



Electronique

Energie Electrique

Automatique

Master 2 3EA, Parcours RoVA



Systemes Robotiques Hétérogènes et Coopératifs

UPJV, Département EEA

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail : fabio.morbidi@u-picardie.fr

CM, TD : Mardi 15h30-18h30 et Mercredi 13h30-16h30, salle CURI 305

TP : Mercredi 13h30-16h30, salle TP204

Protocole de consensus

Graphes orientés



Protocole de consensus : graphes orientés

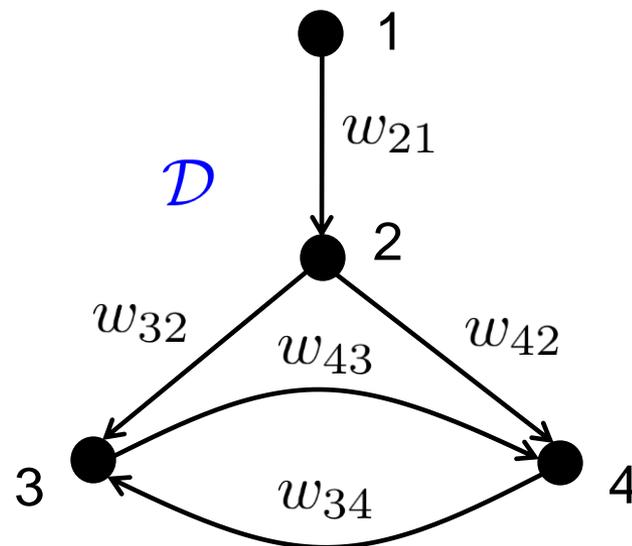
- Considérons le *graphe orienté pondéré* \mathcal{D} dans la figure ci-dessous, qui correspond aux dynamiques du premier ordre ($w_{ij} > 0, \forall i \neq j$):

$$\dot{x}_1(t) = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = w_{21}(x_1(t) - x_2(t)),$$

$$\dot{x}_3(t) = w_{32}(x_2(t) - x_3(t)) + w_{34}(x_4(t) - x_3(t)),$$

$$\dot{x}_4(t) = w_{42}(x_2(t) - x_4(t)) + w_{43}(x_3(t) - x_4(t)).$$

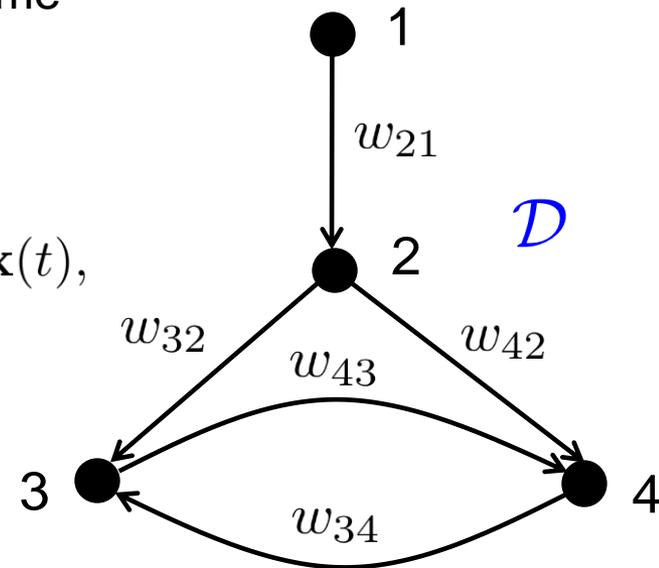


Protocole de consensus : graphes orientés

- Nous pouvons réécrire de façon compacte le système précédent comme suit :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_{21} & w_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -w_{32} & w_{32} + w_{34} & -w_{34} \\ 0 & -w_{42} & -w_{43} & w_{42} + w_{43} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

avec $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T$.



