



Electronique

Energie Electrique

Automatique

Master 2 3EA, Parcours RoVA



Systemes Robotiques Hétérogènes et Coopératifs

UPJV, Département EEA

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail : fabio.morbidi@u-picardie.fr

CM, TD : Mardi 15h30-18h30 et Mercredi 13h30-16h30, salle CURI 305

TP : Mercredi 13h30-16h30, salle TP204

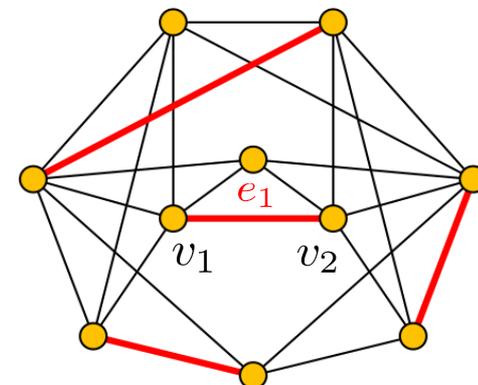
Plan du cours

1. Introduction aux systèmes multi-agents
2. Théorie des graphes
3. Systèmes dynamiques connectés en réseaux : protocole de consensus
4. Traitement du signal sur graphes



Théorie des graphes : introduction

- Les graphes fournissent une **abstraction naturelle** pour l'échange d'informations entre les agents dans un réseau
- L'abstraction basée sur la théorie des graphes fournit une description à **haut niveau** de la topologie du réseau par rapport à des objets simples appelés *sommets* et *arêtes*



Dans les prochaines slides, nous verrons quelques notions de base de :

- **Théorie algébrique des graphes** (matrice des degrés, matrice d'adjacence, matrice d'incidence, matrice laplacienne) [1]
- **Théorie spectrale des graphes** (spectre de la matrice laplacienne) [2]

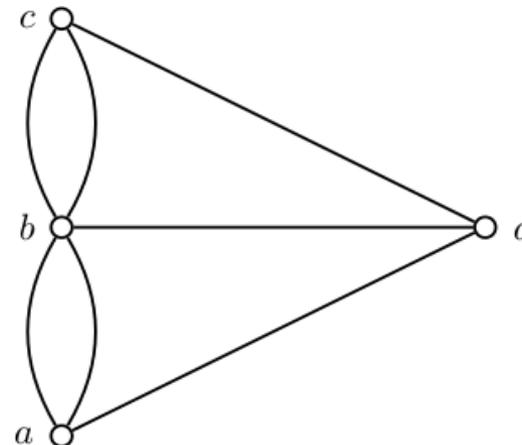
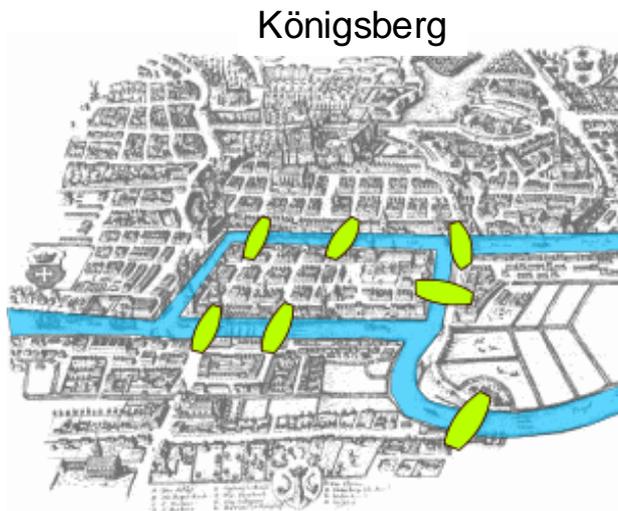
[1] "Algebraic Graph Theory", C. Godsil, G. Royle, Springer, 2001

[2] "Spectral Graph Theory", F.R.K. Chung, American Mathematical Society, 1997



Théorie des graphes : petit historique

- Le problème des **7 ponts de Königsberg** est le premier étudié en théorie des graphes
- Trouver un parcours dans la ville qui traverse chaque pont *une fois seulement* (en d'autres termes, trouver un *chemin eulérien* dans le graphe correspondant)
- Réponse négative de Leonhard Euler en 1735
- Un chemin eulérien existe si le graphe est connexe et il y a exactement zéro ou deux sommets de *degré impair* (dans le problème de Königsberg, il y a 4 sommets de degré impair)



Leonhard Euler
(1707-1783)

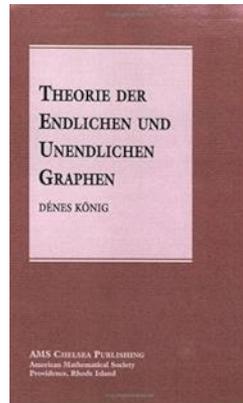


Théorie des graphes : petit historique

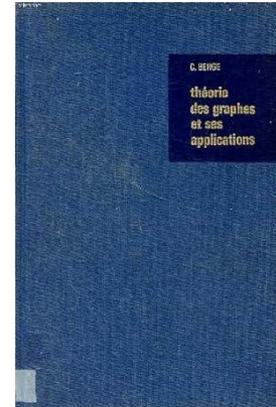
- Dénes Kőnig a écrit le **1^{er} livre** sur la théorie des graphes “*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*” (“*Théorie des graphes finis et infinis*“) en **1936**
 - Début de la théorie des graphes comme une branche indépendante des mathématiques
- En suivant Kőnig, Claude Berge a écrit le **2^e livre** sur la théorie des graphes, “*Théorie des graphes et ses applications*“ en **1958**



Dénes Kőnig (1884-1944)



Claude Berge (1926-2002)
avec Paul Erdős (1913-1996)



Théorie des graphes : notions de base

- Un graphe *fini, non orienté, simple*, ou **graphe** en bref, est fondé sur l'ensemble fini :

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ l'ensemble des } \mathbf{sommets} \text{ (ou } \mathbf{nœuds})$$

- On définit aussi l'ensemble des **arêtes** (ou **arcs**) :

$$E \subseteq V \times V \text{ Il consiste en éléments de la forme } \{v_i, v_j\} \text{ ou } v_i v_j \text{ tels que } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j.$$

- Le graphe \mathcal{G} est alors défini formellement comme le couple :

$$\mathcal{G} = (V, E)$$



Théorie des graphes : notions de base

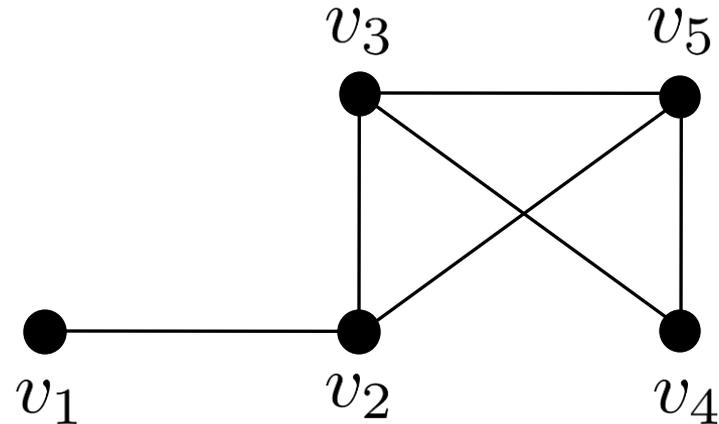
Exemple:

$$\mathcal{G} = (V, E)$$

avec

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_2v_5, v_4v_5\}$$



- S'il y a une arête entre deux sommets v_i et v_j , ils sont appelés **adjacents** qui s'écrit $v_i \sim v_j$. Dans ce cas, v_iv_j est appelée **incidente** avec sommets v_i, v_j
- Le **voisinage** $\mathcal{N}(i) \subseteq V$ du sommet v_i est l'ensemble $\{v_j \in V \mid v_iv_j \in E\}$ c'est-à-dire, l'ensemble des sommets adjacents à v_i . Dans l'exemple ci-dessus :

$$\mathcal{N}(1) = \{v_2\}, \quad \mathcal{N}(5) = \{v_2, v_3, v_4\}$$



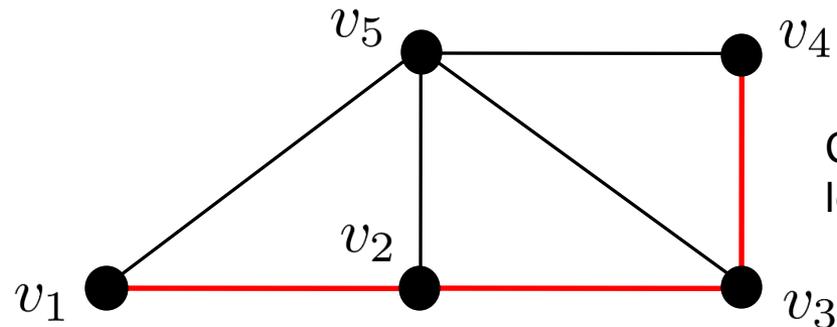
Théorie des graphes : notions de base

- Un **chemin de longueur** m dans \mathcal{G} est donné par la séquence de sommets distincts

$$v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$$

tels que pour $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, les sommets v_{i_k} et $v_{i_{k+1}}$ sont adjacents

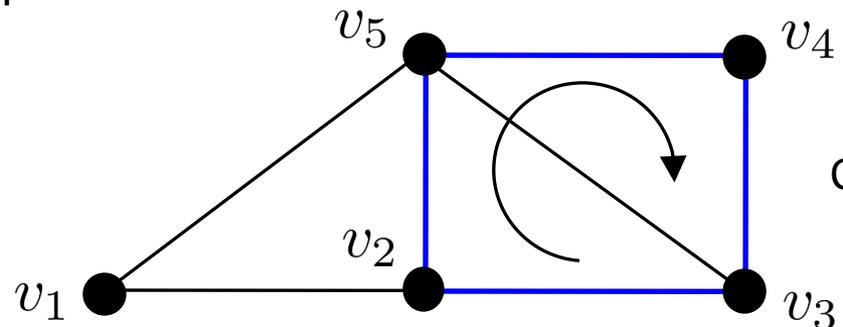
Exemple:



Chemin de longueur 3 entre les sommets 1 et 4 (rouge)

- Si tous les sommets du chemin sont distincts sauf le sommet initial et final, le chemin s'appelle **circuit**

Exemple:



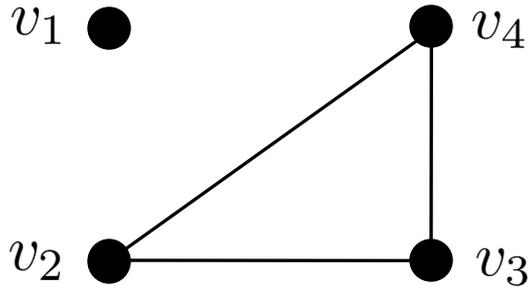
Circuit de longueur 4 (bleu)



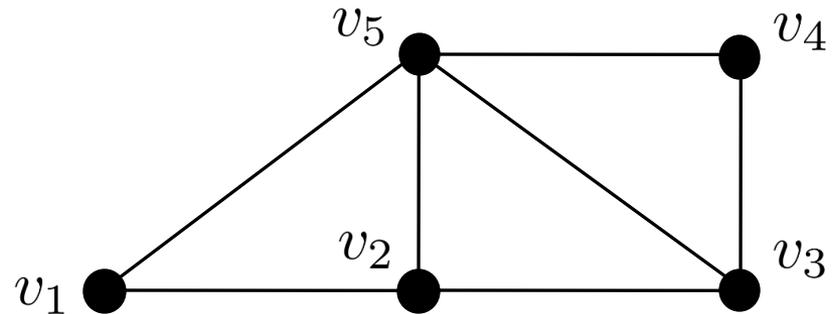
Théorie des graphes : notions de base

- Un graphe \mathcal{G} est **connexe** s'il existe un chemin entre tout couple de sommets dans $V(\mathcal{G})$ (c'est-à-dire, s'il est d'un seul tenant). Sinon on dit que le graphe est **non connexe**

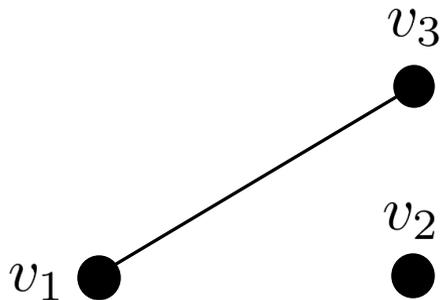
Exemples:



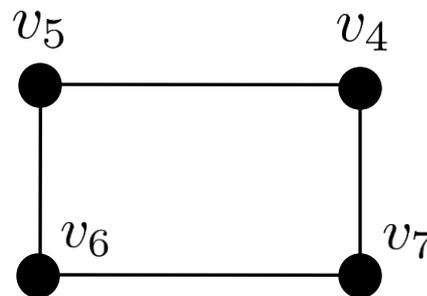
Non connexe (2 composantes connexes)



Connexe



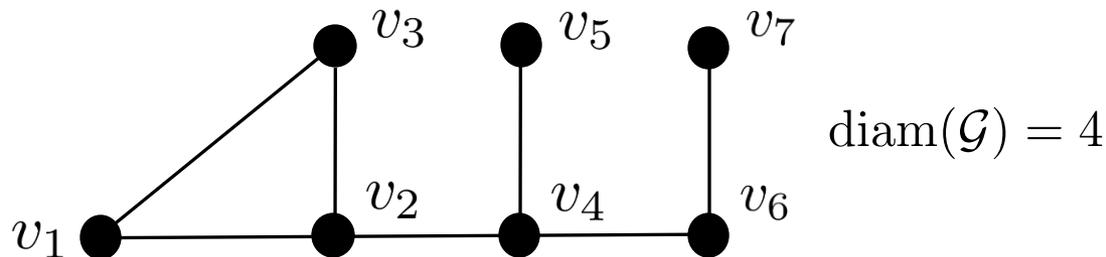
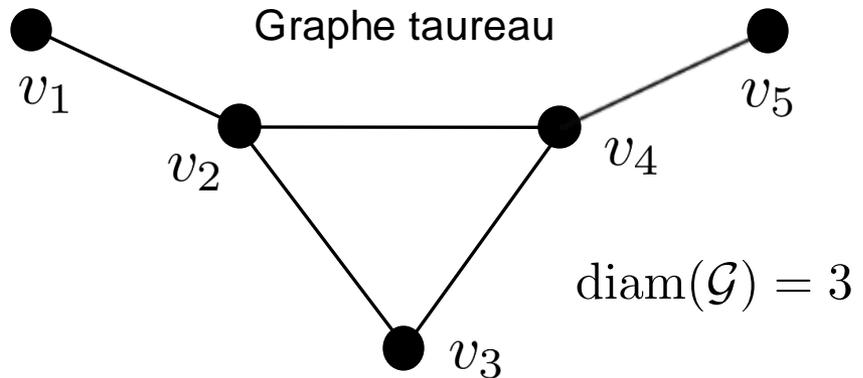
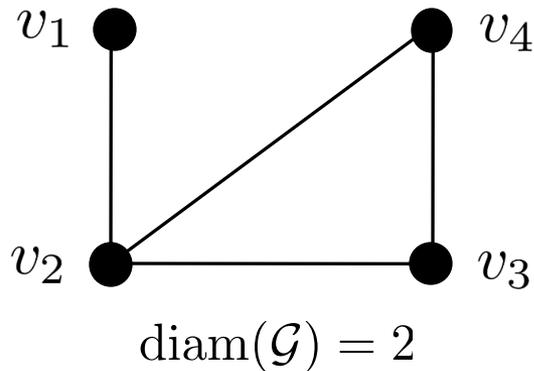
Non connexe (3 composantes connexes)



