



CHANTIER SCIENTIFIQUE DE NOTRE-DAME DE PARIS

Élise Baillieu,
Antoine Gros

LES CLAVEAUX DE L'ARC EFFONDRE DE LA NEF, SUJET DE COLLABORATION POUR TROIS MÉTHODES CONTEMPORAINES D'ANASTYLOSE

Chantier scientifique de Notre-Dame de Paris,
Groupes de travail "Pierre" & "Écosystème numérique"

FSP-Repérage

Responsables : Livio de Luca (MAP), Antoine Gros (MAP)

Partenaires : Dorothee Chaoui-Derieux (SRA), Anaïs Guillem (FSP), Lise Leroux (LRMH), Olivier Malavergne (LRMH), Pascal Prunet (MOE), Thierry Zimmer (LRMH).

Collaborateurs : Élise Baillieu (UMR 8529-IRHiS), Cédric Moulis (EA1132-Hiscant-MA), Bruno Phalip (Université Clermont-Auvergne) du GT Pierre

Partenariat UMR3495-MAP/LRMH/SRA-DRAC avec le financement de la Fondation des Sciences pour le Patrimoine.

GT-Pierre, Projet "Voûtes"

Elise Baillieu (IRHiS – UMR 8529), Marine Bacquet (IJL – UMR 7198), Yves Gallet (Ausonius – UMR 5607), Andreas Hartmann-Virnich (LA3M – UMR 7298), Lise Leroux (LRMH – USR 3224), Jean-Michel Mechling (IJL – UMR 7198), Cédric Moulis (HisCant-MA – EA 1132), Dylan Nouzeran, Bruno Phalip (CHEC – USR 3550), Arnaud Ybert (CRBC – EA 4451)





SOMMAIRE:

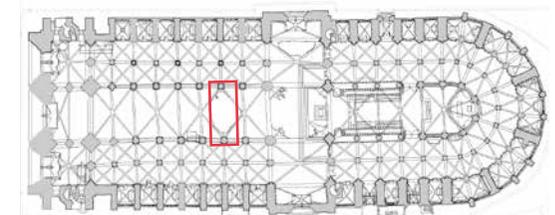
- I. COLLECTION LAPIDAIRE, DES PIERRES & DES CLAVEAUX**
- II. ITINÉRAIRE ET DOCUMENTATION DE LA COLLECTION, DU DÉBLAIEMENT AU STOCKAGE**
- III. ÉTUDES ET RECHERCHES**
 - III.A. SUITE DES RECHERCHES DU GT PIERRE À L'INTÉRIEUR DE LA CATHÉDRALE**
 - III.B. LE PROBLÈME DE L'ARC EFFONDRE : L'ANASTYLOSE COMME UN PROBLÈME D'OPTIMISATION DISCRÈTE**



I.

**COLLECTION LAPIDAIRE,
DES PIERRES & DES CLAVEAUX**

*Rayonnage et pierres du dépôt lapidaire de la cathédrale Notre-Dame de Reims
(@Ministère de la Culture et de la communication)*



Au lendemain de l'incendie, la nef et le transept sont parsemés de débris et de vestiges provenant des voûtes et de la charpente. Parmi les restes calcinés de cette dernière, les éléments métalliques d'échafaudage ou d'assemblage, le lapidaire est constitué majoritairement des voussoirs et des claveaux qui composaient la croisée du transept et l'arc doubleau de la nef F29F30, effondrés tous deux. Tous ces éléments sont recouverts de la poussière de plomb issue de la toiture.

