Systèmes Robotiques Hétérogènes et Coopératifs

UPJV, Département EEA

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
E-mail : `fabio.morbidi@u-picardie.fr`

CM : Mercredi et Vendredi 13h30-16h30, salle CURI 8

TD, TP : salle TP203/204

AU 2025-2026

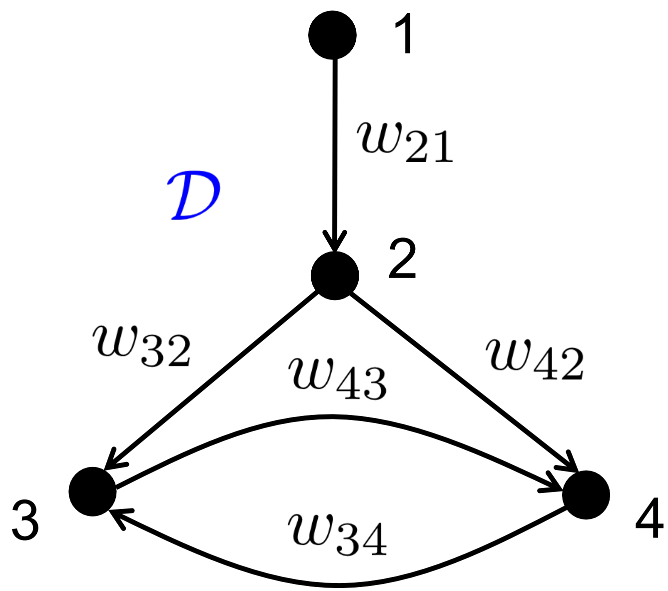
Protocole de consensus

Graphes orientés

Protocole de consensus : graphes orientés

- Considérons le *graphe orienté pondéré* $\mathcal{D}$ dans la figure ci-dessous, qui correspond aux dynamiques du premier ordre $(w_{ij} > 0,\ \forall\, i \neq j)$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= 0,\\
\dot{x}_2(t) &= w_{21}(x_1(t) - x_2(t)),\\
\dot{x}_3(t) &= w_{32}(x_2(t) - x_3(t)) + w_{34}(x_4(t) - x_3(t)),\\
\dot{x}_4(t) &= w_{42}(x_2(t) - x_4(t)) + w_{43}(x_3(t) - x_4(t)).
\end{aligned}
$$

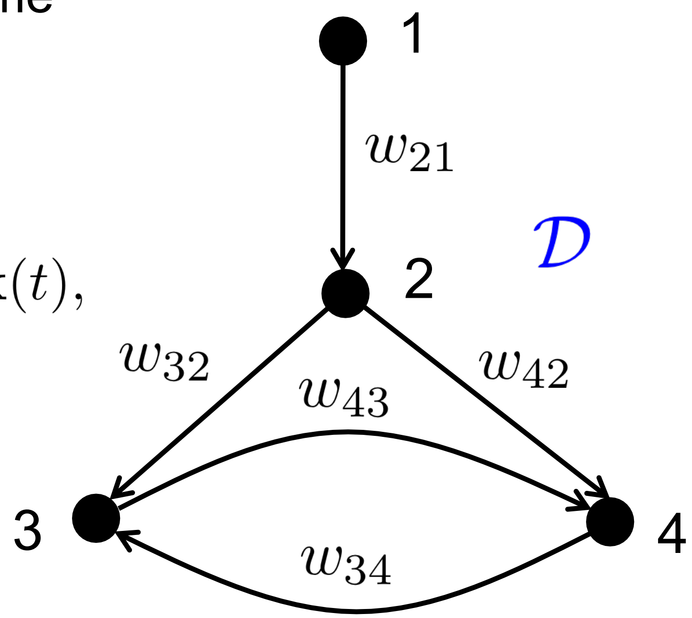


Protocole de consensus : graphes orientés

- Nous pouvons réécrire de façon compacte le système précédent comme suit :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_{21} & w_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -w_{32} & w_{32}+w_{34} & -w_{34} \\ 0 & -w_{42} & -w_{43} & w_{42}+w_{43} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

avec $\mathbf{x}(t) = [x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t),\, x_4(t)]^T$.



