Systèmes Robotiques Hétérogènes et Coopératifs

UPJV, Département EEA

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
E-mail : fabio.morbidi@u-picardie.fr

CM, TD : Mardi 15h30-18h30 et Mercredi 13h30-16h30, salle CURI 304

TP : Mercredi 13h30-16h30, salle TP204

AU 2023-2024

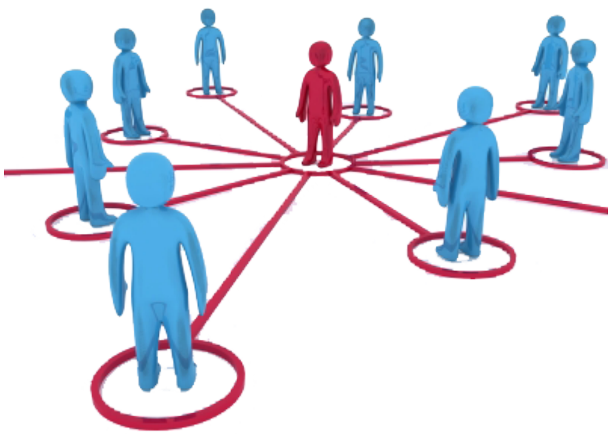
Plan du cours

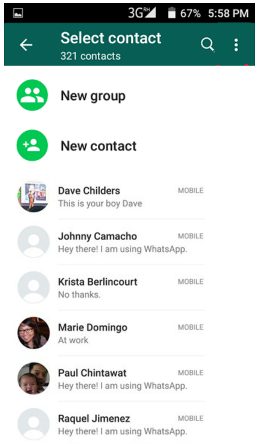
1. Introduction aux systèmes multi-agents
2. Théorie des graphes
3. Systèmes dynamiques connectés en reseaux : protocole de consensus
4. Traitement du signal sur graphes

Introduction

- Le problème de l'**accord** ("*agreement*") est l'un des problèmes les plus importants pour la coordination de systèmes multi-agents

  ⇨ Un groupe d'agents doit *parvenir à un accord* sur la valeur d'un *état partagé*





- Nous étudierons les *dynamiques* du *protocole de consensus* sur des **réseaux *statiques* non orientés** et **orientés**

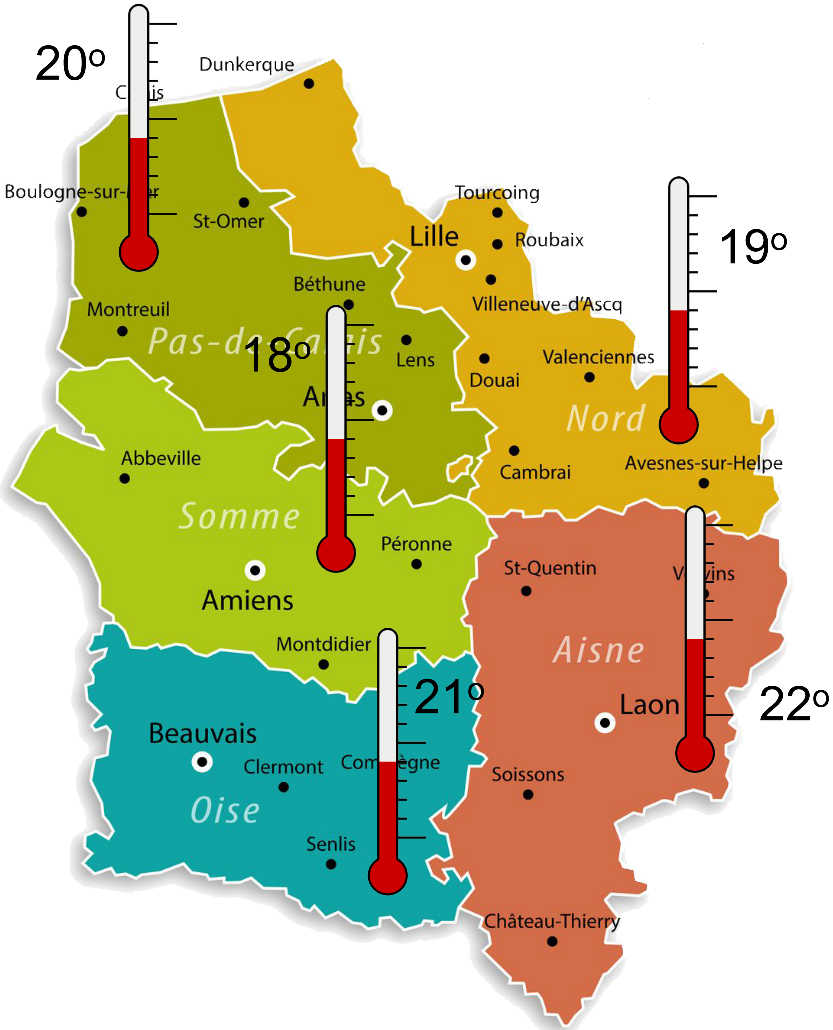
- Nous verrons l'**interdépendance** entre les *propriétés de convergence* du protocole de consensus et les *attributs structurels* du réseau sous-jacent