Théorie des graphes : notions de base

- Le **diamètre** d'un graphe \mathcal{G} , noté $\text{diam}(\mathcal{G})$, est la *plus grande distance possible* qui puisse exister entre deux de ses sommets (la distance entre deux sommets est définie par la longueur d'un plus court chemin entre ces deux sommets)

Exemples:

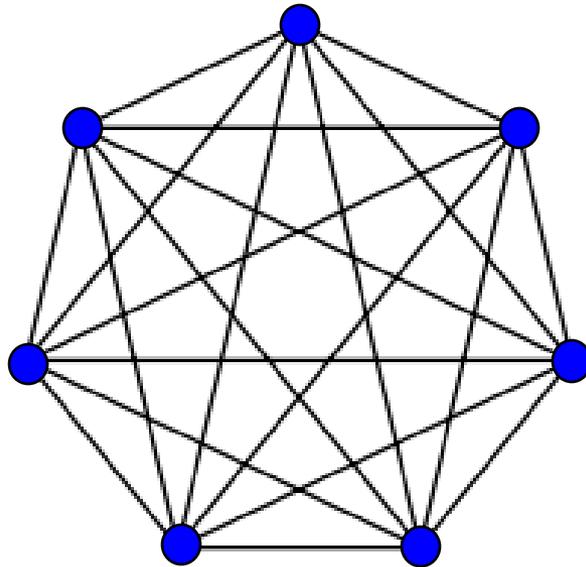


Familles de graphes

- K_n : **Graphe complet** (ou **complètement connexe**)

Dans un graphe complet chaque sommet est relié à tous les autres
(tous les sommets sont adjacents deux à deux)

Exemple: K_7 (sept sommets)



Familles de graphes

- P_n : **Graphe chaîne**

$P_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, E_P)$, où $v_i v_j \in E_P$ si et seulement si $j = i + 1$,
 $i \in \{1, \dots, n - 1\}$

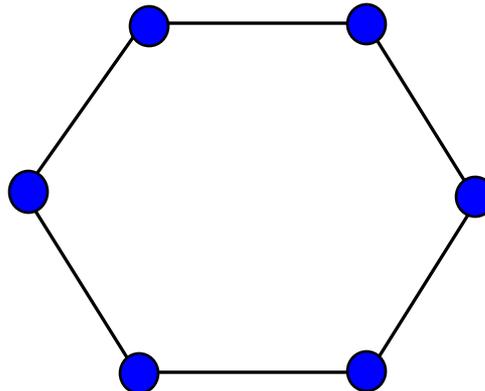
Exemple: P_6



- C_n : **Graphe cycle**

$C_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, E_C)$, où $v_i v_j \in E_C$ si et seulement si
 $i - j \equiv \pm 1 \pmod n$

Exemple: C_6



Remarque:

a et b sont congruents modulo n :
 $a \equiv b \pmod n$
 si $a - b$ est divisible par n , c'est-à-dire si $a = b + kn$ avec k entier

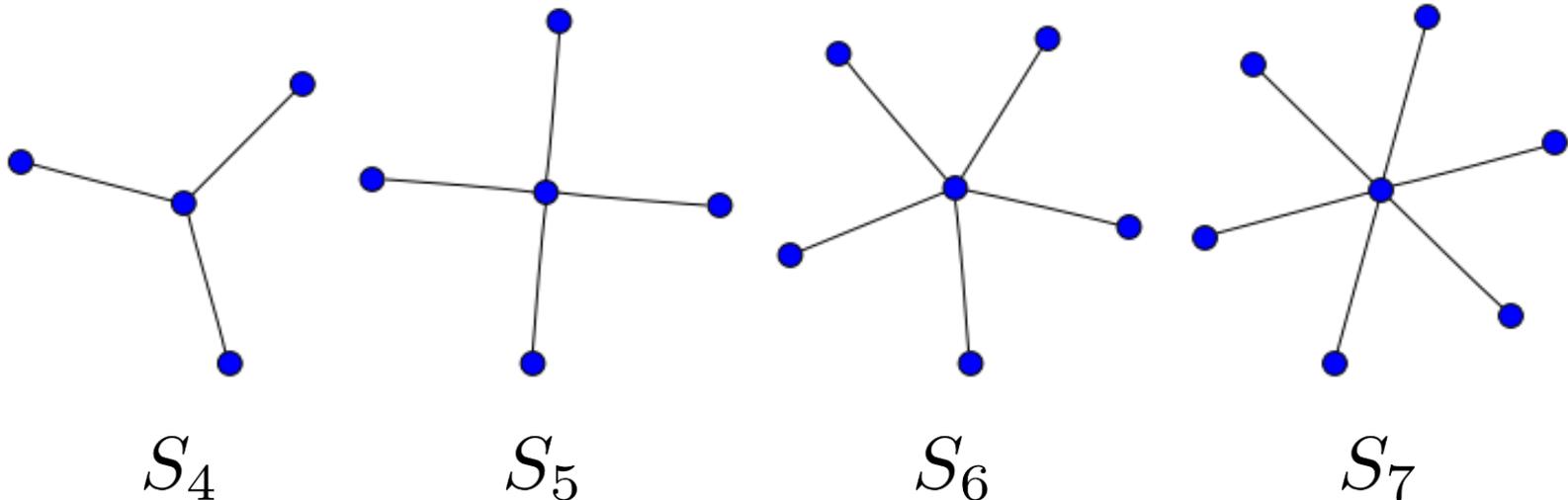


Familles de graphes

- S_n : **Graphe étoile**

$S_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, E_S)$ où $v_i v_j \in E_S$ si et seulement si $i = 1$ ou $j = 1$

Exemples:



Remarque : par convention, le sommet 1 est le sommet au centre de l'étoile

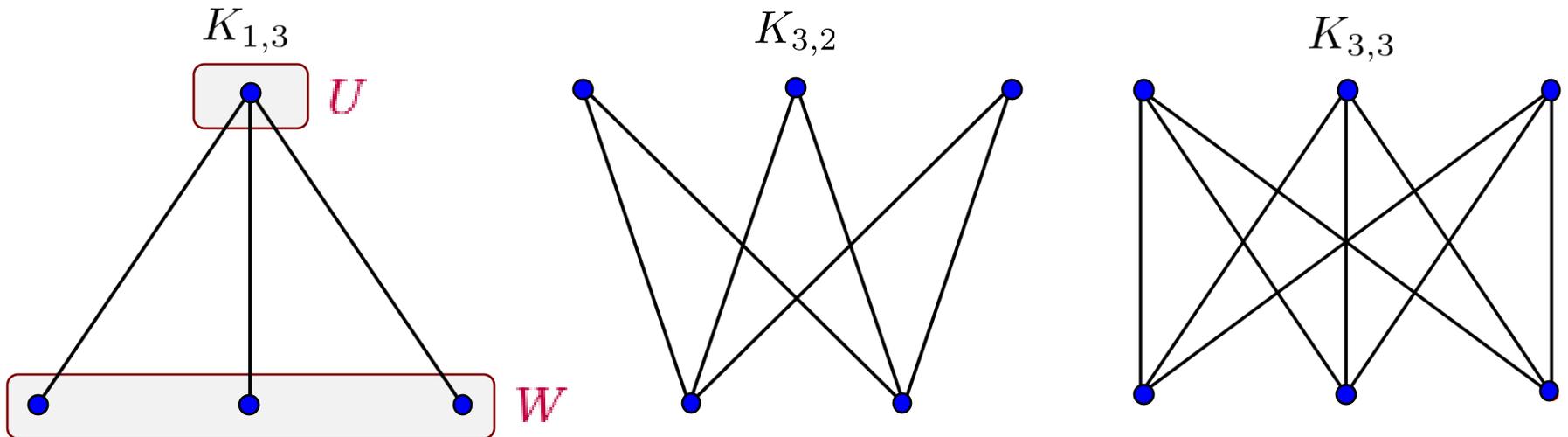


Familles de graphes

- $K_{m,n}$: **Graphe biparti complet (ou biclique)**

- Dans un graphe biparti complet, il existe une partition de l'ensemble de sommets V en deux sous-ensembles U et W ($V = U \cup W$) telle que *chaque sommet* de U est relié à *chaque sommet* de W . En d'autres termes : $\mathcal{G} = (U \cup W, U \times W)$
- Si U contient m sommets et W contient n sommets, le graphe est noté $K_{m,n}$

Exemples:



Remarque: $K_{1,n} = S_{n+1}$ (graphe étoile)



Graphes réguliers

- Un **graphe régulier** est un graphe où tous les sommets ont le *même nombre de voisins*, c'est-à-dire le même degré
- Un graphe régulier dont les sommets sont de degré k est appelé un **graphe k -régulier** (ou graphe régulier de degré k)

Exemples:

C_n : 2-régulier

K_n : $(n - 1)$ -régulier

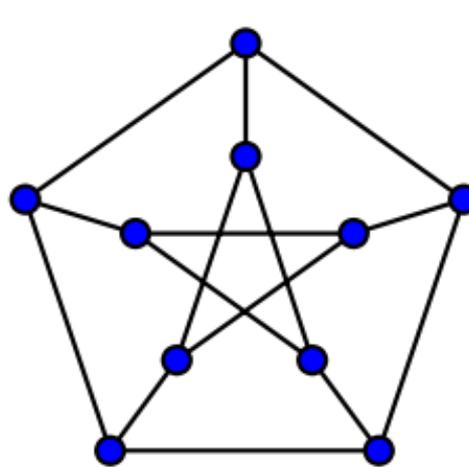
$K_{n,n}$: n -régulier

Graphe de Petersen : 3-régulier

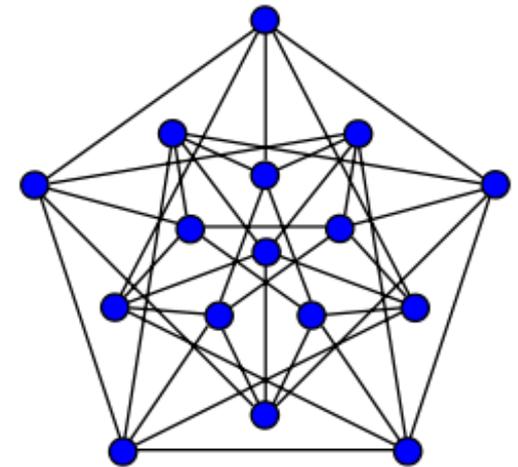
Graphe de Dürer : 3-régulier

Graphe de Clebsch : 5-régulier

Graphe de Schläfli : 16-régulier



Graphe de Petersen



Graphe de Clebsch



Généralisation de la notion de graphe

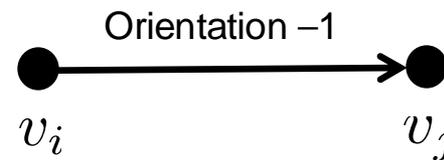
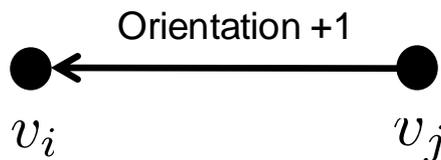
Graphes orientés (digraphes)

- Si on associe des *directions* aux arêtes d'un graphe, l'interconnexion résultante n'est plus considérée comme un graphe non orienté
- Un **graphe orienté** (ou **digraphe**), noté $\mathcal{D} = (V, E)$, peut être obtenu de deux manières différentes :

- On supprime la condition que l'ensemble des arêtes E contient des *couples non ordonnés* de sommets :

Si le couple ordonné $(v_i, v_j) \in E$, alors on dit que v_i est la **queue** (point de départ de la flèche) de l'arête, tandis que v_j est la **tête** (point terminal de la flèche)

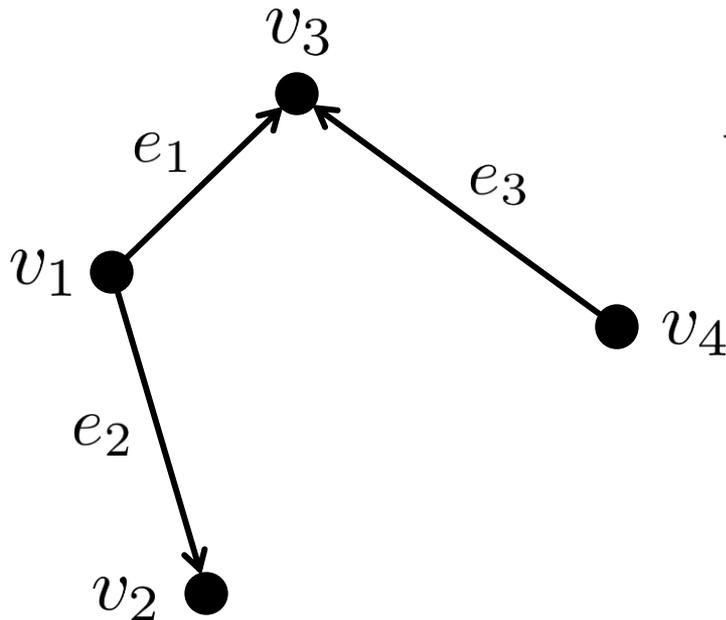
- On associe une orientation $o : E \rightarrow \{-1, 1\}$ à l'ensemble non ordonné des arêtes



Généralisation de la notion de graphe

Graphes orientés

Exemple:



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_2), (v_4, v_3)\}$$

ou plus simplement

$$E = \{e_1, e_2, e_3\}$$



Généralisation de la notion de graphe

Graphes orientés

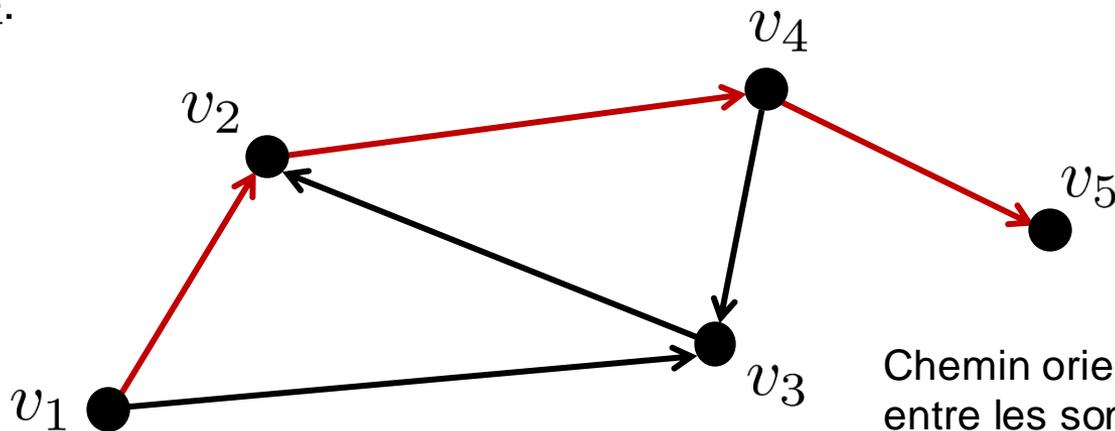
- Les notions d'**adjacence**, de **voisinage** et de **connexité** vues précédemment peuvent être aisément étendues aux digraphes