- Si on utilise la définition de matrice laplacienne pour des graphes orientés pondérés (avec degré entrant), on peut réécrire les dynamiques du réseau de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D}) \mathbf{x}(t),$$

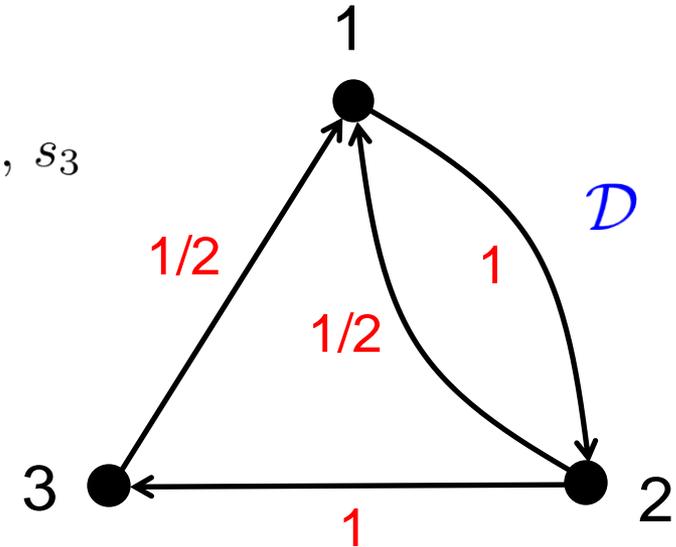
où \mathcal{D} représente la connexion orientée entre les sommets



Protocole de consensus : graphes orientés

Un autre exemple:

- Trois robots coordonnent leurs *vitesse*s s_1, s_2, s_3 selon la **chaîne de commande** montrée dans la figure
- On peut exprimer les dynamiques du système résultant comme suit :



$$\dot{s}_1(t) = \frac{1}{2}((s_3(t) - s_1(t)) + (s_2(t) - s_1(t))),$$

$$\dot{s}_2(t) = s_1(t) - s_2(t),$$

$$\dot{s}_3(t) = s_2(t) - s_3(t).$$

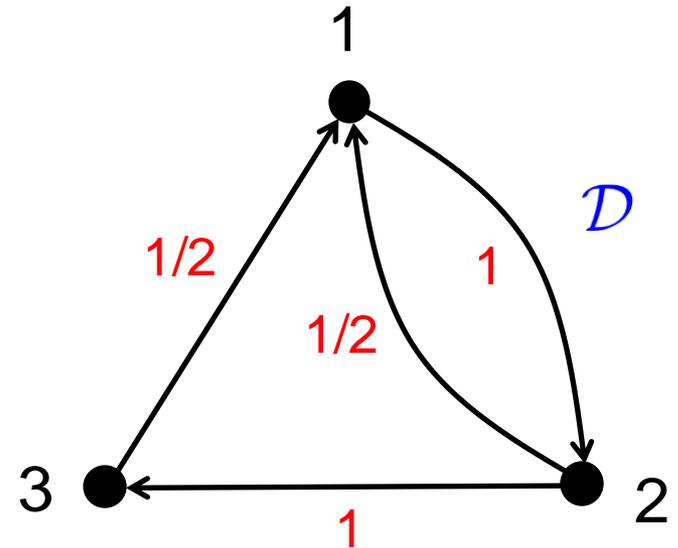


Protocole de consensus : graphes orientés

- Nous pouvons réécrire l'équation précédente de façon compacte comme :

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{s}(t),$$

avec $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), s_3(t)]^T$.



- La matrice dans le système ci-dessus correspond à *moins* la matrice laplacienne (avec degré entrant) du réseau, ainsi :

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D}) \mathbf{s}(t),$$

où \mathcal{D} est le graph orienté pondéré qui décrit la chaîne de commande



Vers le consensus : graphes orientés

- Y a-t-il des conditions *nécessaires* et *suffisantes* sur le graphe orienté \mathcal{D} qui garantissent la convergence du système $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D}) \mathbf{x}(t)$ vers l'ensemble de consensus \mathcal{A} ?
- Comme pour les graphes non orientés, le **rang** de la matrice laplacienne et sa relation avec la structure du graphe, joue un rôle important

Nous avons besoin d'une notion qui correspond à celle d'**arbre couvrant** pour un graphe non orienté. Pour cela, on introduit la définition suivante :

Définition (*Arbre orienté enraciné* ou *graphe enraciné à ramification sortante*)