Protocole de consensus

Graphes non orientés

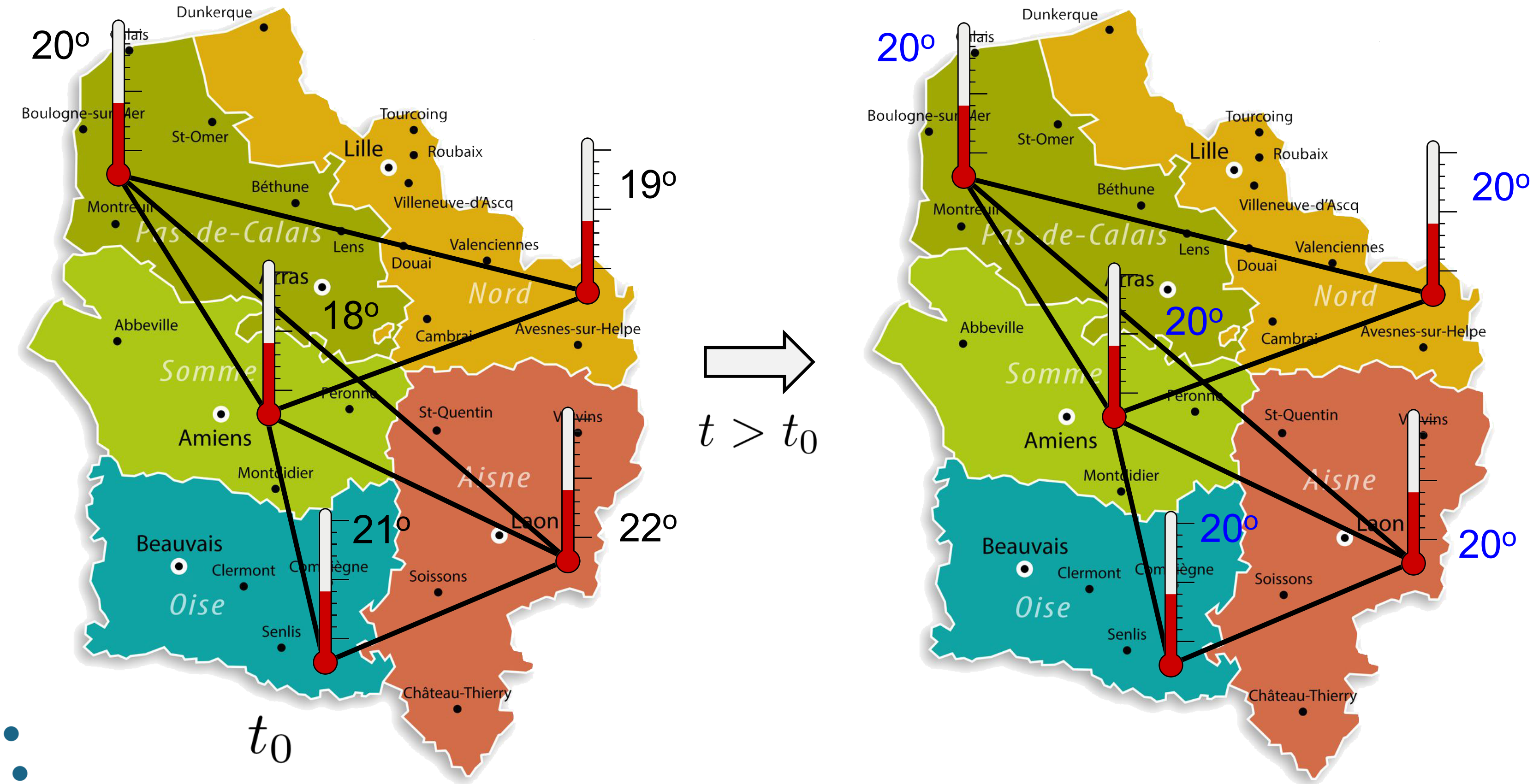
Protocole de consensus : un exemple motivant

- Un groupe de capteurs mesure la *température* en Hauts-de-France



Protocole de consensus : un exemple motivant

- En utilisant un **réseau de communication** pour échanger les informations, les capteurs doivent parvenir à un accord sur la *seule valeur* (par exemple 20º) qui représente la température de la région Hauts-de-France
- Dans ce but, le groupe de capteurs doit mettre en œuvre un **protocole** sur le réseau, lui permettant de parvenir à un accord sur la valeur commune mesurée

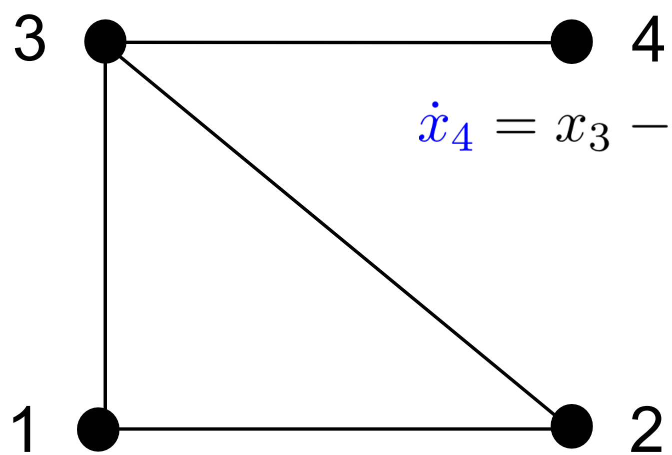


Protocole de consensus

- Le protocole de consensus compte sur n ***unités dynamiques*** connectées par des liaisons où les *informations relatives* circulent
- On fait l‘hypothèse que le **taux de variation** de l‘*état* de chaque unité (la temperature dans notre exemple) est régi par la somme des états relatifs par rapport aux unités voisines

<u>Exemple</u> :

$$\dot{x}_3 = (x_1 - x_3) + (x_2 - x_3) + (x_4 - x_3)$$



$$\dot{x}_4 = x_3 - x_4$$

$$\dot{x}_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) \qquad \dot{x}_2 = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)$$

Protocole de consensus

- Si l'*état scalaire* du sommet i est noté $x_i \in \mathbb{R}$, alors nous avons que :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (x_j(t) - x_i(t)), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

où $\mathcal{N}(i)$ est le voisinage du sommet i dans le réseau (c'est-à-dire l'ensemble des sommets adjacents à i)

- Nous pouvons récrire le *système global*, sous forme vectorielle, comme suit :

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) \;=\; -\mathbf{L}(\mathcal{G})\,\mathbf{x}(t) \quad \text{dynamique de consensus}}$$

  - $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ est la matrice laplacienne du réseau d'interaction des agents $\mathcal{G}$
  - $\mathbf{x}(t) \triangleq [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n.$

Protocole de consensus : exemple électrique

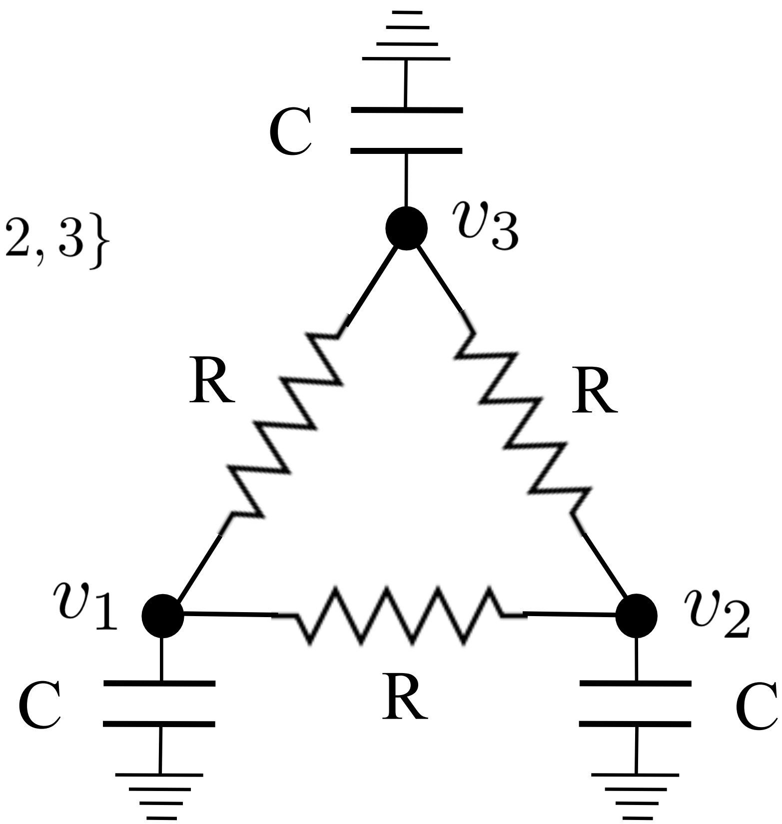
<u>Exemple</u> (Circuit RC):