(wikipedia, press picture, plan du rdc et des voûtes par Philippe Villeneuve Architectes & Rémi Fromont Architectes)

Avant/Après

I. Collection lapidaire, des pierres & des claveaux



Le travail a porté sur **71 claveaux**, issu d'un arc en comportant **121** et dont **79** sont tombés au sol :

- Largeur: moy: 16.2cm | ecart-type: 3.4 | min: 10.2cm | max: 27.5
- État fragmentaire : 37
 - 1 angle détruit : 10
 - 2 angles détruits : 14
 - 3 angles détruits : 5
 - 4 angles détruits : 8
- Présentant des encoches : 25
- Dont la position de chute est Repérée : 32

Un aperçu de la collection lapidaire des claveaux de la nef, les modèles imprimés en 3d à l'échelle 1/20e de la mallette pédagogique (Mercurio 3d, 2021)

La collection lapidaire des claveaux

I. Collection lapidaire, des pierres & des claveaux



Travail sous le barnum dédié à la conservation des vestiges en pierre (Cédric Moulis, septembre 2020)



Vue orthographique du modèle 3d du claveau N1A depuis le relevé photogrammétrique produit par Mercurio (Antoine Gros, 2020)

Parmi les pierres de taille, les claveaux

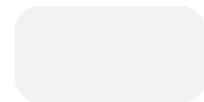
I. Collection lapidaire, des pierres & des claveaux



II.