- Si on utilise la définition de matrice laplacienne pour des graphes orientés pondérés (avec degré entrant), on peut réécrire les dynamiques du réseau de la façon suivante :

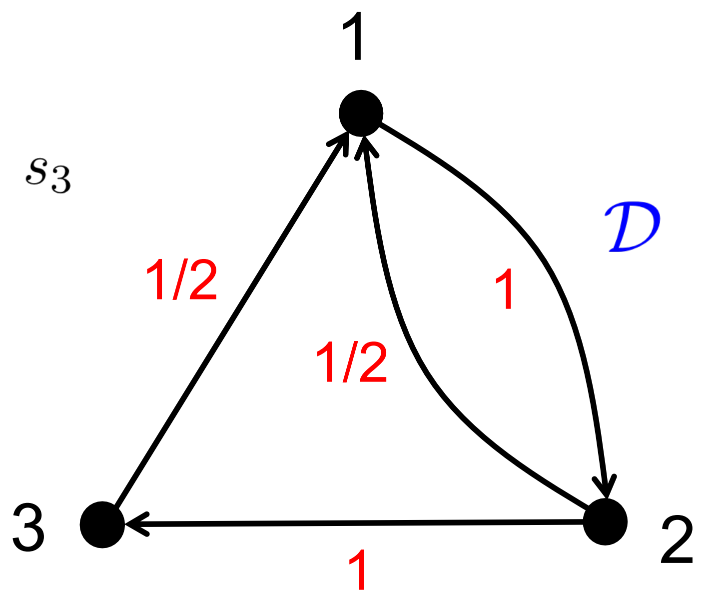
$$\dot{\mathbf{x}}(t) \;=\; -\mathbf{L}(\mathcal{D})\,\mathbf{x}(t),$$

où $\mathcal{D}$ réprésente la connexion orientée entre les sommets

Protocole de consensus : graphes orientés

Un autre exemple:

- Trois robots coordonnent leurs *vitesses* $s_1,\ s_2,\ s_3$ selon la **chaîne de commande** montrée dans la figure
- On peut exprimer les dynamiques du système résultant comme suit :



$$\dot{s}_1(t) = \tfrac{1}{2}((s_3(t) - s_1(t)) + (s_2(t) - s_1(t))),$$

$$\dot{s}_2(t) = s_1(t) - s_2(t),$$

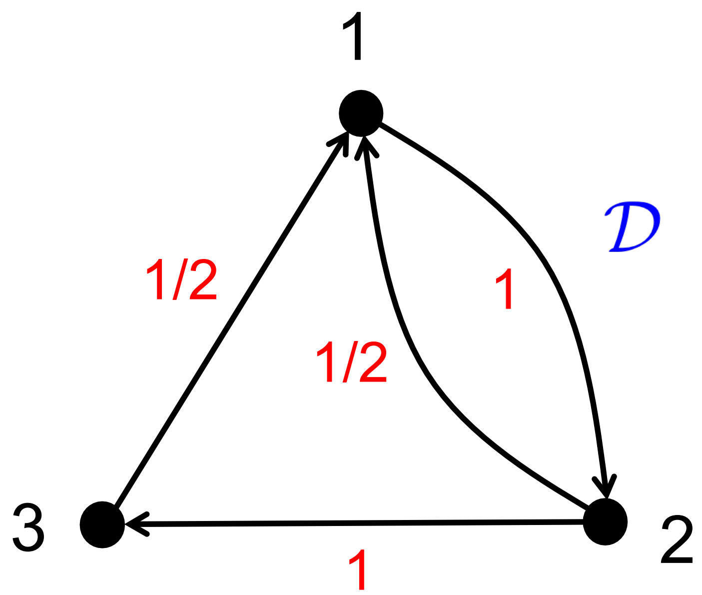
$$\dot{s}_3(t) = s_2(t) - s_3(t).$$

Protocole de consensus : graphes orientés

- Nous pouvons réécrire l'équation précédente de façon compacte comme :

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{s}(t),$$

avec $\mathbf{s}(t) = [s_1(t),\, s_2(t),\, s_3(t)]^T$.