- Soient R = 1 Ω et C = 1 F
- Si on applique la loi de Kirchhoff des nœuds et des mailles, nous obtenons :

$$\dot{v}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (v_j(t) - v_i(t)), \;\; i \in \{1, 2, 3\}$$

qui décrit la dynamique des tensions sur les trois condensateurs

$\mathcal{N}(i)$ représente l'ensemble des nœuds dans le circuit qui sont connectés au nœud i par une résistance



Protocole de consensus : états non scalaires

Le **produit de Kronecker** de deux matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$, est la matrice par blocs de taille $mp \times nq$, définie par:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Commande Matlab :
kron

Propriétés du produit de Kronecker

Le produit de Kronecker est *bilinéaire* (i-iii) et *associatif* (iv):

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}, \\
(ii) \quad & (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \otimes \mathbf{A} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{A}, \\
(iii) \quad & (k\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}), \\
(iv) \quad & (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}), \\
(v) \quad & \mathbf{A} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

où $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont des matrices et k est un scalaire. Toutefois, le produit de Kronecker n'est *pas commutatif*, à savoir, en général: $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$

Protocole de consensus : états non scalaires

Exemples:

a) $$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 12 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 8 & -4 & 0 \\ 12 & 3 & 6 & 16 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 = \,?$$

Protocole de consensus : états non scalaires

Si $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^s$, $s > 1$ (par ex. la position 2D d'un robot ou les mesures de température, humidité et pression d'un capteur), on peut encore écrire la dynamique de consensus de façon compacte en utilisant le **produit de Kronecker**

En effet, nous avons simplement :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \;=\; (-\mathbf{L}(\mathcal{G}) \otimes \mathbf{I}_s)\, \mathbf{x}(t),$$

où

$\mathbf{I}_s$ est la matrice indentité de taille $s \times s$

$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{ns}$.

Exemple :

$$-\mathbf{L}(C_3) \;=\; \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{L}(C_3) \otimes \mathbf{I}_2 \;=\; \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ensemble de consensus

- Dans les exemples précédents, nous avons observé que l'état de chaque sommet dans le réseau est "**tiré**" vers les états des sommets voisins
- Est-ce que tous les sommets parviendront à une **moyenne pondérée** de leurs états initiaux, qui correspond aussi à un **point fixe** de la dynamique collective ?

Définition (Ensemble de *consensus*)

L'ensemble de consensus $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ est le sous-espace $\mathrm{span}\{\mathbf{1}\}$, c'est-à-dire:

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i = x_j, \text{ pour tous les } i,\, j\}.$$

<u>Exemples</u>:

$$[2,\, 2, \ldots, 2]^T \in \mathcal{A}, \quad [-7,\, -7, \ldots, -7]^T \in \mathcal{A}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{A}$ contient tous les vecteurs de la forme $\alpha\mathbf{1},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Rappel : stabilité d'un système LTI

- Soit le système linéaire invariant dans le temps (LTI) à temps continu :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

où

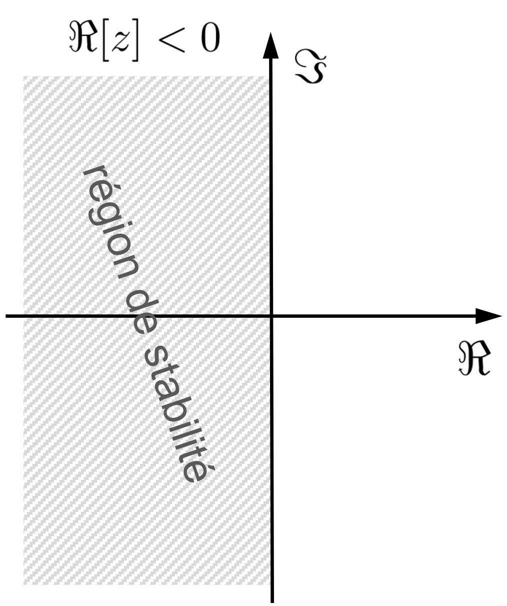
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: état du système avec condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$: entrée du système

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$: matrices constantes connues

Le système est dit :

- Asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ se trouvent dans la région de stabilité (grisée)
- Instable si au moins une valeur propre de $\mathbf{A}$ est à l'extérieur de la région de stabilité
- Marginalement stable si toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ se trouvent à l'intérieur de la région de stabilité ou sur son bord (l'axe imaginaire), et celles qui sont sur le bord sont *simples* (à savoir, multiplicité algèbrique = multiplicité géométrique)



Plan complexe

Vers le consensus : graphes non orientés

Le spectre de la matrice laplacienne d'un graphe *connexe* non orienté est:

$$0 = \lambda_1(\mathbf{L}(\mathcal{G})) < \lambda_2(\mathbf{L}(\mathcal{G})) \leq \ldots \leq \lambda_n(\mathbf{L}(\mathcal{G})),$$

et $\mathbf{1} = [1, 1, \ldots, 1]^T$ est le vecteur propre associé à la *valeur propre zéro.*

Considérons la **factorisation spectrale** de la matrice laplacienne ($\mathbf{L}(\mathcal{G})$ est une *matrice symétrique*):

$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Lambda}(\mathcal{G})\mathbf{U}^T,$$

où

$$\boldsymbol{\Lambda}(\mathcal{G}) = \mathrm{diag}(\lambda_1(\mathcal{G}), \ldots, \lambda_n(\mathcal{G})),$$

et

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{u}_n],$$

est une matrice $n \times n$ dont les colonnes sont les vecteurs propres *normalisés* et mutuellement orthogonaux de $\mathbf{L}(\mathcal{G})$. Donc $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{n})\,\mathbf{1}$

Remarque: pour plus de simplicité, par la suite on écrira $\lambda_i(\mathcal{G})$ au lieu de $\lambda_i(\mathbf{L}(\mathcal{G}))$

Vers le consensus : graphes non orientés

- La solution de l'équation différentielle $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G})\,\mathbf{x}(t)$, avec état initial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, est:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{L}(\mathcal{G})t}\,\mathbf{x}_0.$$