ITINÉRAIRE ET DOCUMENTATION DE LA COLLECTION, DU DÉBLAIEMENT AU STOCKAGE

Légende



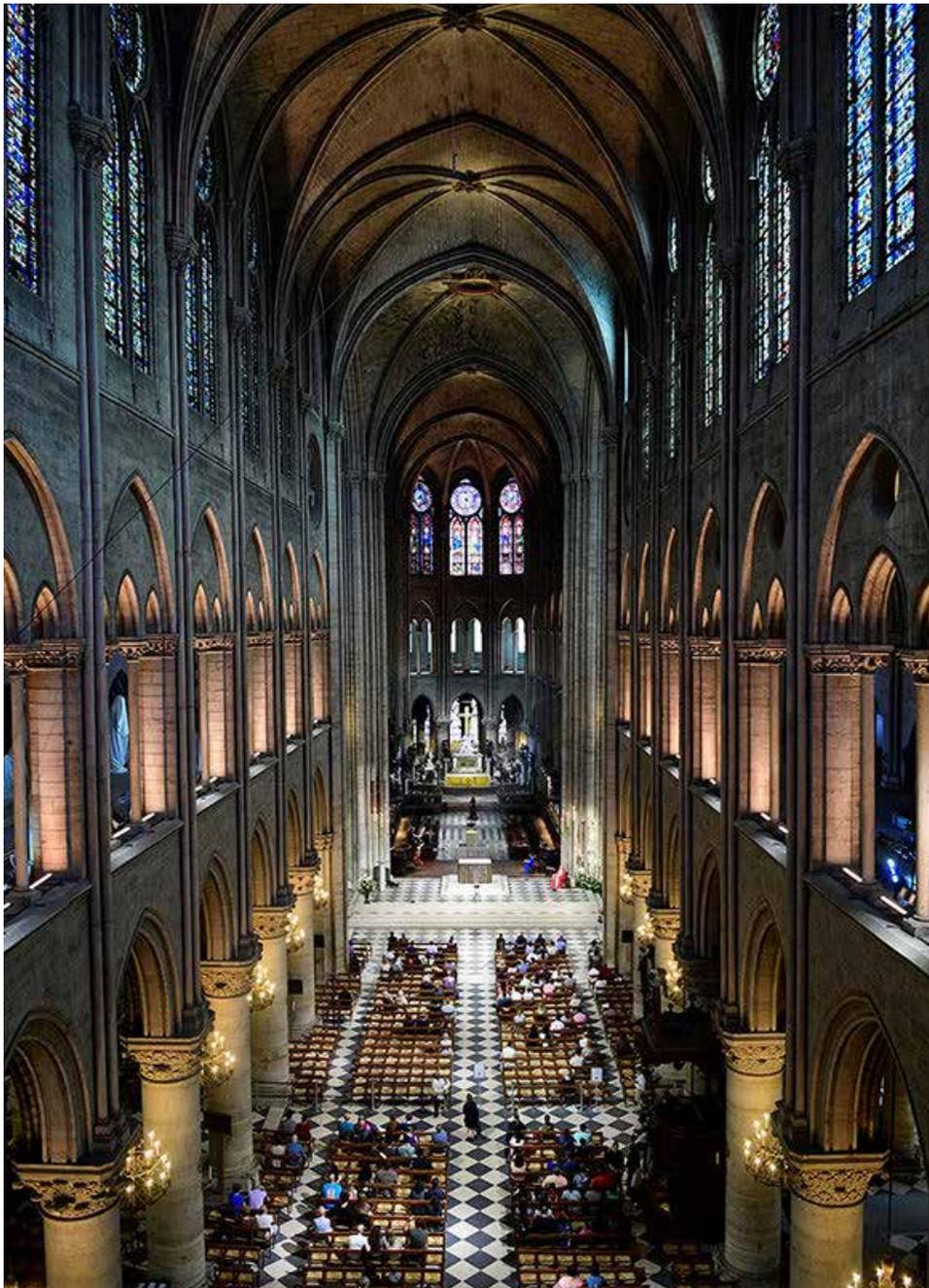
Position du claveau



Production
d'information



[REPERAGE]



