. Les deux digraphes $\mathcal{D}$ montrés ci-dessous :



<u>Attention</u> : Pour les digraphes, considérer toujours la notion de *degré entrant*.

<u>Exercice III</u> : Matrice laplacienne

En sachant que la matrice laplacienne du graphe $\mathcal{G}$ est

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et que la matrice laplacienne du digraphe $\mathcal{D}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dessiner $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$. Calculer le diamètre de $\mathcal{G}$.

<u>Exercice IV</u> : Operations sur les graphes

1. Le *graphe complémentaire* (ou *graphe inversé*) d'un graphe simple $\mathcal{G}$ est un graphe simple $\mathcal{G}'$ ayant les même sommets et tel que deux sommets distincts de $\mathcal{G}'$ soient adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans $\mathcal{G}$. Vérifier les propriétés suivantes :

- Le complémentaire du complémentaire est le graphe original.
- La somme d'un graphe et de son complémentaire est le graphe complet.

Déterminer les graphes complémentaires de $\mathcal{G} = S_5$, $\mathcal{G} = K_3$ et $\mathcal{G} = P_4$.

2. Le *graphe transposé* $\mathcal{D}^T$ (ou *graphe inverse*) d'un graphe orienté $\mathcal{D} = (V, E)$ est obtenu en conservant tous les sommets de V et en inversant toutes les arêtes de E. Autrement dit, $\mathcal{D}^T = (V, E^T)$ avec $E^T = \{(y, x) \mid (x, y) \in E\}$. Vérifier les propriétés suivantes :

- Le transposé du transposé d'un graphe $\mathcal{D}$ est le graphe $\mathcal{D}$.
- La matrice d'adjacence du graphe transposé est la transposée de la matrice d'adjacence du graphe original.
- La matrice d'incidence du graphe transposé est moins la matrice d'incidence du graphe original.

Déterminer les graphes transposés de $\mathcal{D} = C_5$ (cycle orienté) et $\mathcal{D} = P_5$ (chaîne orientée).

3. Le *produit cartésien* de deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ est un graphe, noté $\mathcal{G} \,\square\, \mathcal{H}$, dont l'ensemble des sommets est $V(\mathcal{G}) \times V(\mathcal{H})$. Deux sommets (g, h) et (g', h') sont adjacents si $g = g'$ et $hh' \in E(\mathcal{H})$ ou $gg' \in E(\mathcal{G})$ et $h = h'$. Donc, en résumé :

$$V(\mathcal{G} \,\square\, \mathcal{H}) = \{(g, h) \mid g \in V(\mathcal{G}) \text{ et } h \in V(\mathcal{H})\},$$

$$E(\mathcal{G} \,\square\, \mathcal{H}) = \{(g, h)(g', h') \mid g = g', hh' \in E(\mathcal{H}) \text{ ou } gg' \in E(\mathcal{G}) \text{ et } h = h'\}.$$

Les graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont appelés *facteurs* du produit $\mathcal{G} \,\square\, \mathcal{H}$. On peut facilement montrer que le produit cartésien est commutatif et associatif, c'est-à-dire :

$$\mathcal{G}_1 \,\square\, \mathcal{G}_2 \;\cong\; \mathcal{G}_2 \,\square\, \mathcal{G}_1 \;\text{ et }\; (\mathcal{G}_1 \,\square\, \mathcal{G}_2) \,\square\, \mathcal{G}_3 \;\cong\; \mathcal{G}_1 \,\square\, (\mathcal{G}_2 \,\square\, \mathcal{G}_3).$$

où le symbole "$\cong$" indique que deux graphes sont *isomorphes* (à savoir, les graphes ont le même nombre de sommets et sont connectés de la même façon).

Déterminer les graphes produits suivants : $P_4 \,\square\, P_3$, $C_5 \,\square\, K_2$ et $K_2 \,\square\, K_2$.

Référence : "*Handbook of Product Graphs*", R. Hammack, W. Imrich, S. Klavzar, 2[e] édition, 2011, Ch. 4 et 5.

Exercice V : Connexité par rapport aux arêtes d'un graphe

Un graphe non orienté $\mathcal{G}$ est dit *k-connexe* (par rapport aux arêtes), s'il faut supprimer au moins k arêtes pour le déconnecter. De façon équivalente, un graphe non orienté $\mathcal{G}$ est dit k-connexe si la suppression de tout sous-ensemble de $k-1$ arêtes laisse le graphe connexe. La définition précédente est telle que si le graphe $\mathcal{G}$ est, par exemple 3-connexe, alors il est aussi 2-connexe et 1-connexe (où être 1-connexe équivaut à être connexe).

La connexité par rapport aux arêtes d'un graphe $\mathcal{G}$ est le plus grand entier k pour lequel le graphe est k-connexe, c'est-à-dire, le minimum k qui permet de déconnecter le graphe en supprimant k arêtes. Si le graphe décrit un réseau de communication ou de transport, la connexité sur les arêtes représente une mesure importante de robustesse et fiabilité.

Déterminer la connexité par rapport aux arêtes des graphes suivants : $\mathcal{G} = P_n$, $\mathcal{G} = C_n$, $\mathcal{G} = K_n$, $\mathcal{G} = K_{m,n}$ et le graphe Petersen.

Exercice VI : Couplage et clique d'un graphe

1. Un *couplage* (en anglais, '*matching*') d'un graphe est un ensemble d'arêtes de ce graphe qui n'ont pas de sommets en commun. En d'autres termes, étant donné un graphe simple non orienté $\mathcal{G} = (V, E)$, un couplage $M \subseteq E$ est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un *couplage maximum* est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes. Un graphe peut posséder plusieurs couplages maximums. Enfin, un *couplage parfait* (ou *complet*) est un couplage M du graphe tel que tout sommet du graphe est incident à exactement une arête de M.

2. Une *clique* d'un graphe non orienté est un sous-ensemble des sommets de ce graphe dont le sous-graphe induit est complet, c'est-à-dire que deux sommets quelconques de la clique sont toujours adjacents. Une *clique maximum* d'un graphe est une clique qui possède le plus grand nombre de sommets.

Déterminer un couplage maximum, un couplage parfait (s'il existe), les cliques et une clique maximum pour les deux graphes montrés ci-dessous :