Si nous utilisons la *factorisation spectrale* de la matrice laplacienne, nous avons:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{-\mathbf{L}(\mathcal{G})t}\,\mathbf{x}_0 \\
&= e^{-(\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}(\mathcal{G})\mathbf{U}^T)t}\,\mathbf{x}_0 \\
&= \mathbf{U}e^{-\boldsymbol{\Lambda}(\mathcal{G})t}\,\mathbf{U}^T\mathbf{x}_0 \\
&= (e^{-\lambda_1(\mathcal{G})t}\,\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + e^{-\lambda_2(\mathcal{G})t}\,\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \ldots + e^{-\lambda_n(\mathcal{G})t}\,\mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T)\mathbf{x}_0 \\
&= e^{-\lambda_1(\mathcal{G})t}\,(\mathbf{u}_1^T\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_1 + e^{-\lambda_2(\mathcal{G})t}\,(\mathbf{u}_2^T\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_2 + \ldots + e^{-\lambda_n(\mathcal{G})t}\,(\mathbf{u}_n^T\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_n.
\end{aligned}$$

Décomposition selon chaque “axe propre”

Vers le consensus : graphes non orientés

Théorème

Soit $\mathcal{G}$ un *graphe connexe*. Alors, le protocole $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G})\,\mathbf{x}(t)$ converge vers l'ensemble de consensus $\mathcal{A}$ avec une vitesse de convergence dictée par $\lambda_2(\mathbf{L}(\mathcal{G}))$

Preuve

La preuve est une conséquence directe de l'équation,

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\lambda_1(\mathcal{G})t}\,(\mathbf{u}_1^T\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_1 + e^{-\lambda_2(\mathcal{G})t}\,(\mathbf{u}_2^T\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_2 + \ldots + e^{-\lambda_n(\mathcal{G})t}\,(\mathbf{u}_n^T\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_n,$$

si on observe que pour un graphe connexe $\lambda_i(\mathcal{G}) > 0$, pour $i \geq 2$; comme toujours, $\lambda_1(\mathcal{G}) = 0$. Donc,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = (\mathbf{u}_1^T\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{1}^T\mathbf{x}_0}{n}\mathbf{1} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(0)\right)\mathbf{1}$$

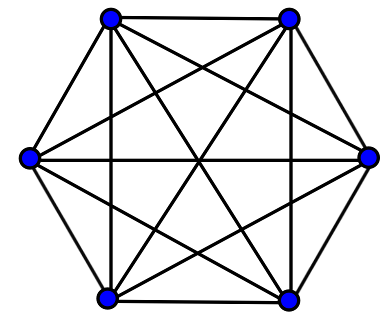
Consensus en moyenne

et par conséquent $\mathbf{x}(t) \longrightarrow \mathcal{A}$. Comme $\lambda_2(\mathcal{G})$ est la valeur propre positive la plus faible de la matrice laplacienne, elle détermine le *mode de convergence le plus lent* dans la limite ci-dessus. ■

Exemples $(n = 6)$:

Graphe complet

Le spectre de la matrice laplacienne de K_6 est:



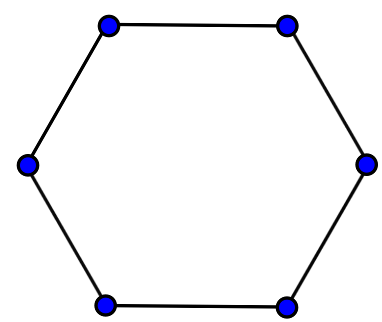
$$\{0,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6\}$$

Donc $\lambda_2(K_6) = 6$

Graphe cycle

Les valeurs propres de la matrice laplacienne de C_6 sont:

$$2 - 2\cos\left(\frac{\pi k}{3}\right),\ k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$



Donc $\lambda_2(C_6) = 1$

Remarque: $\lambda_2(K_6) > \lambda_2(C_6)$

Vers le consensus : remarque I

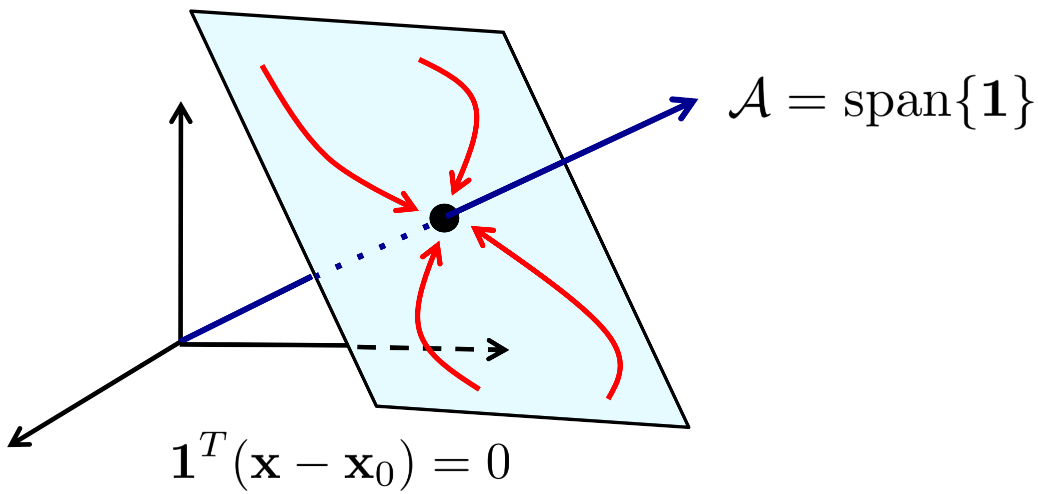
Il est à noter que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{1}^T\mathbf{x}(t)}{n}\right) = \frac{\mathbf{1}^T(-\mathbf{L}(\mathcal{G})\,\mathbf{x}(t))}{n} = -\frac{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{L}(\mathcal{G})\mathbf{1}}{n} = 0.$$

Donc, la quantité

$$\frac{\mathbf{1}^T\mathbf{x}(t)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t), \ \forall\, t \geq 0,$$

c'est-à-dire le **barycentre** des états des agents, est une **constante du mouvement** pour la dynamique de consensus $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G})\,\mathbf{x}(t)$ (à savoir, elle est *conservée* pendant l'évolution du système)