Par exemple, un **chemin orienté** de longueur m dans le digraphe \mathcal{D} est donné par la sequence de sommets distincts :

$$v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$$

telle que, pour $k \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$, nous avons $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in E(\mathcal{D})$

Exemple:



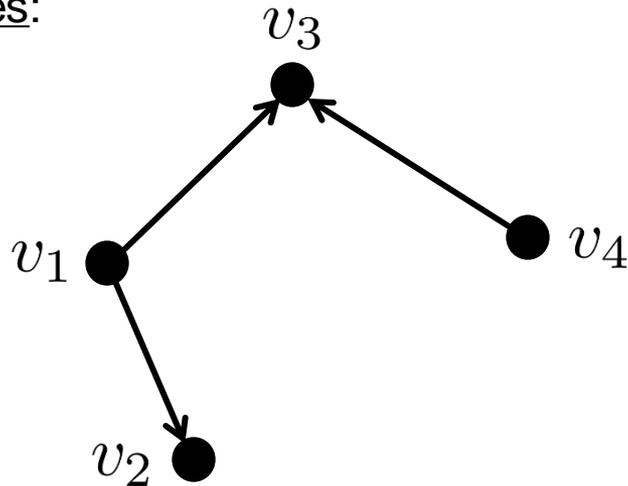
Chemin orienté (rouge) de longueur 3 entre les sommets 1 et 5



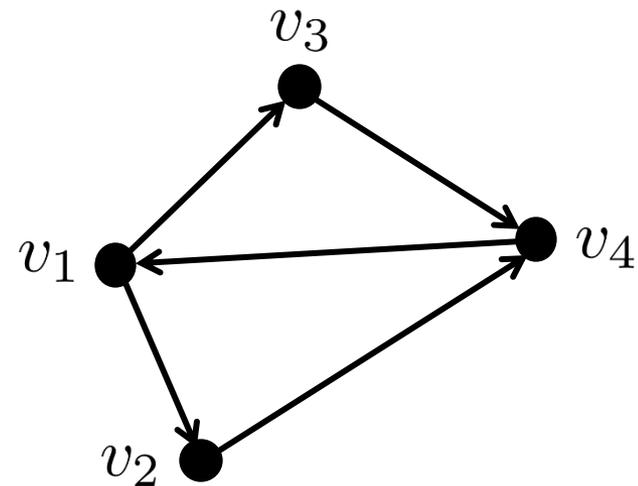
Généralisation de la notion de graphe

- On dit que un digraphe est :
 - a) **Fortement connexe** : si entre tout couple de sommets, il y a un chemin orienté
 - b) **Faiblement connexe** : s'il est connexe lorsqu'il est considéré comme un graphe, c'est-à-dire comme un graphe *sans orientation*

Exemples:



Digraphe *faiblement connexe* mais **pas** fortement connexe



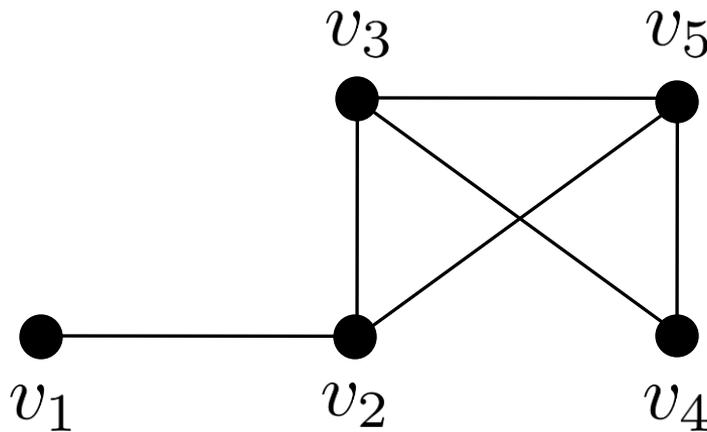
Digraphe *fortement connexe* (et, par conséquent, aussi faiblement connexe)



Graphes et matrices

- Outre une représentation graphique en termes de *sommets* et d'*arêtes*, chaque graphe admet une représentation sous forme **matricielle**
- Pour un graphe non orienté \mathcal{G} , le **degré** d'un sommet v_i , noté $d(v_i)$, est la cardinalité du voisinage $\mathcal{N}(i)$, c'est-à-dire le nombre de sommets qui sont adjacents au sommet v_i dans \mathcal{G}

Exemple:



$$d(v_1) = 1$$

$$d(v_2) = 3$$

$$d(v_3) = 3$$

$$d(v_4) = 2$$

$$d(v_5) = 3$$



Matrice des degrés et matrice d'adjacence

- La **matrice des degrés** d'un graphe \mathcal{G} est la matrice diagonale $n \times n$ qui contient le degré de chaque sommet de \mathcal{G} sur la diagonale :

$$\Delta(\mathcal{G}) = \text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)).$$

- La **matrice d'adjacence** $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ est la matrice symétrique $n \times n$ qui codifie les relations d'adjacence dans le graphe \mathcal{G} :

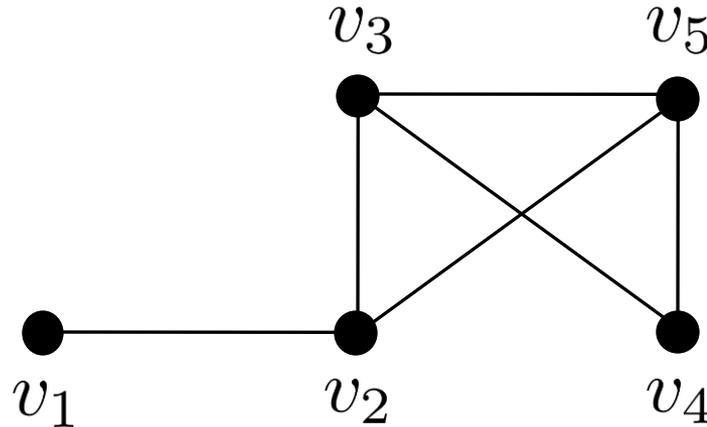
$$[\mathbf{A}(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

↑
Élément (i, j) de la matrice $\mathbf{A}(\mathcal{G})$

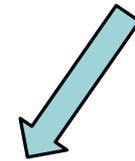


Matrice des degrés et matrice d'adjacence

Exemple:



Matrice symétrique



$$\Delta(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Matrice d'incidence

- Soit \mathcal{G}^o le digraphe obtenu en associant une orientation *arbitraire* aux arêtes du graphe \mathcal{G} . La **matrice d'incidence** $\mathbf{D}(\mathcal{G}^o)$ est une matrice $n \times m$ définie comme suit ($n =$ nombre de sommets; $m =$ nombre d'arêtes) :

$$[\mathbf{D}(\mathcal{G}^o)]_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } v_i \text{ est la queue de } e_j, \\ 1 & \text{si } v_i \text{ est la tête de } e_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