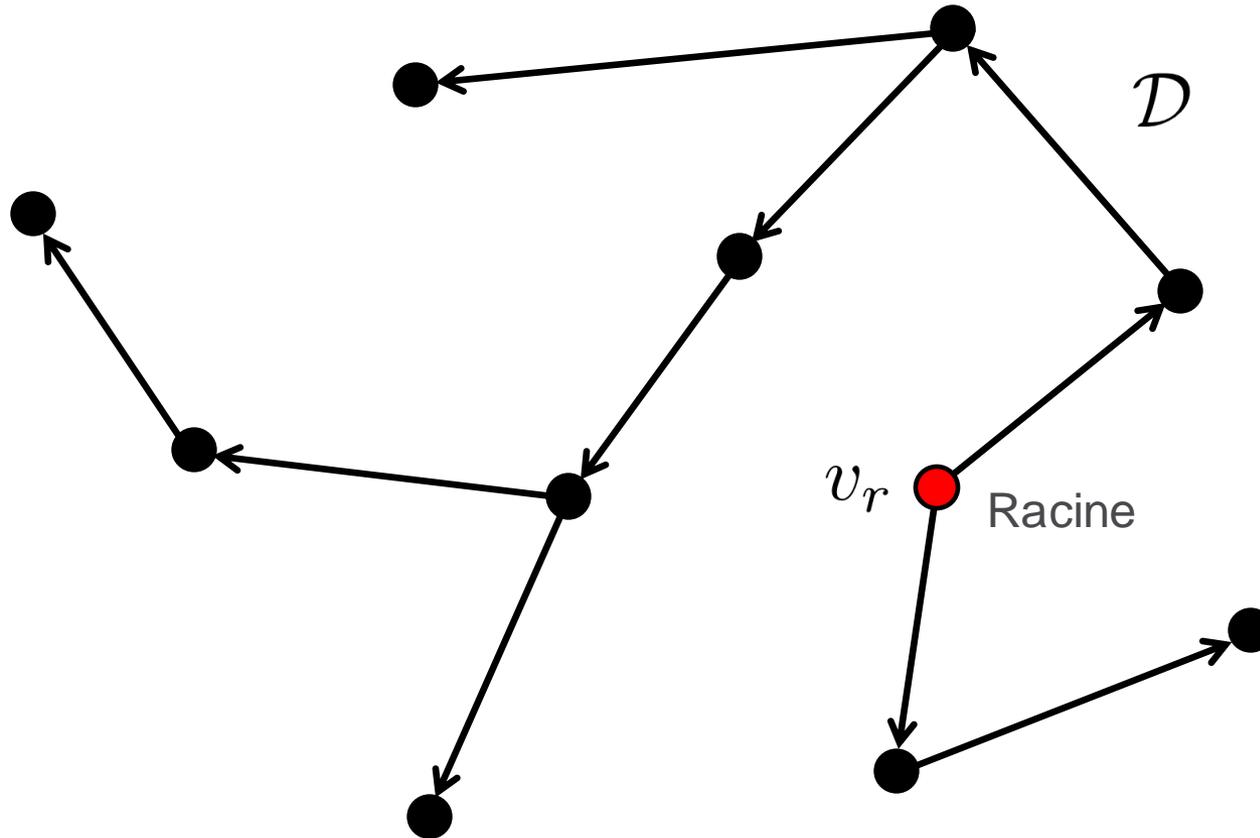
Un graphe orienté \mathcal{D} est un *arbre orienté enraciné*, si :

- a) Il ne contient pas de *cycles (circuits) orientés*
- b) Il existe un sommet v_r (*racine*) qui a la propriété suivante : pour tous les autres sommets $v \in \mathcal{D}$, il existe un chemin orienté de v_r à v



Vers le consensus : graphes orientés

Exemple d'*arbre orienté enraciné*



Vers le consensus : graphes orientés

Proposition :

Un graphe orienté \mathcal{D} avec n sommets contient un *arbre orienté enraciné* comme sous-graphe si et seulement si :

$$\text{rank}(\mathbf{L}(\mathcal{D})) = n - 1$$

Rappel :

Le vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ est un *vecteur propre à gauche* associé à la valeur propre λ de la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si :

$$\mathbf{M}^T \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

Exemple :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres de \mathbf{M} :
 $\{1, 3, 4\}$

Vecteurs propres
(normalisés)
à droite de \mathbf{M}

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5547 \\ 0.8321 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vecteurs propres
(normalisés)
à gauche de \mathbf{M}

$$\begin{bmatrix} 0.8018 \\ -0.5345 \\ -0.2673 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$


Vers le consensus : graphes orientés

Théorème (*Consensus pour graphes orientés*)

Pour un graphe orienté \mathcal{D} contenant un *arbre orienté enraciné*, la trajectoire d'état générée par $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D}) \mathbf{x}(t)$ avec condition initiale \mathbf{x}_0 , satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = (\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1^T) \mathbf{x}_0,$$

où \mathbf{p}_1 et \mathbf{q}_1 sont respectivement, les *vecteurs propres à droite et à gauche* associés à la valeur propre zéro de $\mathbf{L}(\mathcal{D})$, normalisés tels que $\mathbf{p}_1^T \mathbf{q}_1 = 1$.