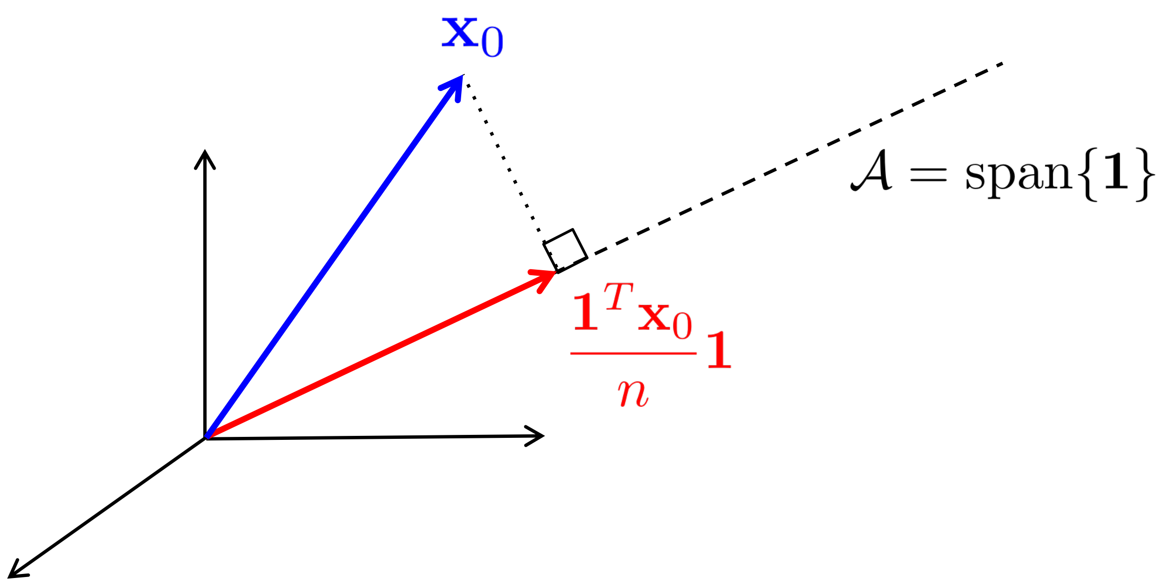


Vers le consensus : remarque II

La trajectoire d'état générée par le protocole de consensus converge vers la ***projection*** de l'état initial $\mathbf{x}_0$ sur le sous-space de consensus $\mathcal{A}$.

En effet :

$$\arg\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{x}_0}{\mathbf{1}^T \mathbf{1}} \mathbf{1} = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{x}_0}{n} \mathbf{1}.$$

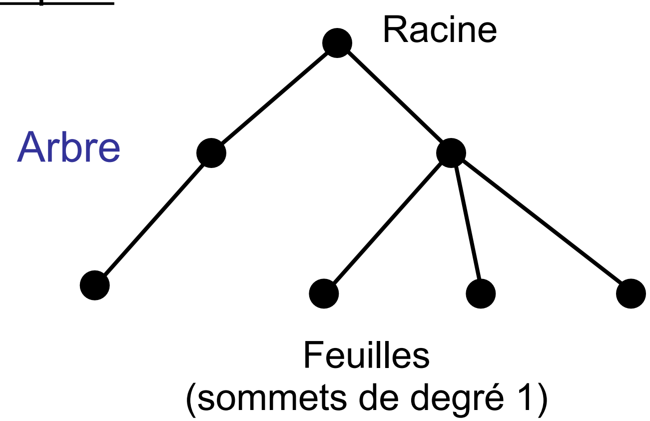


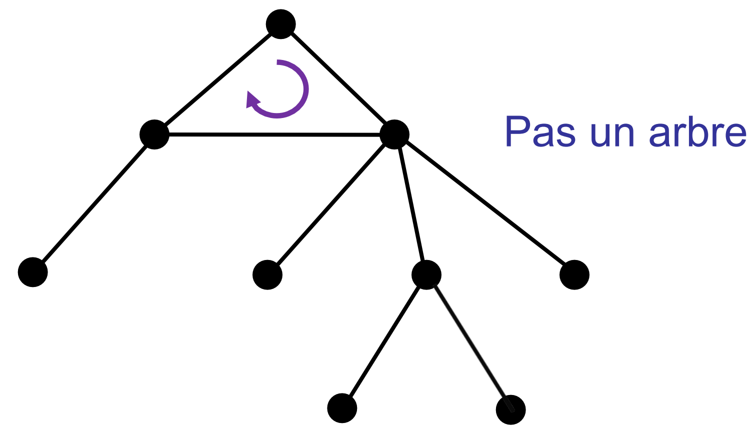
Vers le consensus : remarque III

Définition (*Arbre*)

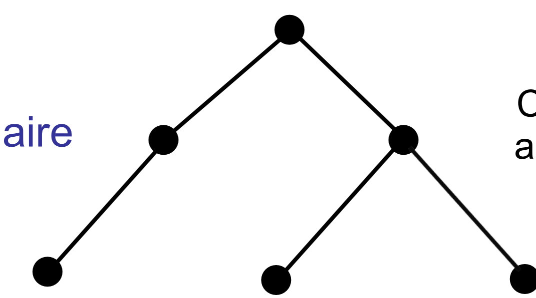
Un **arbre** est un graphe connexe sans cycles (circuits)

<u>Exemples</u> :





Arbre binaire



Chaque sommet possède au plus deux sommets fils au niveau inférieur

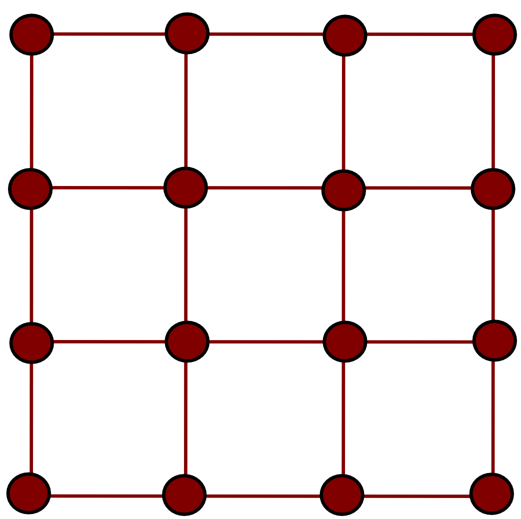
Vers le consensus : remarque III

Définition (*Arbre couvrant* ou *“spanning tree“*)

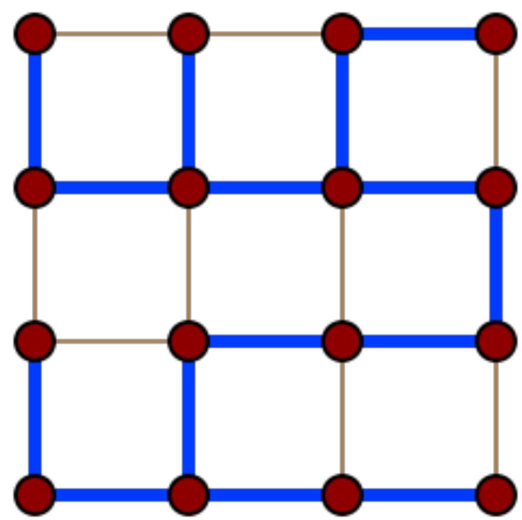
Un **arbre couvrant** d’un graphe connexe $\mathcal{G}$ est un arbre composé de ***tous les sommets*** et de certaines (ou éventuellement toutes les) arêtes de $\mathcal{G}$

En d’autres termes, un arbre couvrant de $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble des arêtes de $\mathcal{G}$ formant un arbre qui couvre tous les sommets