- La matrice dans le système ci-dessus correspond à *moins* la matrice laplacienne (avec degré entrant) du réseau, ainsi :

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D})\,\mathbf{s}(t),$$

où $\mathcal{D}$ est le graph orienté pondéré qui décrit la chaîne de commande

Vers le consensus : graphes orientés

- Y a-t-il des conditions *nécessaires* et *suffisantes* sur le graphe orienté $\mathcal{D}$ qui garantissent la convergence du système $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D})\,\mathbf{x}(t)$ vers l'ensemble de consensus $\mathcal{A}$?
- Comme pour les graphes non orientés, le **rang** de la matrice laplacienne et sa relation avec la structure du graphe, joue un rôle important

---

Nous avons besoin d'une notion qui correspond à celle d'**arbre couvrant** pour un graphe non orienté. Pour cela, on introduit la définition suivante :

Définition (*Arbre orienté enraciné* ou *graphe enraciné à ramification sortante*)

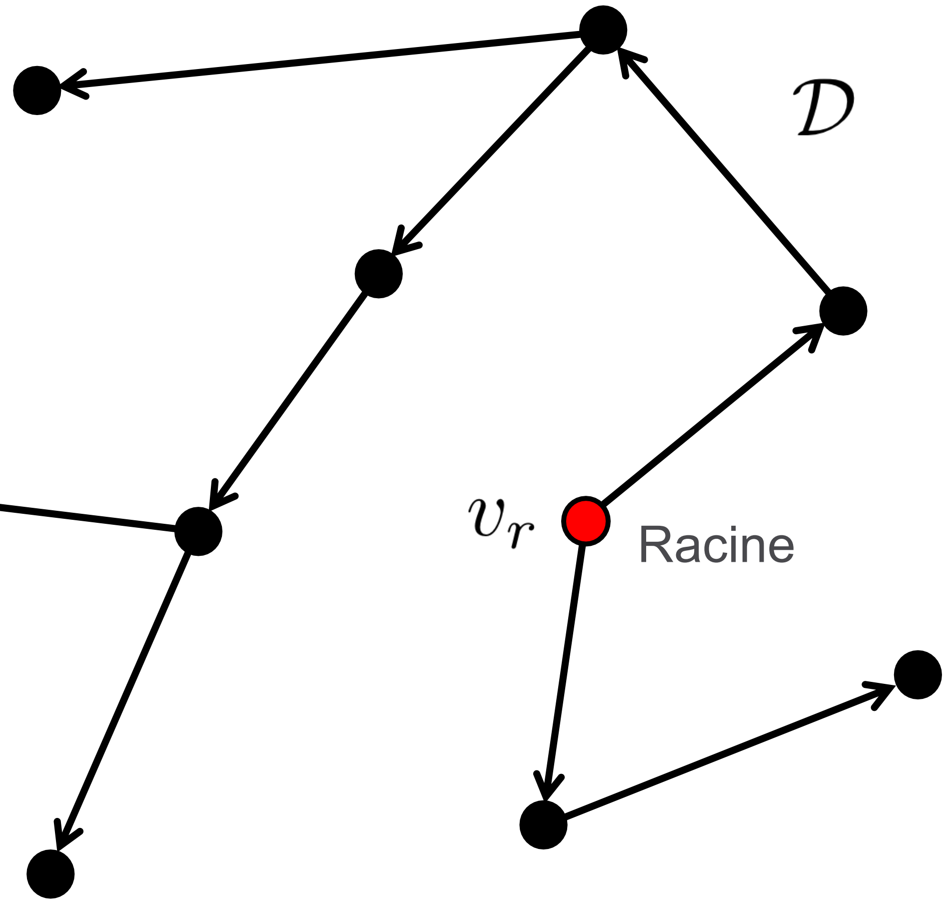
Un graphe orienté $\mathcal{D}$ est un *arbre orienté enraciné*, si :

a) Il ne contient pas de *cycles* (*circuits*) *orientés*

b) Il existe un sommet v_r (*racine*) qui a la proprieté suivante : pour tous les autres sommets $v \in V$, il existe un chemin orienté de v_r à v