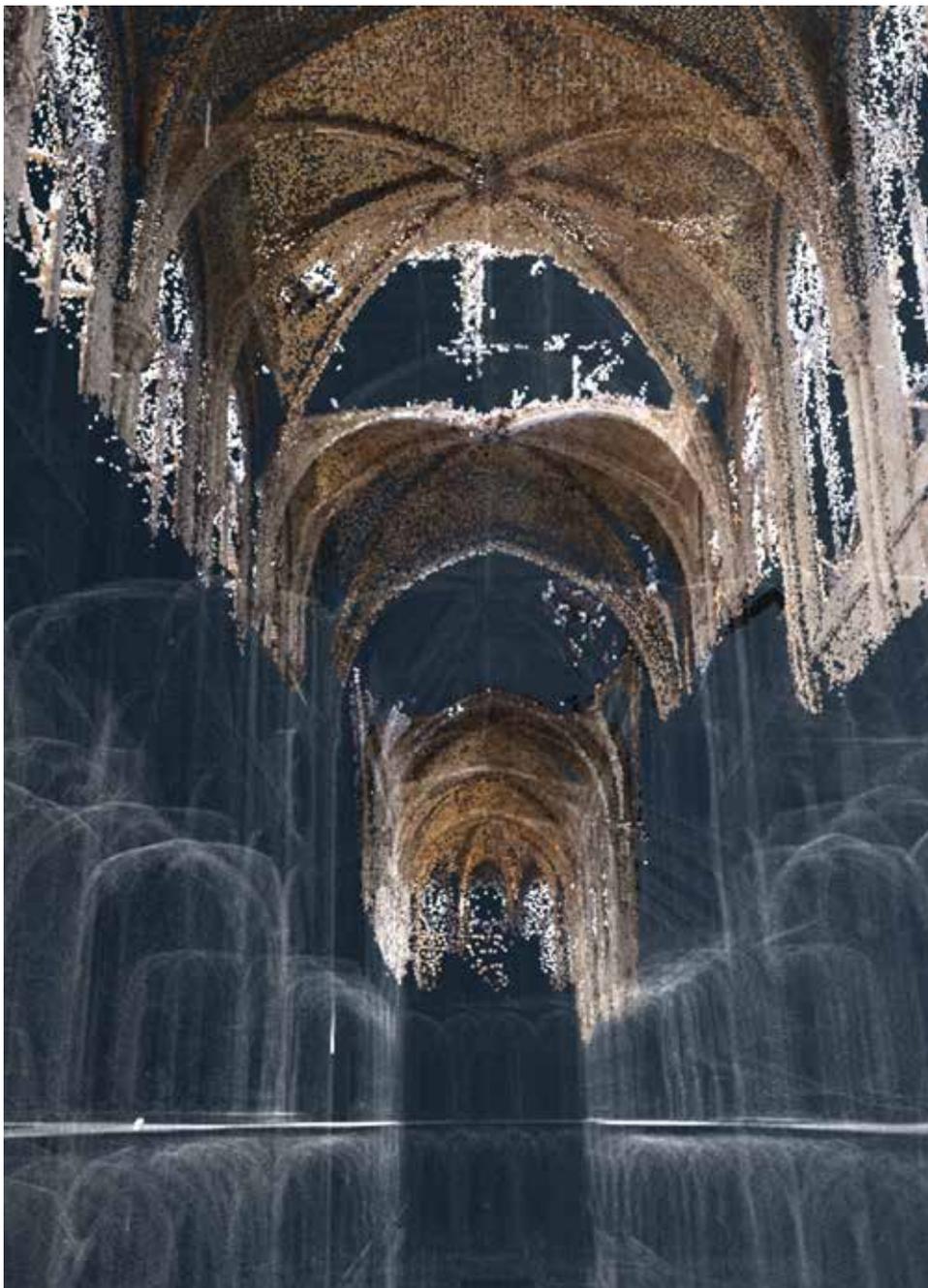
claveau en
élévation

La cathédrale Notre Dame de Paris est couverte par un ensemble de voûtes sexpartites élevées à 35m de haut et d'une voûte quadripartite faisant la croisée de transept.

(Wikipedia)

Claveau en élévation, au sein d'un des arcs doubleaux d'une sexpartite

II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



claveau en
élévation

relevé laser
(Tallon 2010)

Nuage de points 3D photogrammétrique de l'intrados des voûtes (nef et chœur) de la cathédrale Notre-Dame de Paris, après l'incendie du 15 avril 2019, réalisé par le groupe de travail (GT) "données numériques" à partir des photographies d'octobre 2019 de l'entreprise Bestrema.

Celui-ci est superposé au nuage de points 3D de l'intérieur de la cathédrale issu des campagnes de relevé lasergammétrique menées par Andrew Tallon (Vassar College) entre 2006 et 2012.

Cette capture est issue de l'environnement de visualisation interactive 3D développé par le laboratoire MAP dans le cadre du GT "données numériques" du chantier scientifique CNRS/Ministère de la culture pour la restauration de Notre-Dame de Paris. (Chantier Scientifique Notre-Dame de Paris / Ministère de la culture / CNRS, 2020)

Relevé lasergrammétrique d'Andrew Tallon

II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



claveau en
élévation

relevé laser
(Tallon 2010)

anastylose
numérique

Vue en isométrie du modèle 3d de l'arc F29F30 effondré, ajustée au plus proche du relevé Tallon en nuage de points (Antoine Gros, 2020)

Anastylose numérique, restitution paramétrique depuis le nuage de points 10
II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