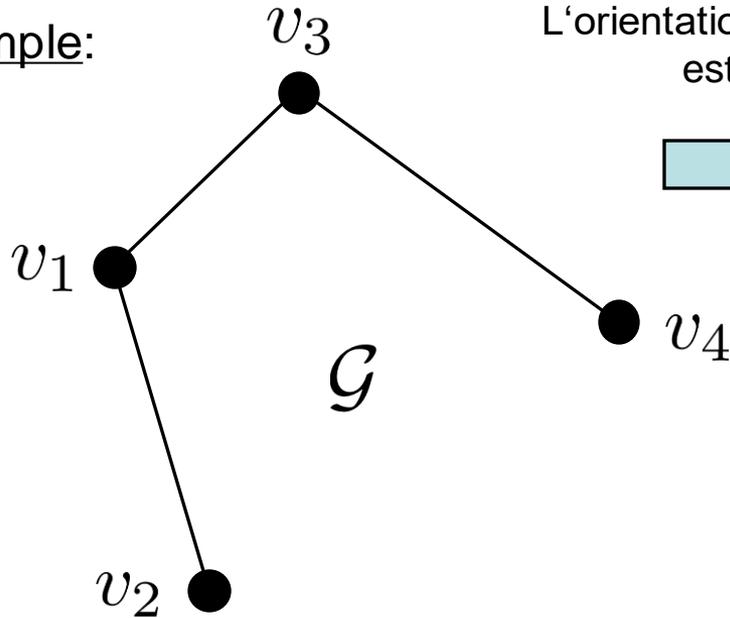
Remarque:

$\mathbf{D}(\mathcal{G}^o)$ capture non seulement la relation d'adjacence, mais aussi l'information sur l'**orientation** que le graphe possède désormais

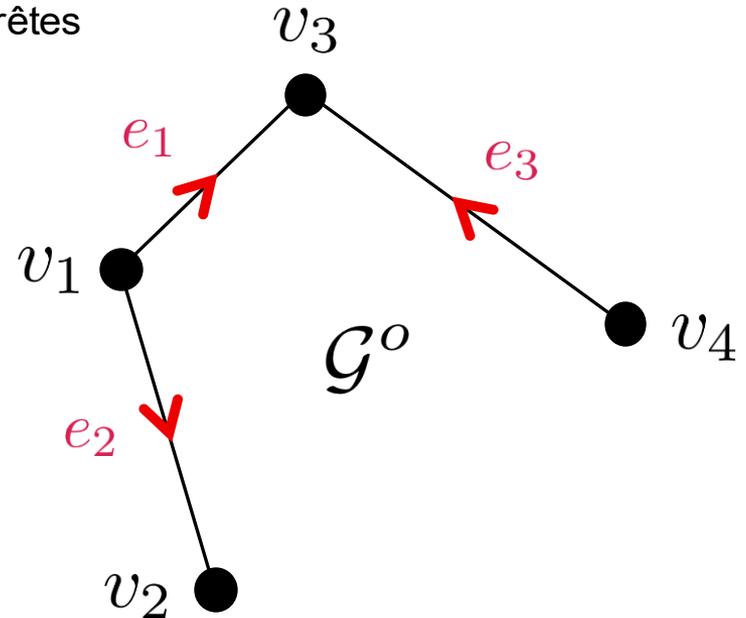


Matrice d'incidence

Exemple:



L'orientation des arêtes est fixée



$$D(\mathcal{G}^o) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sommets v \downarrow $\xrightarrow{\text{Arêtes } e}$



Matrice d'incidence

$$\mathbf{D}(\mathcal{G}^o) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Remarques :

- La somme des éléments de chaque colonne de $\mathbf{D}(\mathcal{G}^o)$ est zéro
- La matrice d'incidence d'un **digraphe** \mathcal{D} peut être définie de manière similaire, en omettant l'étape de pre-orientation des arêtes nécessaire pour les graphes non orientés
 - Dans ce cas, la matrice d'incidence est notée $\mathbf{D}(\mathcal{D})$



Matrice laplacienne

La **matrice laplacienne** associée au graphe non orienté \mathcal{G} est définie comme suit :

$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{\Delta}(\mathcal{G}) - \mathbf{A}(\mathcal{G}).$$

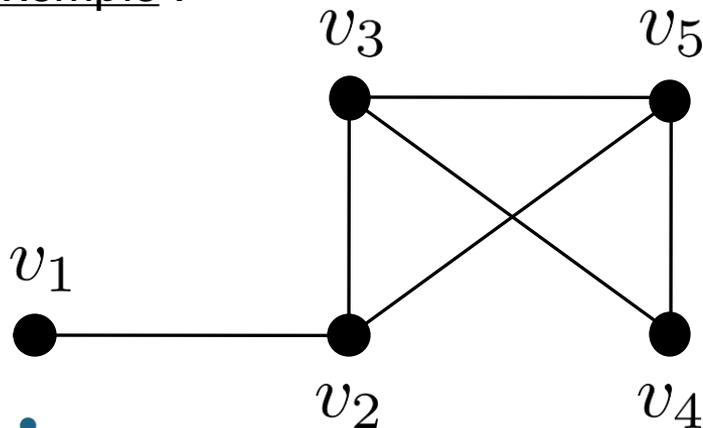
Il découle de cette définition, que pour tout graphe la somme des éléments dans *chaque ligne* de la matrice laplacienne est **zero** :

$$\mathbf{L}(\mathcal{G})\mathbf{1} = \mathbf{0} \text{ avec } \mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T.$$



Pierre-S. Laplace
(1749-1827)

Exemple :



$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$



Matrice laplacienne : définition alternative

Étant donnée une *orientation arbitraire* de l'ensemble des arêtes $E(\mathcal{G})$, la **matrice laplacienne** du graphe \mathcal{G} peut être définie de façon alternative à partir de la matrice d'incidence, comme suit :

$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{D}(\mathcal{G}^o) \mathbf{D}^T(\mathcal{G}^o)$$

Cette définition montre que $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ est une matrice :

- **Symétrique** (c'est-à-dire, $\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{L}^T(\mathcal{G})$)
- **Semi-définie positive** (c'est-à-dire, $\mathbf{x}^T \mathbf{L}(\mathcal{G}) \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$)

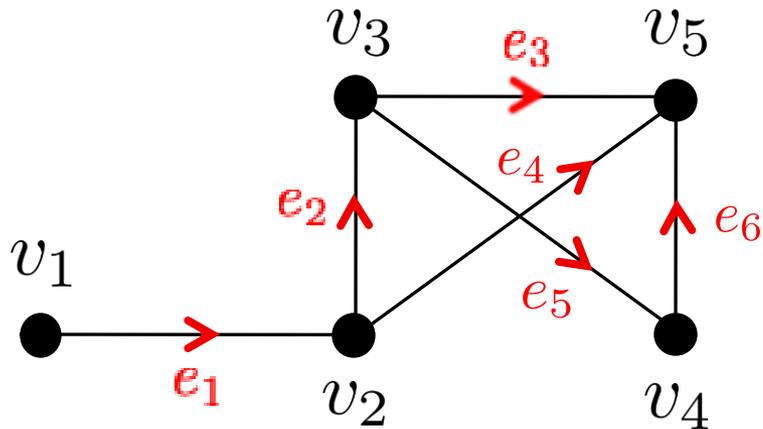
Remarque :

Les deux définitions que nous avons données sont *équivalentes* et du moment que la notion d'orientation n'est pas nécessaire dans la première, on conclut que la matrice laplacienne est **indépendante de l'orientation**



Matrice laplacienne : définition alternative

Exemple:



$$\mathbf{D}(\mathcal{G}^o) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{D}(\mathcal{G}^o) \mathbf{D}^T(\mathcal{G}^o) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$