Par conséquent, nous avons que

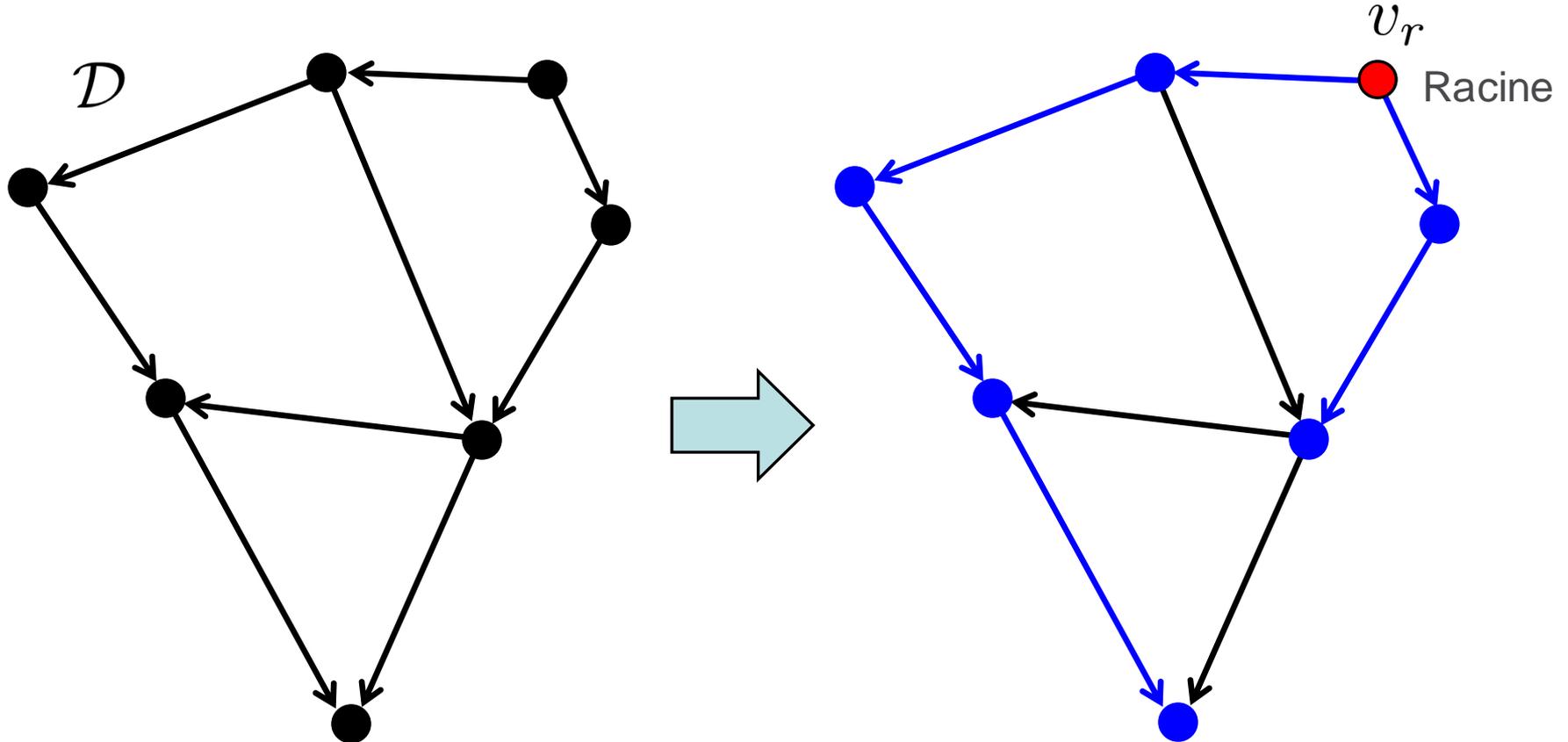
$$\mathbf{x}(t) \longrightarrow \mathcal{A}$$

pour toute condition initiale \mathbf{x}_0 si et seulement si \mathcal{D} contient un *arbre orienté enraciné*



Vers le consensus : graphes orientés

Exemple :