Exemple :



Graphe grille $\mathcal{G}$



Bleu: arbre couvrant du graphe $\mathcal{G}$

Vers le consensus : remarque III

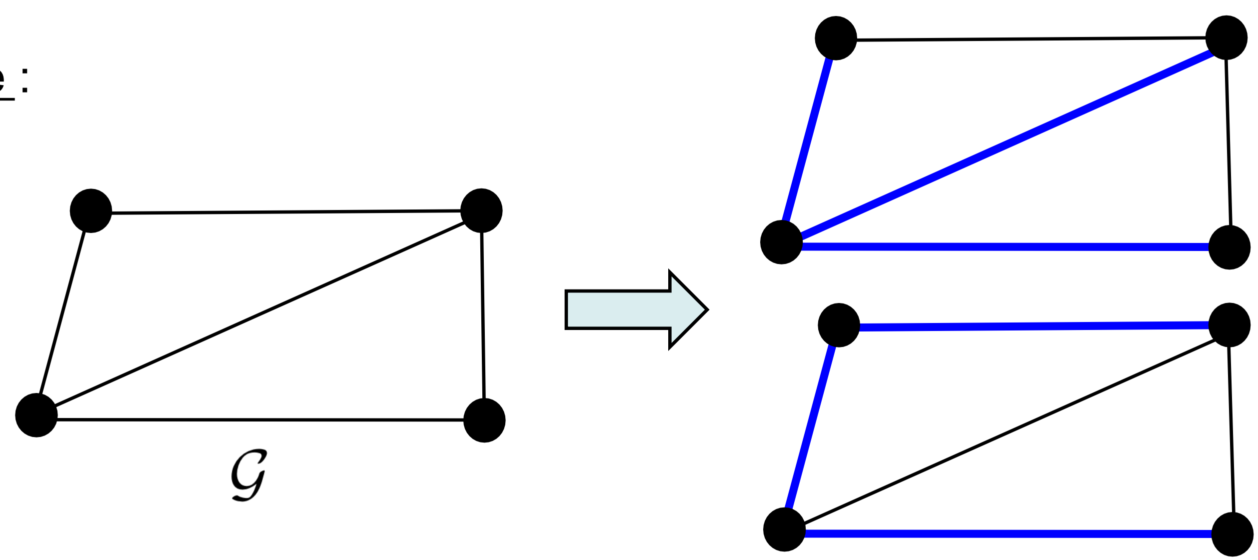
Proposition

Une condition *nécessaire* et *suffisante* pour la convergence du protocole de consensus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{G})\,\mathbf{x}(t),$$

vers l'ensemble de consensus $\mathcal{A}$ pour toute condition initiale $\mathbf{x}_0$, est que le graphe $\mathcal{G}$ contient un ***arbre couvrant***

Exemple :



Deux possibles arbres couvrants de $\mathcal{G}$ (bleus)

Exemple 1 : problème du rendez-vous

Protocole de consensus “*en action*“

- n robots mobiles avec un modèle dynamique de type *integrateur*

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

doivent se rencontrer au *même endroit*. Ici, $\mathbf{x}_i = [x_i,\, y_i]^T$ indique la position du robot i dans le plan

- Le point de rendez-vous **n‘est pas connu** au préalable et les robots ***n‘ont pas* accès** à leurs *positions absolues* (pas de GPS embarqué)

- Les robots peuvent uniquement mesurer les **positions relatives** par rapport aux robots voisins

Problème: comment définir l‘entrée de commande $\mathbf{u}_i$ du robot i ?

Exemple 1 : problème du rendez-vous

<u>Protocole de consensus “*en action*“</u>

- n robots mobiles avec un modèle dynamique de type *integrateur*

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

doivent se rencontrer au *<u>même endroit</u>*. Ici, $\mathbf{x}_i = [x_i,\, y_i]^T$ indique la position du robot i dans le plan

- Le point de rendez-vous **n‘est pas connu** au préalable et les robots ***n‘ont pas* accès** à leurs *positions absolues* (pas de GPS embarqué)

- Les robots peuvent uniquement mesurer les **positions relatives** par rapport aux robots voisins

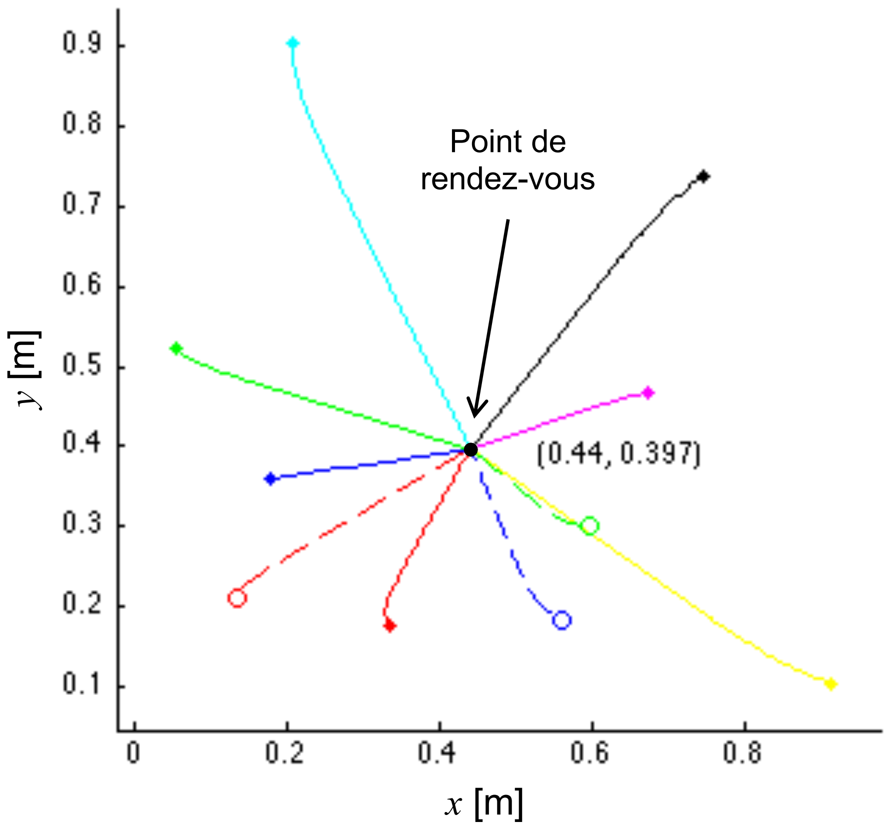
Solution :

Choisir l‘*entrée de commande* suivante pour le robot i:

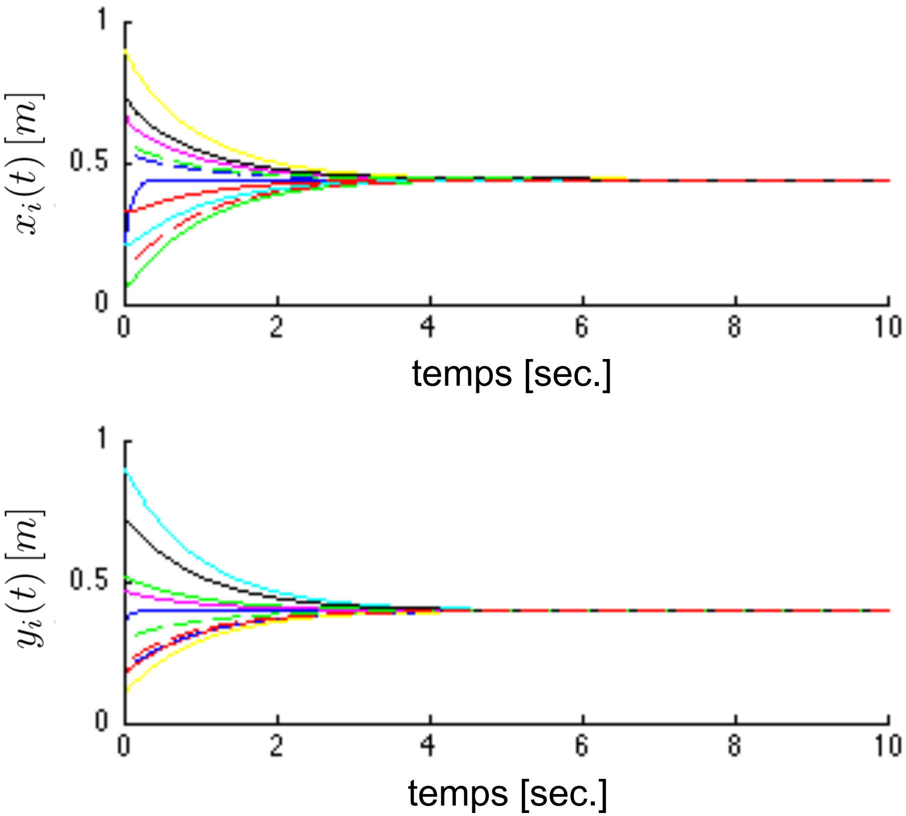
$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))$$

Exemple 1 : problème du rendez-vous

- **Simulation Matlab** (Topologie du graphe: S_{10})



Trajectoire 2D des 10 robots

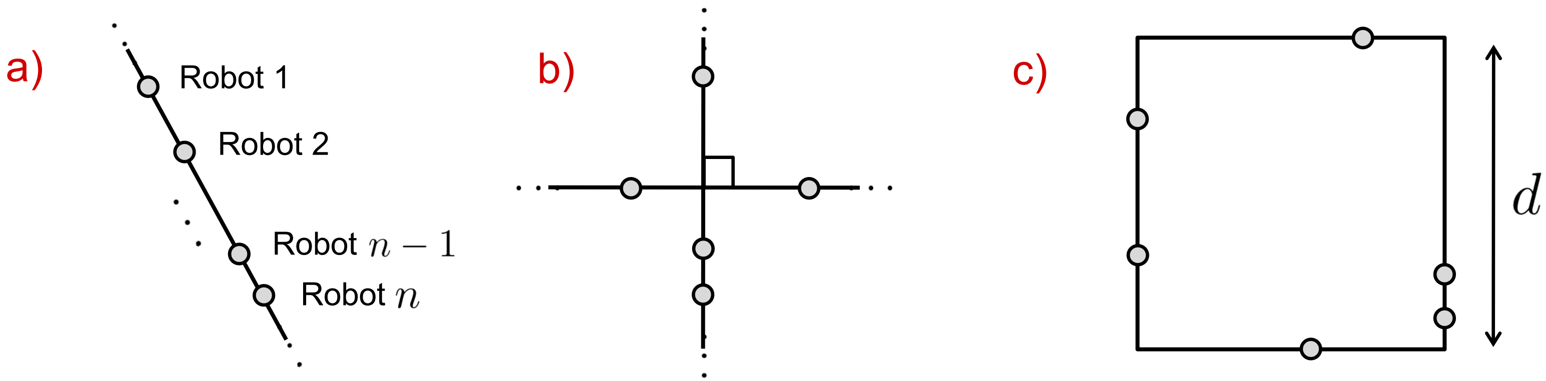


Évolution temporelle des coordonnées x et y des 10 robots

Exemple 1 : problème du rendez-vous

Exercice [Matlab]:

1. Choisir des graphes de communication $\mathcal{G}$ différentes et étudier la *vitesse de convergence* vers le point de rendez-vous
2. Écrire l'*expression mathématique* du point de rendez-vous
3. Étudier les trajectoires des robots lorsqu'ils se trouvent tous, à l'*instant initial* t_0, sur :
   a) La même droite
   b) Deux droites qui se coupent à angle droit
   c) Les quatre côtés de longueur d d'un carré



Exemple 1 : problème du rendez-vous

Exercice [Matlab]:

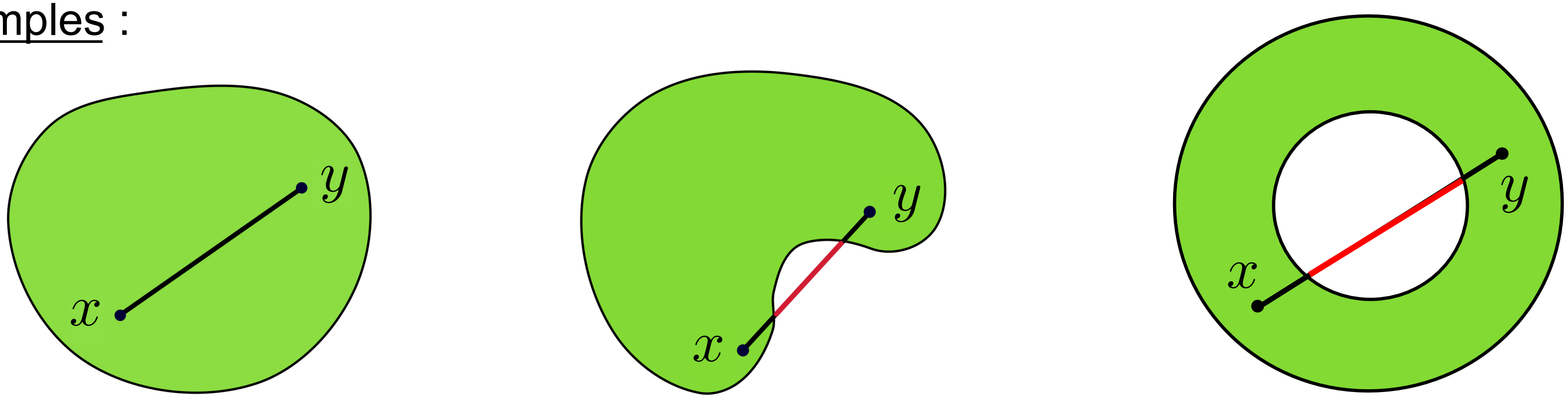
Pour répondre au point 3 de l'exercice, on rappelle les deux définitions suivantes :