Vers le consensus : graphes orientés

Exemple d'*arbre orienté enraciné*



Vers le consensus : graphes orientés

Proposition :

Un graphe orienté $\mathcal{D}$ avec n sommets contient un *arbre orienté enraciné* comme sous-graphe si et seulement si :

$$\mathrm{rank}(\mathbf{L}(\mathcal{D})) = n - 1$$

Rappel :

Le vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ est un *vecteur propre à gauche* associé à la valeur propre λ de la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si :

$$\mathbf{M}^T \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

Exemple :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres de $\mathbf{M}$:

$\{1,\, 3,\, 4\}$

Vecteurs propres (normalisés) à droite de $\mathbf{M}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5547 \\ 0.8321 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vecteurs propres (normalisés) à gauche de $\mathbf{M}$

$$\begin{bmatrix} 0.8018 \\ -0.5345 \\ -0.2673 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Vers le consensus : graphes orientés

Théorème (*Consensus pour graphes orientés*)

Pour un graphe orienté $\mathcal{D}$ contenant un *arbre orienté enraciné*, la trajectoire d'état générée par $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D})\,\mathbf{x}(t)$ avec condition initiale $\mathbf{x}_0$, satisfait :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \;=\; (\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1^T)\,\mathbf{x}_0,$$

où $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{q}_1$ sont respectivement, les *vecteurs propres à droite* et à *gauche* associés à la valeur propre zéro de $\mathbf{L}(\mathcal{D})$, normalisés tels que $\mathbf{p}_1^T\mathbf{q}_1 = 1$.