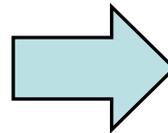
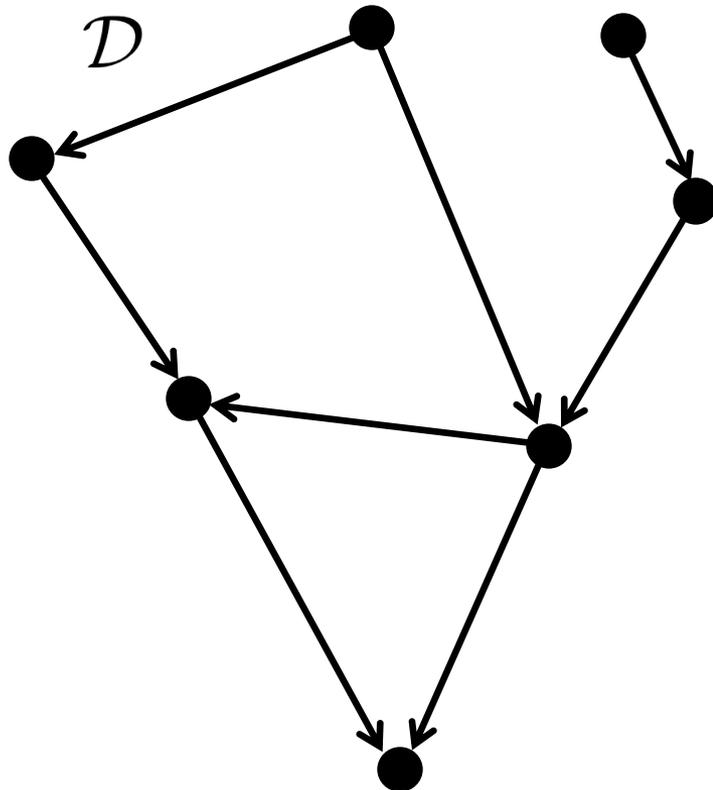


\mathcal{D} contient un *arbre orienté enraciné* (bleu). Il n'est pas unique



Vers le consensus : graphes orientés

Exemple :



\mathcal{D} ne contient pas un
arbre orienté enraciné

Pas de consensus !



Consensus avec digraphes : remarque

Proposition (*Constante de mouvement*)

Soit \mathbf{q}_1 le *vecteur propre à gauche* associé à la valeur propre zéro de la matrice laplacienne (avec degré entrant) d'un digraphe \mathcal{D} .

Alors la quantité suivante :

$$\frac{1}{n} \mathbf{q}_1^T \mathbf{x}(t)$$

reste **inchangée** par rapport à la dynamique de consensus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D}) \mathbf{x}(t).$$



Consensus vs consensus en moyenne

Remarque :

Le théorème précédent nous donne une condition *nécessaire* et *suffisante* pour que le système $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D}) \mathbf{x}(t)$ parvienne au consensus pour toute condition initiale \mathbf{x}_0 : le digraphe \mathcal{D} doit contenir un *arbre orienté enraciné*

Question :

Sous quelles conditions, on parvient à un **consensus en moyenne**, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{x}_0$$

comme pour les *graphes non orientés* ?

Réponse :

Il faut que \mathcal{D} présente un certain *degré de symétrie* par rapport aux arcs orientés

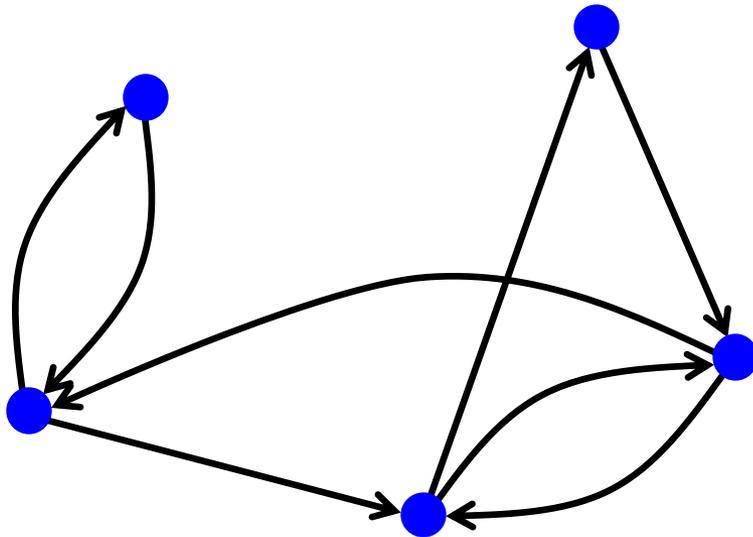


Consensus vs consensus en moyenne

Définition (*Digraphe balancé*)