Matrice laplacienne : d'autres propriétés

- Nous avons que

$$\text{trace}(\mathbf{L}) = \sum_{i=1}^n [\mathbf{L}]_{ii} = 2m$$

avec m le nombre d'arêtes de \mathcal{G}

- La matrice laplacienne d'un graphe \mathcal{G} peut être écrite comme la *somme de produits extérieurs* de vecteurs :

$$\mathbf{L} = \sum_{(i,j) \in E} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T$$

où $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur unitaire élémentaire dans la direction i (par exemple $\mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ et $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0, \dots, 0]^T$)



Matrice laplacienne pondérée

- Étant donné un *graphe pondéré* $\mathcal{G} = (V, E, w)$ la **matrice laplacienne pondérée** est définie comme suit :

$$\mathbf{L}_w(\mathcal{G}) = \mathbf{D}(\mathcal{G}^o) \mathbf{W} \mathbf{D}^T(\mathcal{G}^o)$$

où

$$\mathbf{W} = \text{diag}(w(e_1), w(e_2), \dots, w(e_m)) \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

avec poids :

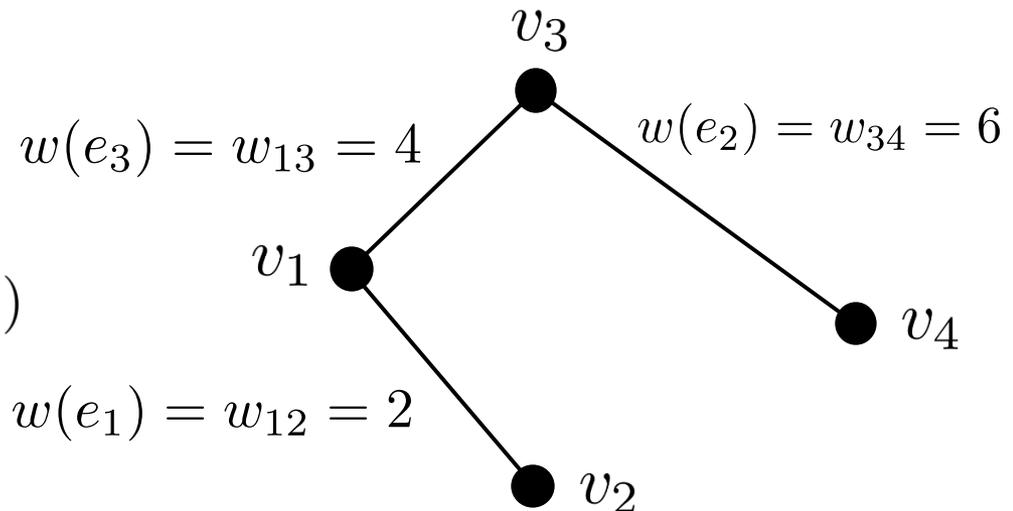
$$w(e_j) > 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Exemple:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}(w(e_1), w(e_2), w(e_3))$$



Matrice laplacienne pondérée (digraphes)

Soit $\mathcal{D} = (V, E, w)$ un graphe orienté pondéré.

- Pour la **matrice d'adjacence**, on peut choisir :

$$[\mathbf{A}(\mathcal{D})]_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{si } (v_j, v_i) \in E(\mathcal{D}), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

- Pour la **matrice des degrés** $\Delta(\mathcal{D})$, on peut faire le choix suivant :

$$\Delta(\mathcal{D}) = \text{diag}(d_{\text{in}}(v_1), d_{\text{in}}(v_2), \dots, d_{\text{in}}(v_n)),$$

où

$$d_{\text{in}}(v_i) = \sum_{\{j \mid (v_j, v_i) \in E(\mathcal{D})\}} w_{ij},$$

est le **degré pondéré entrant** du sommet v_i

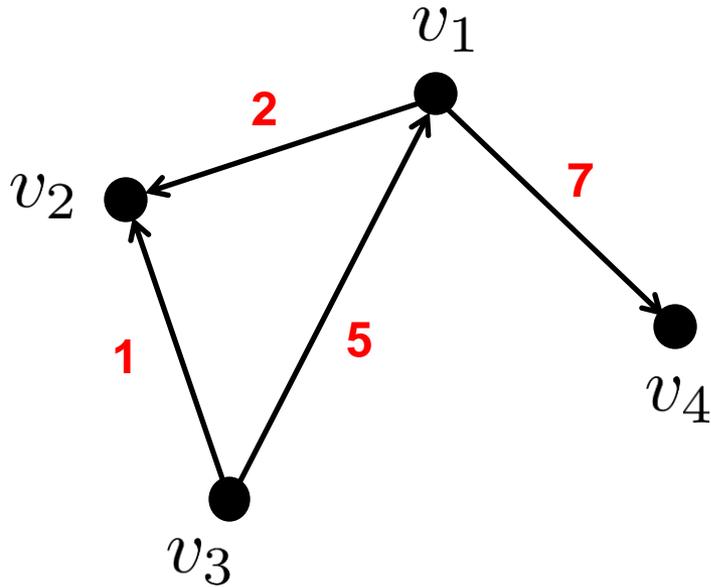
- La **matrice laplacienne pondérée** (degré entrant) est alors définie comme :

$$\mathbf{L}(\mathcal{D}) = \Delta(\mathcal{D}) - \mathbf{A}(\mathcal{D})$$



Matrice laplacienne pondérée (digraphes)

Exemple:



$$\Delta(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

← Non symétrique !!



Matrice laplacienne pondérée (digraphes)

- On peut toujours partitionner la matrice d'incidence d'un digraphe \mathcal{D} comme suit :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\odot} + \mathbf{D}_{\otimes}$$

où $\mathbf{D}_{\odot}(\mathcal{D}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la *matrice d'incidence entrante*, définie par

$$[\mathbf{D}_{\odot}]_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } v_i \text{ est la queue de } e_j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\mathbf{D}_{\otimes}(\mathcal{D}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la *matrice d'incidence sortante*, définie par

$$[\mathbf{D}_{\otimes}]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est la tête de } e_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

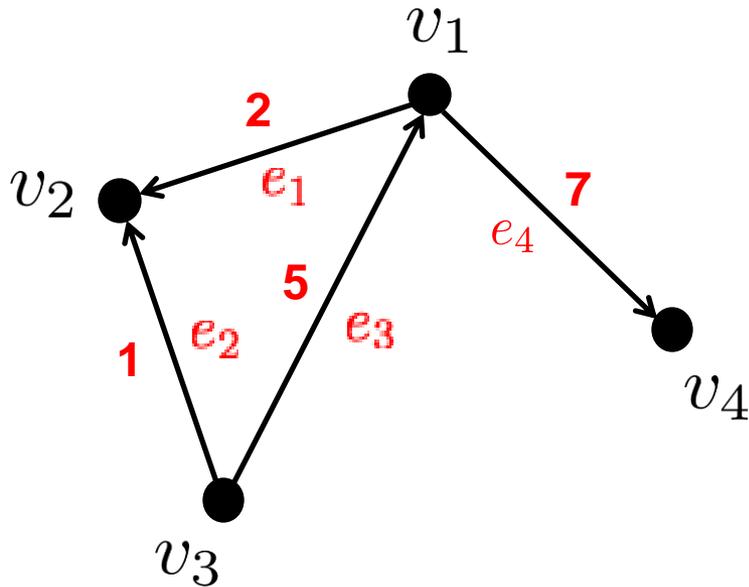
- On peut ainsi définir la **matrice laplacienne pondérée** (degré entrant) en fonction de la *matrice d'incidence* et de la *matrice d'incidence sortante*, comme :

$$\mathbf{L}(\mathcal{D}) = \mathbf{D}_{\otimes}(\mathcal{D}) \mathbf{W} \mathbf{D}^T(\mathcal{D})$$



Matrice laplacienne pondérée (digraphes)

Exemple (revisité) :



$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathcal{D}) &= \mathbf{D}_{\otimes}(\mathcal{D}) \mathbf{W} \mathbf{D}^T(\mathcal{D}) \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\odot}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\otimes}(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}(2, 1, 5, 7)$$



Théorie algébrique et spectrale des graphes

- La **théorie algébrique des graphes** associe des *objets algébriques* (par ex. la matrice des degrés, d'adjacence, laplacienne) à un graphe
- La **théorie spectrale des graphes** étudie les *valeurs et les vecteurs propres* associés à la matrice d'adjacence et à la matrice laplacienne d'un graphe

Petit rappel

Définition :

Un vecteur non nul $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ est un *vecteur propre* de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si et seulement si il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

où λ s'appelle *valeur propre* associée à \mathbf{u} .