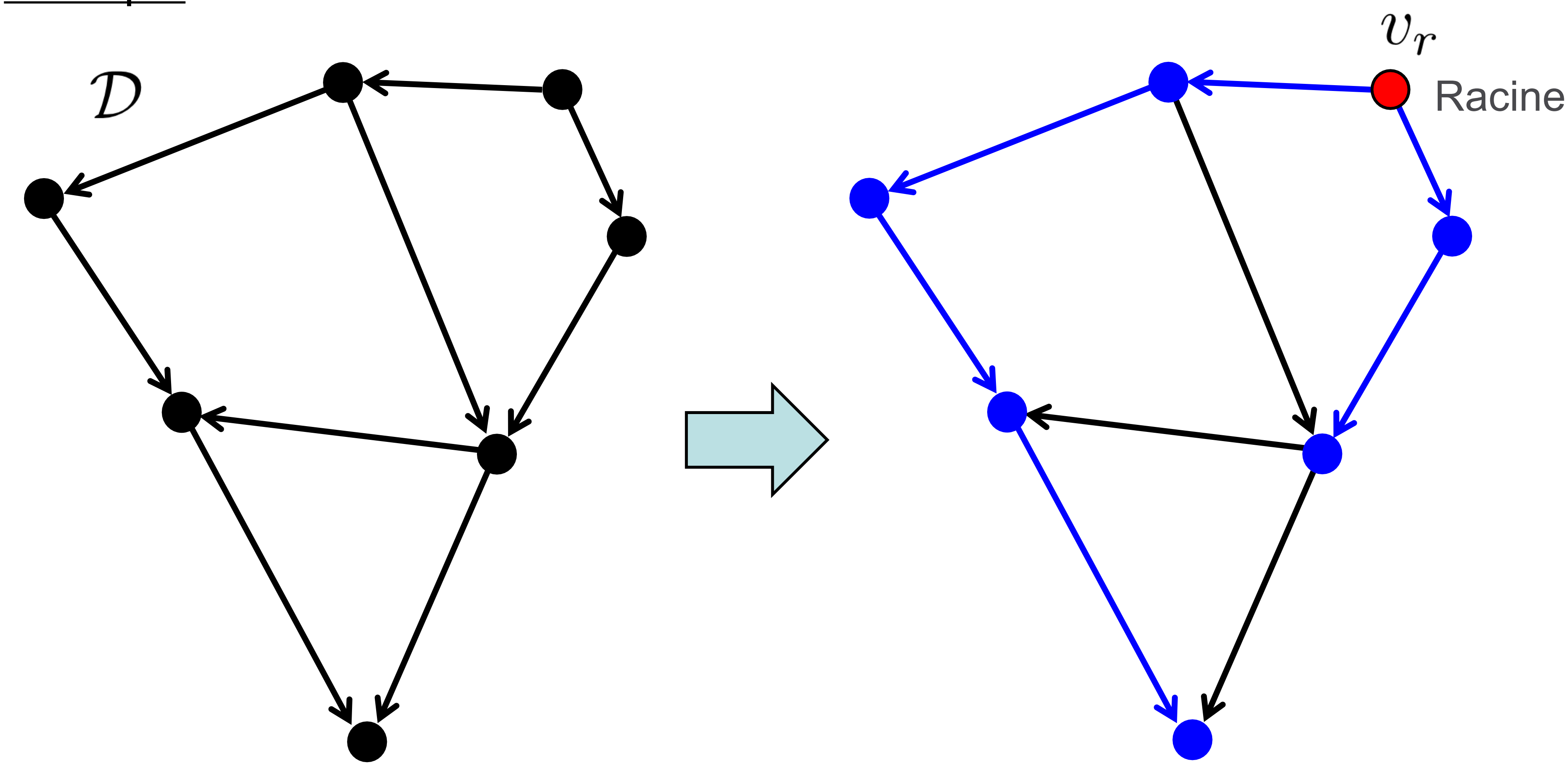
Par conséquent, nous avons que

$$\mathbf{x}(t) \;\longrightarrow\; \mathcal{A}$$

pour toute condition initiale $\mathbf{x}_0$ si et seulement si $\mathcal{D}$ contient un *arbre orienté enraciné*

Vers le consensus : graphes orientés

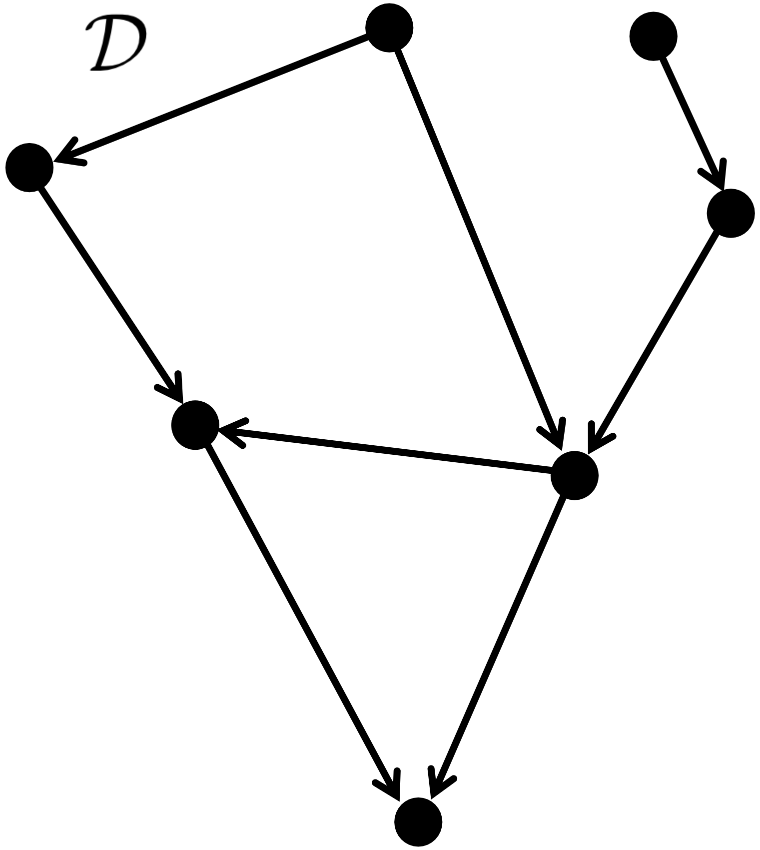
Exemple :



$\mathcal{D}$ contient un *arbre orienté enraciné* (bleu). Il n'est pas unique

Vers le consensus : graphes orientés

Exemple :



$\mathcal{D}$ ne contient pas un arbre orienté enraciné

Pas de consensus !