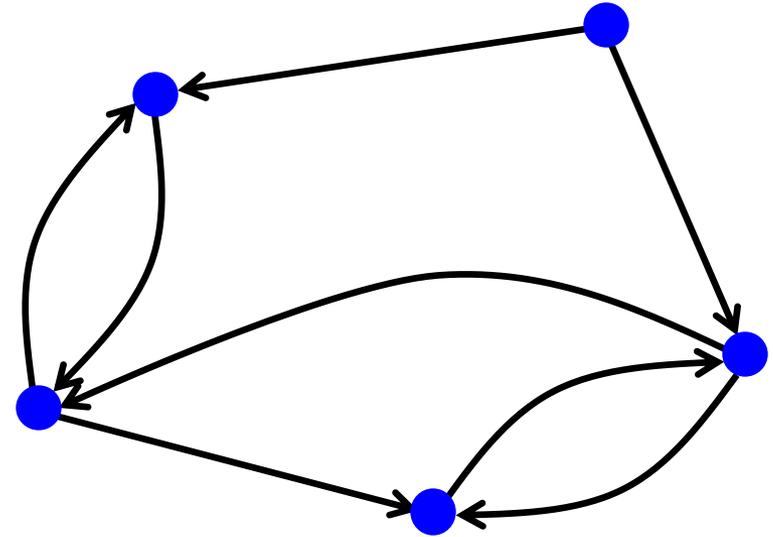
On dit que un digraphe \mathcal{D} est **balancé** si, pour chaque sommet, le *degré entrant* et le *degré sortant* sont identiques

Exemple (digraphes non pondérés) :