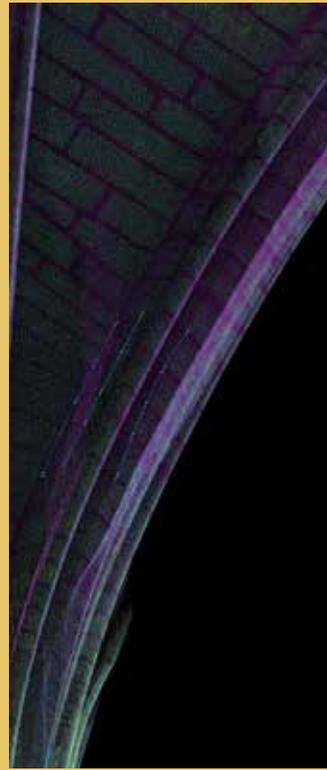
0. Nuage de points



1. Sélection de points (manuel)



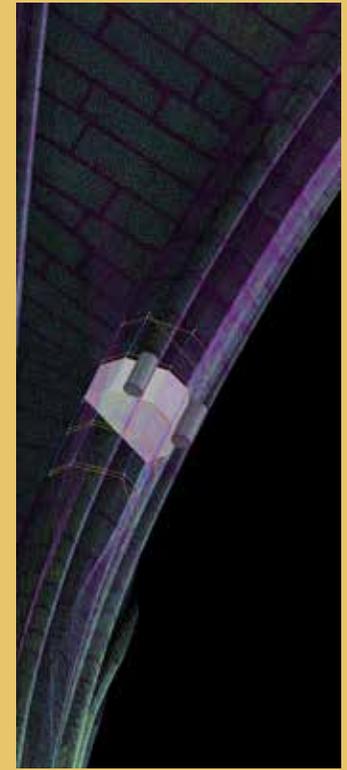
2. Dessin des directrices de l'arc comme polygones



3. Ajustement des polygones comme splines sur le nuage de points

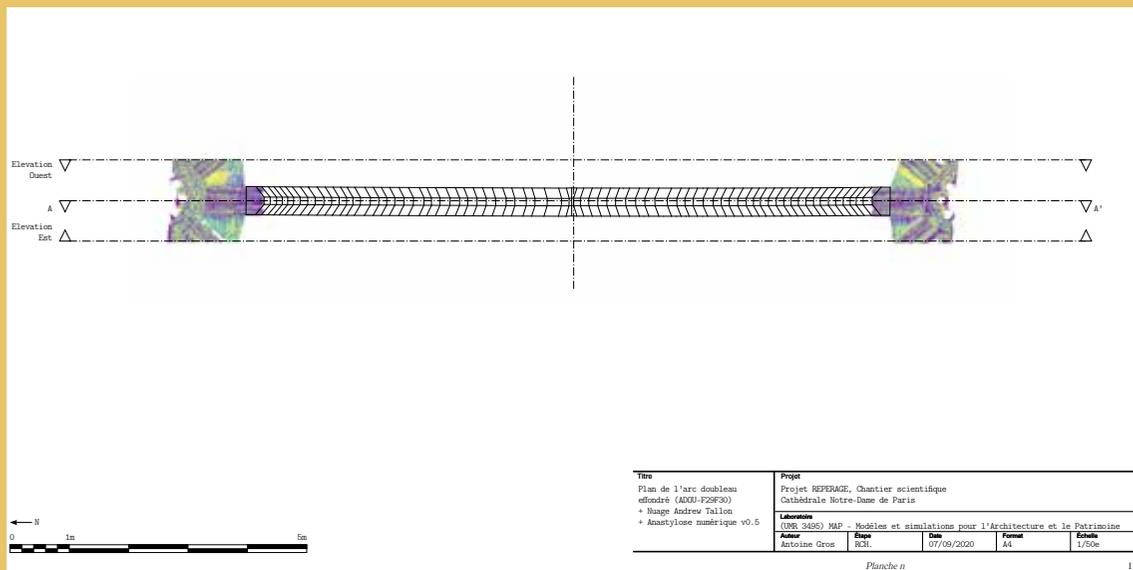
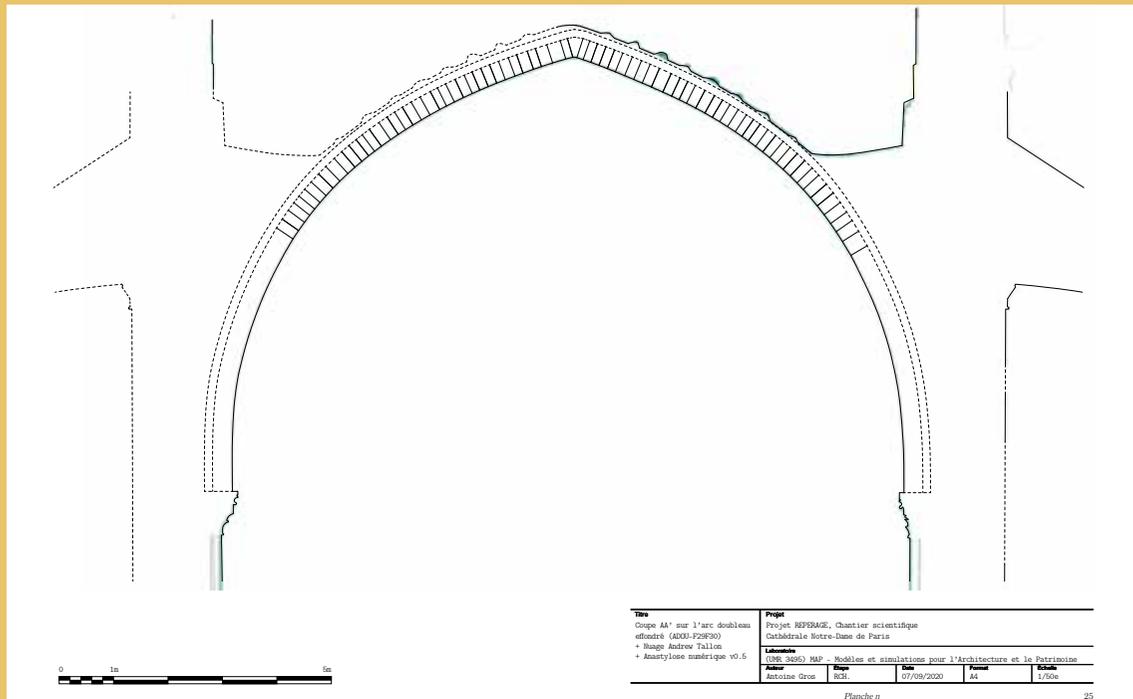