Consensus avec digraphes : remarque

Proposition (*Constante de mouvement*)

Soit $\mathbf{q}_1$ le *vecteur propre à gauche* associé à la valeur propre zéro de la matrice laplacienne (avec degré entrant) d‘un digraphe $\mathcal{D}$.

Alors la quantité suivante :

$$\frac{1}{n}\,\mathbf{q}_1^T\mathbf{x}(t)$$

reste **inchangée** par rapport à la dynamique de consensus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D})\,\mathbf{x}(t).$$

Consensus *vs* consensus en moyenne

Remarque :

Le théorème précedent nous donne une condition *nécessaire* et *suffisante* pour que le système $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D})\,\mathbf{x}(t)$ parvient au consensus pour toute condition initiale $\mathbf{x}_0$: le digraphe $\mathcal{D}$ doit contenir un *arbre orienté enraciné*

Question :

Sous quelles conditions, on parvient à un **consensus en moyenne**, c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{x}_0$$

comme pour les *graphes non orientés* ?

Réponse :

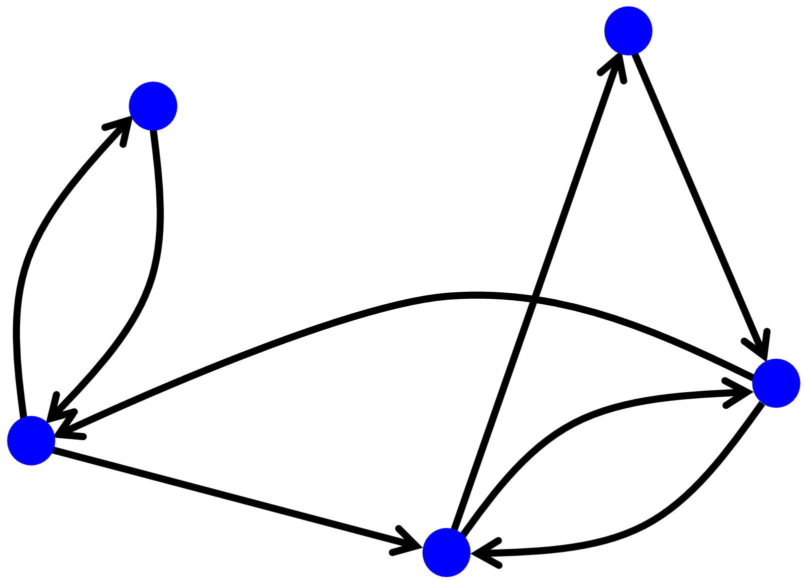
Il faut que $\mathcal{D}$ présente un certain ***degré de symétrie*** par rapport aux arcs orientés

Consensus *vs* consensus en moyenne

Définition (*Digraphe balancé*)

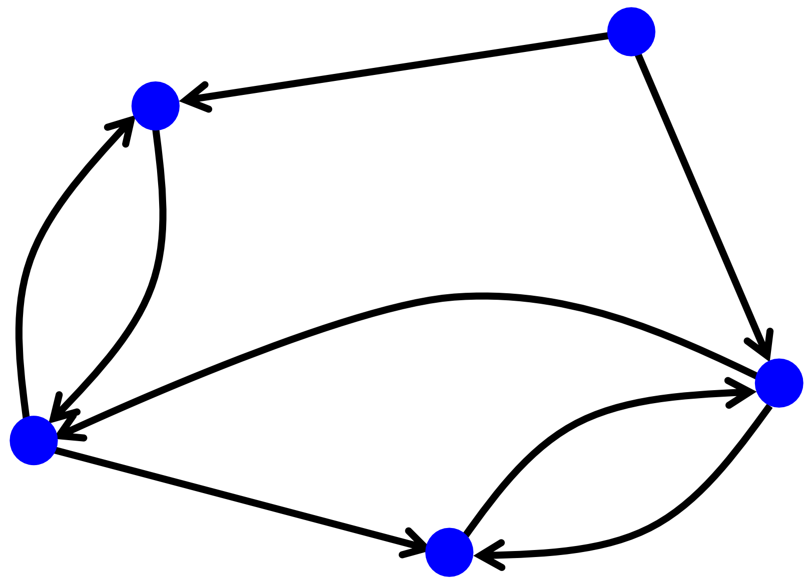
On dit que un digraphe $\mathcal{D}$ est **balancé** si, pour chaque sommet, le *degré entrant* et le *degré sortant* sont identiques

