UTILISATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES DANS DES PROBLÈMES COMBINATOIRES

FABIEN DURAND

Dans ce cours nous allons détailler les preuves de deux théorèmes : Le théorème de van der Waerden (1927) et le Théorème de Cobham (1969). En voici les énoncés.

Théorème de van der Waerden, 1927.
Soit $C_1, C_2, \dots, C_a$ *une partition finie de* $\mathbb{N}$. *Alors il existe* $i \in \{1, \dots, a\}$ *tel que dans* C_i *apparaissent des progressions arithmétiques arbitrairement longues, c'est à dire : Pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *il existe deux entiers* d *et* $p \neq 0$ *tels que*

$$d + np \in C_i \text{ pour tout } n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Théorème de Cobham, 1969.
Soit $E \subset \mathbb{N}$. *Soient* $p, q \geq 2$ *deux entiers positifs multiplicativement indépendants. Alors,* E *est* p*-reconnaissable et* q*-reconnaissable si et seulement si* E *est l'union finie de progressions arithmétiques.*

Ces résultats ont plusieurs points communs. Ils sont de nature arithmético-combinatoire. Les premières preuves qui en furent données étaient combinatoires. Par la suite d'autres preuves ont été trouvées. A plus d'un égard, les plus satisfaisantes sont de nature "dynamiques" : un codage du problème permet de se ramener à l'étude du décalage sur un ensemble de suites bien choisi.