Définition 1 (*Ensemble convexe*)

Un ensemble C est dit convexe lorsque, pour tous $x, y \in C$, le segment $[x,\, y]$ est tout entier contenu dans C, c'est-à-dire :

$$\forall\, x, y \in C,\;\; \forall\, \alpha \in [0,\, 1], \quad \alpha\, x + (1-\alpha) y \in C$$

Exemples :



Convexe   Non convexe   Non convexe

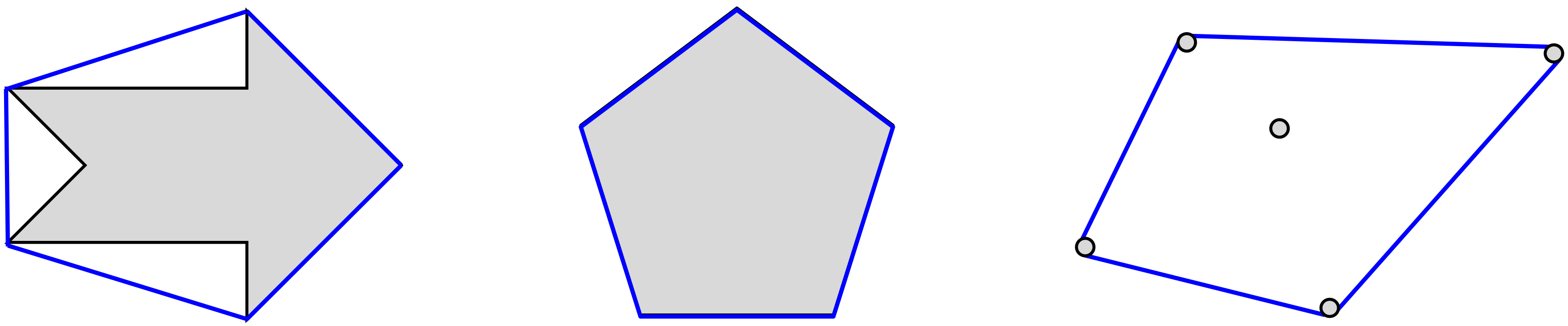
Exemple 1 : problème du rendez-vous

Exercice [Matlab]:

Définition 2 (*Envelope convexe* ou "*convex hull*")

L'enveloppe convexe d'un objet ou d'un regroupement d'objets géométriques est l'ensemble convexe le plus petit parmi ceux qui le contiennent

Exemples:



- Objet(s) : **gris**
- Enveloppe convexe : **ensemble bleu**

Exemple 2 : poursuite cyclique (n-bug problem)

- Considérons n robots mobiles avec un modèle dynamique de type *integrateur*

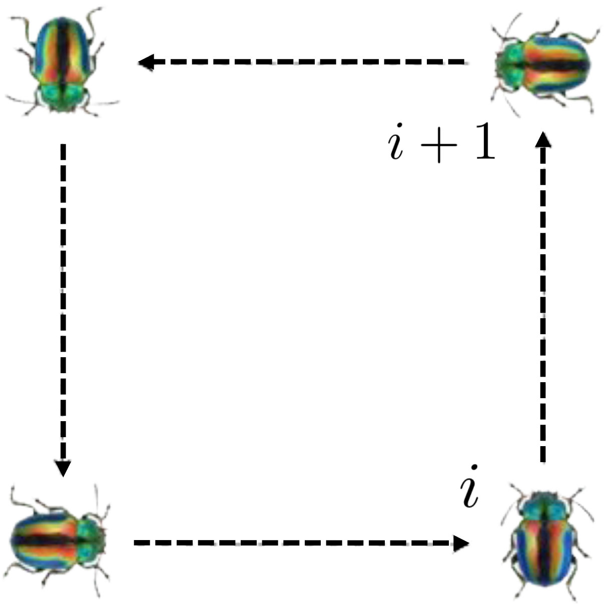
$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

et supposons que le robot i doit poursuivre le robot $i+1$ modulo n.
Comme auparavant $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$ indique la position du robot i dans le plan

- Nous pouvons choisir l'*entrée de commande* suivante pour le robot i:

$$\mathbf{u}_i(t) \; = \; k\,(\mathbf{x}_{i+1}(t) - \mathbf{x}_i(t)),$$

où k est un *gain positif.* Plus k est grand plus la "force d'attraction" entre deux robots sera intense



Exemple 2 : poursuite cyclique (n-bug problem)

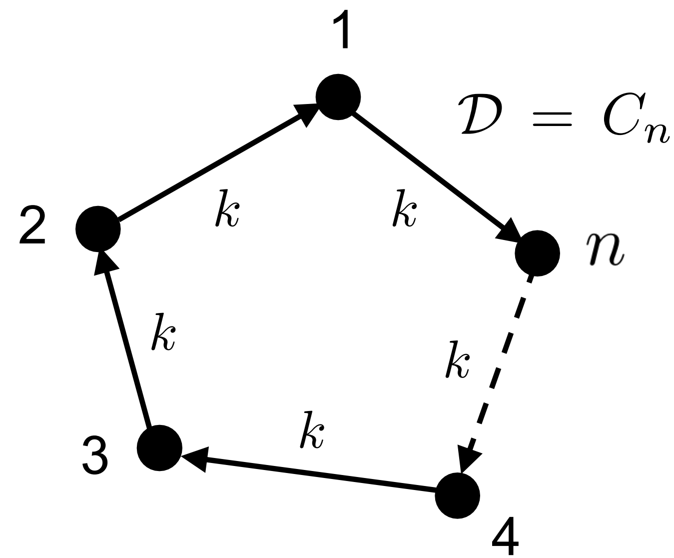
- Cela nous amène à nouveau au système dynamique suivant (protocole de consensus):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (-\mathbf{L}(\mathcal{D}) \otimes \mathbf{I}_2)\, \mathbf{x}(t)$$

où $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t), \ldots, \mathbf{x}_n^T(t)]^T$ et

$$\mathbf{L}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & -k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & -k \\ -k & 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

Matrice circulante



(la ligne $i+1$ est obtenue à partir de la ligne i par décalage circulaire)

Pour plus de détails, voir le livre *"Flocking and Rendezvous in Distributed Robotics"*, B.A. Francis, M. Maggiore, SpringerBriefs in Electrical and Computer Engineering, Springer 2016

Exemple 2 : poursuite cyclique (n-bug problem)

- Trajectoires des robots (en bleu):