Exemple (Digraphes non pondérés) :



Digraphe balancé

degré entrant = degré sortant

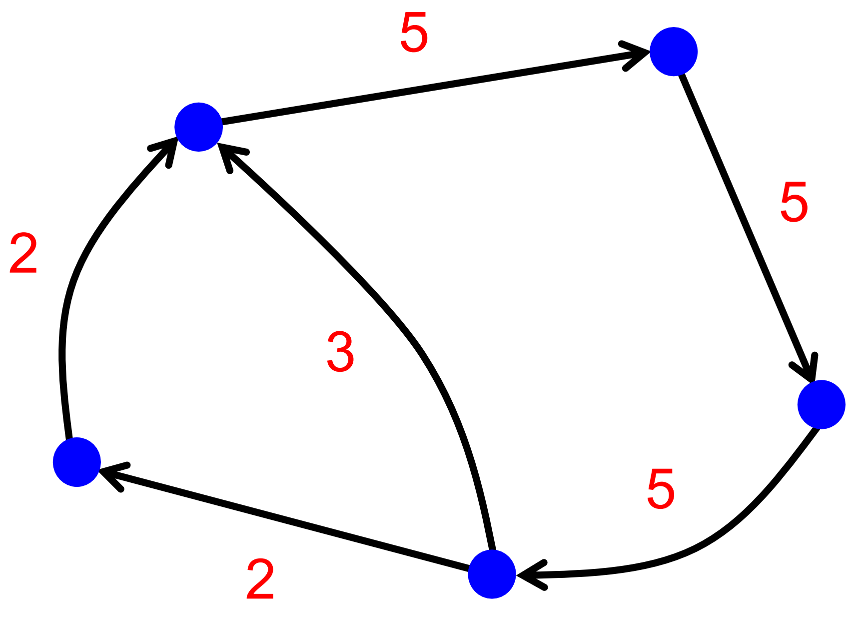


Digraphe non balancé

degré entrant ≠ degré sortant

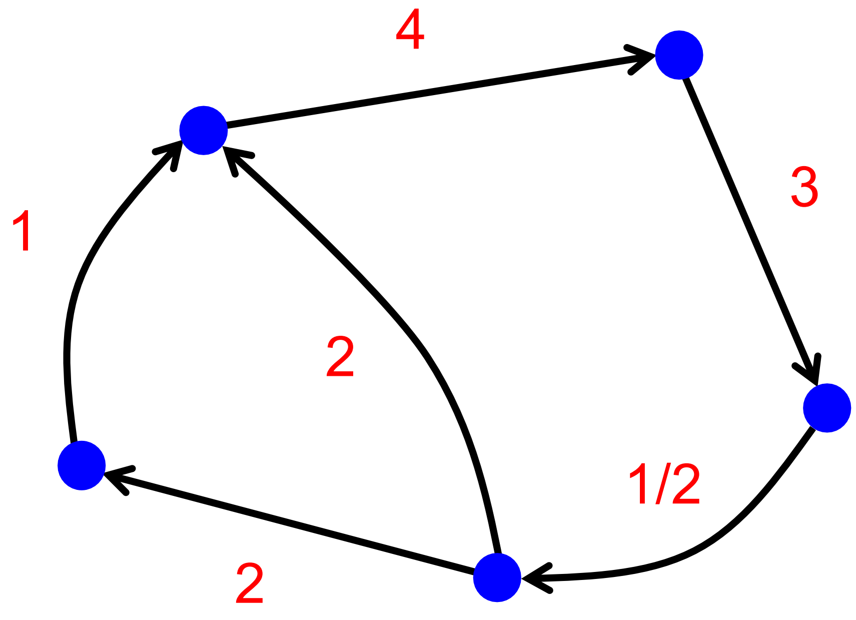
Consensus *vs* consensus en moyenne

<u>Exemple</u> (Digraphes pondérés) :