Digraphe balancé

degré entrant = degré sortant



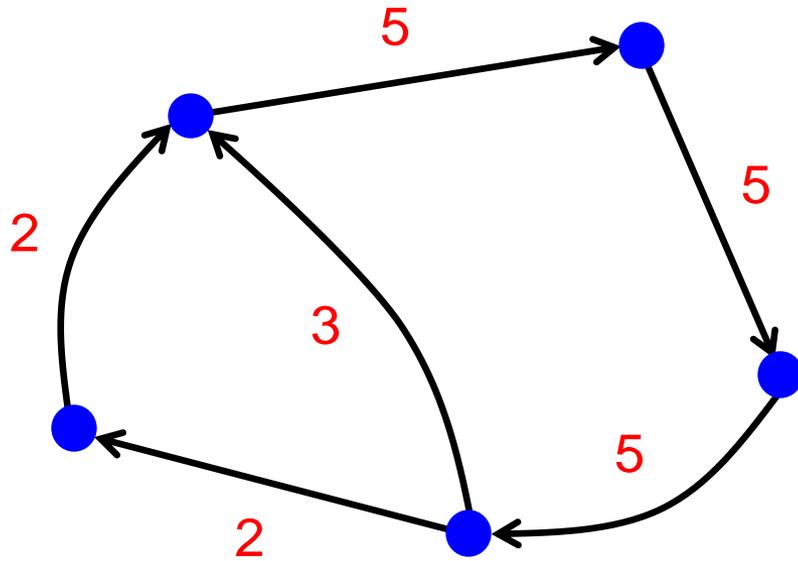
Digraphe non balancé

degré entrant \neq degré sortant



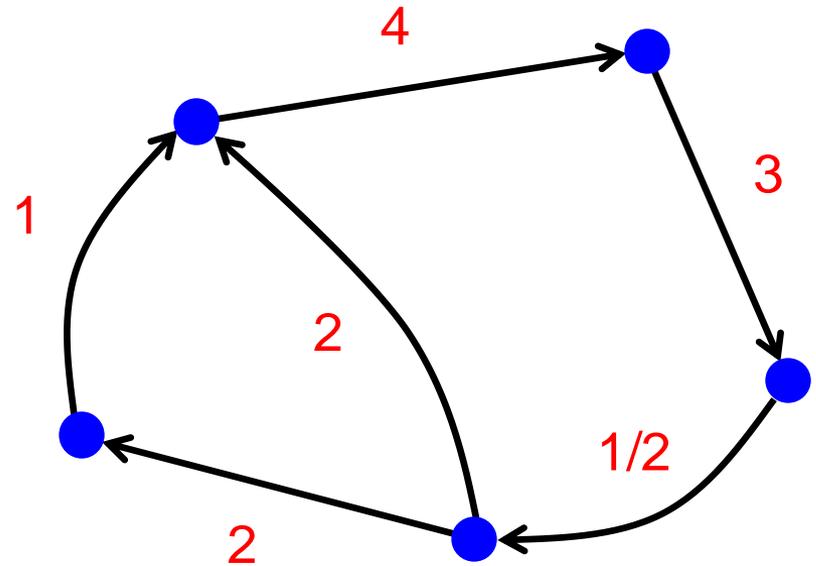
Consensus vs consensus en moyenne

Exemple (digraphes pondérés) :



Digraphe balancé

degré entrant = degré sortant



Digraphe non balancé

degré entrant \neq degré sortant



Consensus vs consensus en moyenne

Si le digraphe est **balancé**, en plus de $\mathbf{L}(\mathcal{D}) \mathbf{1} = \mathbf{0}$ nous avons aussi la propriété que la somme des éléments sur chaque *colonne* de $\mathbf{L}(\mathcal{D})$ est zéro

$$\mathbf{1}^T \mathbf{L}(\mathcal{D}) = \mathbf{0}^T$$

à savoir

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{1}$$

Donc, si le digraphe contient un **arbre orienté enraciné** et il est **balancé**, le protocole de consensus converge vers une valeur commune qui correspond à la moyenne des états initiaux. On parvient au **consensus en moyenne**, car :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{x}_0.$$

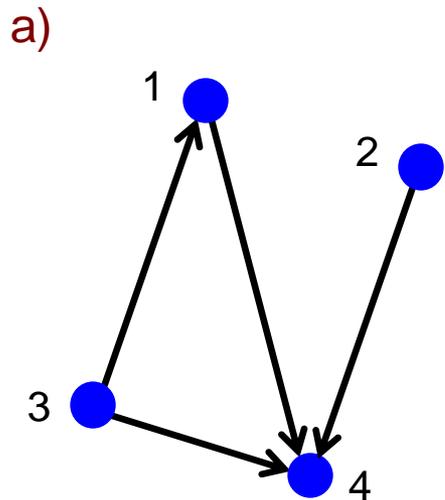


Consensus vs consensus en moyenne

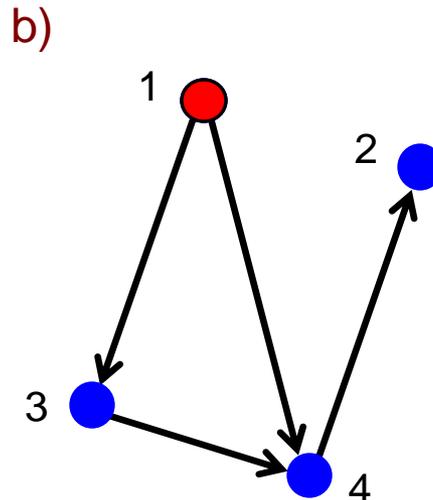
Théorème

Le protocole $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D}) \mathbf{x}(t)$ parvient au *consensus en moyenne* pour toute condition initiale \mathbf{x}_0 si et seulement si le digraphe \mathcal{D} est **faiblement connexe** et **balancé**

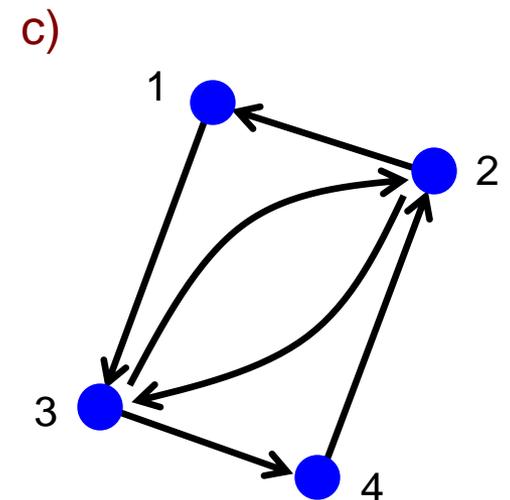
Exemples :



Pas de consensus



Consensus



Consensus en moyenne