- On trouve les n valeurs propres et vecteur propres de \mathbf{A} en résolvant le système d'équations :

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$



Spectre de la matrice laplacienne

Soit $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ la matrice laplacienne du graphe non orienté \mathcal{G} . Cette matrice est *symétrique* et *semi-définie positive*. Par conséquent, ses n *valeurs propres réelles* peuvent être ordonnées de la manière suivante :

$$0 = \lambda_1(\mathbf{L}(\mathcal{G})) \leq \lambda_2(\mathbf{L}(\mathcal{G})) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{L}(\mathcal{G})).$$

Théorème:

Le graphe \mathcal{G} est **connexe** si et seulement si :

$$\lambda_2(\mathbf{L}(\mathcal{G})) > 0$$

En outre, le nombre de *composantes connexes* d'un graphe non-orienté \mathcal{G} est égal à la multiplicité algébrique de la valeur propre 0 de la matrice laplacienne $\mathbf{L}(\mathcal{G})$



Spectre de la matrice laplacienne

- Il n'est pas aisé de trouver le spectre, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_1(\mathbf{L}), \lambda_2(\mathbf{L}), \dots, \lambda_n(\mathbf{L})\}$, de la matrice laplacienne d'un *graphe* \mathcal{G} quelconque
- Toutefois, les valeurs propres (et les vecteurs propres) de la matrice laplacienne de certaines familles de graphes admettent une **expression de forme fermée**

Graph complet

Puisque $\mathbf{L}(K_n) = -\mathbf{1}\mathbf{1}^T + n\mathbf{I}_n$, le spectre de $\mathbf{L}(K_n)$ est celui de $-\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ décalé de n . Le spectre de la matrice $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ est $\{0, \dots, 0, n\}$, donc le spectre de la matrice laplacienne de K_n est :

$$\{0, n, \dots, n\}$$

Graphe chaîne

Les valeurs propres de la matrice laplacienne de P_n pour $n \geq 3$, sont :

$$2 - 2 \cos \left(\frac{\pi k}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$



Spectre de la matrice laplacienne

Graphe cycle

Les valeurs propres de la matrice laplacienne de C_n pour $n \geq 3$, sont :

$$2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi k}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Exemple :

Le spectre de $\mathbf{L}(C_3)$ est $\left\{ 2 - 2 \cos(0), 2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right), 2 - 2 \cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right\} = \{0, 3, 3\}$

Graphe étoile

Le spectre de la matrice laplacienne de S_n est :

$$\{0, 1, \dots, 1, n\}$$

où la valeur propre 1 a multiplicité algébrique $n - 2$ (c'est-à-dire, la valeur propre 1 est répétée $n - 2$ fois)



Spectre de la matrice laplacienne

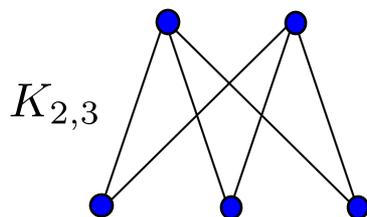
Graphe biparti complet

Le spectre de la matrice laplacienne du graphe $K_{m,n}$ est :

$$\{0, n, \dots, n, m, \dots, m, n + m\}$$

avec une multiplicité algébrique $1, m - 1, n - 1, 1$, respectivement

Exemple :



Le spectre de $\mathbf{L}(K_{2,3})$ est $\{0, 3, 2, 2, 5\}$

Graphe de Petersen

Le spectre de la matrice laplacienne du graphe de Petersen est ($n = 10$):

$$\{0, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5\}$$

Graphe de Clebsch

Le spectre de la matrice laplacienne du graphe de Clebsch est ($n = 16$):

$$\{0, 4, \dots, 4, 8, \dots, 8\}$$

avec une multiplicité algébrique $1, 10, 5$, respectivement



Spectre de la matrice laplacienne

$\lambda_2(\mathbf{L}(\mathcal{G}))$ est la deuxième valeur propre la plus faible de la matrice laplacienne ($\lambda_1(\mathbf{L}(\mathcal{G}))$ est toujours zéro)

$\lambda_2(\mathbf{L}(\mathcal{G}))$ est appelée **valeur de Fiedler** (ou connexité algébrique) et le vecteur propre associé \mathbf{u}_2 , **vecteur de Fiedler** du graph \mathcal{G}



Miroslav Fiedler
(1926 – 2015)

Remarque:

La valeur de Fiedler est importante non seulement comme **mesure de robustesse** ou **du niveau de connexité** d'un graphe, mais aussi pour les **propriétés de convergence** d'un *algorithme distribué* remarquable :

Protocole de consensus



Toolbox de Matlab pour la théorie des graphes

À partir de Matlab R2015b



Quelques commandes de la toolbox

Classe `graph`

`G = graph(A)` uses the square symmetric matrix `A` as an adjacency matrix and constructs a weighted graph with edges corresponding to the nonzero entries of `A`.

`G = graph(S,T)` constructs a graph with edges specified by the node pairs `(S,T)`.
`S` and `T` must have the same number of elements or be scalars.

`G = graph(S,T,WEIGHTS)` also specifies edge weights with the numeric array `WEIGHTS`.
`WEIGHTS` must have the same number of elements as `S` and `T`, or can be a scalar.

`G = graph(S,T,...,'OmitSelfLoops')` does not add self-loops to the graph

graph properties :

Edges - Table containing edge information

Nodes - Table containing node information



Quelques commandes de la toolbox

graph methods:

`numnodes` - Number of nodes in a graph
`numedges` - Number of edges in a graph

`addnode` - Add nodes to a graph
`rmnode` - Remove nodes from a

graph
`addedge` - Add edges to a graph
`rmedge` - Remove edges from a

graph
`degree` - Degree of nodes in a

graph
`neighbors` - Neighbors of a node in a

graph
`subgraph` - Extract an induced subgraph

 `adjacency` - Adjacency matrix of a graph
`incidence` - Incidence matrix of a graph
`laplacian` - Graph Laplacian

Quelques commandes de la toolbox

graph methods:

- `bfsearch` - Breadth-first search (BFS)
 - `dfsearch` - Depth-first search (DFS)
 - `shortestpath` - Compute shortest path between two nodes
 - `shortestpathtree` - Compute single source shortest paths
 - `distances` - Compute all pairs distances
 - `nearest` - Compute nearest neighbors (at a distance D) of a node
 - `conncomp` - Compute connected components of a graph
 - `minspantree` - Compute minimum spanning tree of a graph
 - `isisomorphic` - Determine whether two graphs are isomorphic
- De la même façon pour les graphes orientés, il existe la classe `digraph` pour un directed graph et `graph` pour an undirected graph