Digraphe balancé

degré entrant = degré sortant



Digraphe non balancé

degré entrant ≠ degré sortant

Consensus *vs* consensus en moyenne

Si le digraphe est **balancé**, en plus de $\mathbf{L}(\mathcal{D})\,\mathbf{1} = \mathbf{0}$ nous avons aussi la propriété que la somme des éléments sur chaque *colonne* de $\mathbf{L}(\mathcal{D})$ est zéro

$$\mathbf{1}^T\,\mathbf{L}(\mathcal{D}) = \mathbf{0}^T$$

à savoir

$$\mathbf{q}_1 \;=\; \mathbf{1}$$

Donc, si le digraphe contient un arbre orienté enraciné et il est balancé, le protocole de consensus converge vers une valeur commune qui correspond à la moyenne des états initiaux. On parvient au **consensus en moyenne**, car :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \;=\; \frac{1}{n}\,\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{x}_0.$$

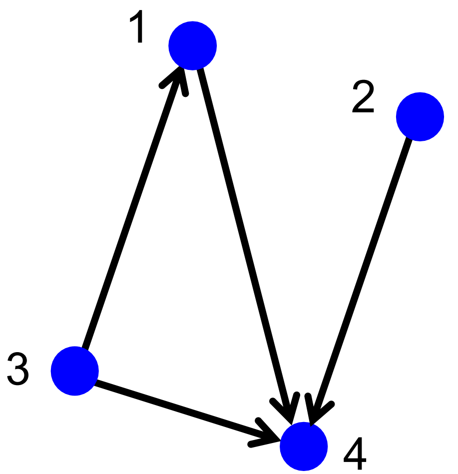
Consensus *vs* consensus en moyenne

Théorème

Le protocole $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}(\mathcal{D})\,\mathbf{x}(t)$ parvient au *consensus en moyenne* pour toute condition initiale $\mathbf{x}_0$ si et seulement si le digraphe $\mathcal{D}$ est **faiblement connexe** et **balancé**

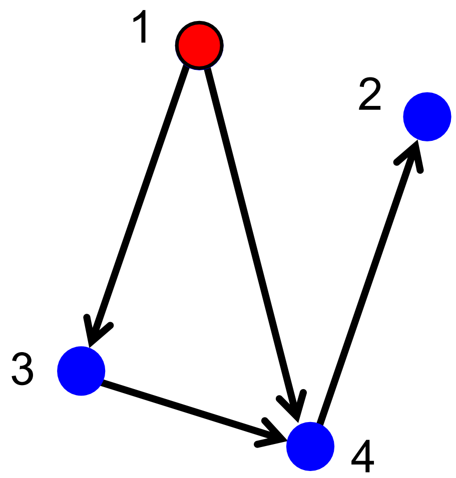
Exemples :

a)



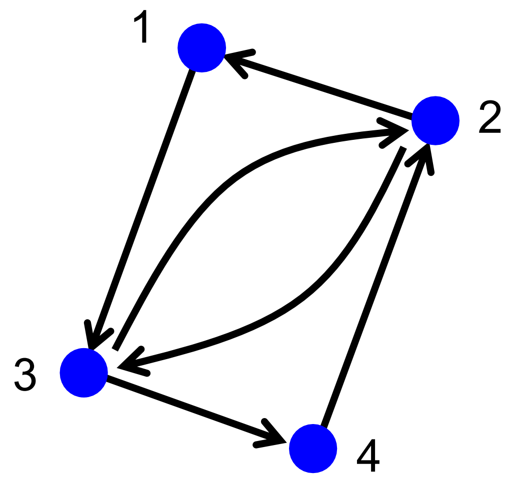
Pas de consensus

b)



Consensus

c)



Consensus en moyenne