4. Dessin des génératrices



5. Modélisation d'un claveau

Dessin d'un claveau ajusté au nuage en 5 étapes (Antoine Gros, 2020)



Vue et en plan et en coupe de l'arc dans (Antoine Gros, 2020)



claveau en
élévation

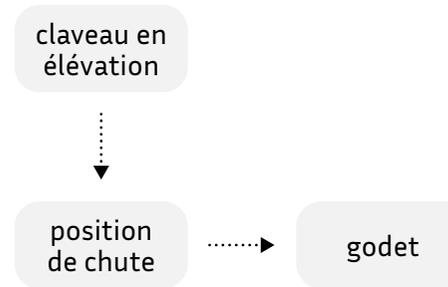


position
de chute

Les claveaux des voûtes du transept et de la nef sont reconnaissables : ce sont des blocs en pierre de taille moulurés à l'intrados par deux tores encadrant une plate bande. Au moins cinq de leurs six faces sont dressées.

A terre, après la chute

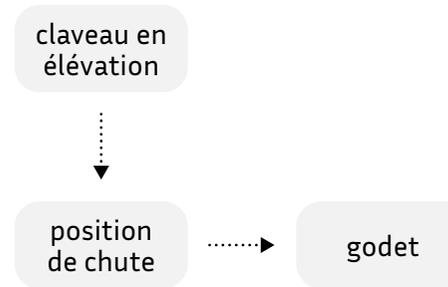
II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



Le périmètre intérieur sécurisé, le déblaiement de la nef est mené par trois machines radio-pilotées, godet par godet, aire par aire, strate par strate, dans ce qui s'apparente à une fouille archéologique en accéléré.

Godet I : fouille radio-controlée

II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



Chaque godet est numéroté, son contenu est versé sur un tapis de tri. Plusieurs institutions se côtoient autour de ce dernier, et leurs représentants se relaient : la police scientifique, la SRA-DRAC, le LRMH et l'INRAP. Les premiers cherchent des pièces à conviction, les autres du matériel archéologique qui pourra servir le chantier de restauration et le chantier scientifique. Les gravats et autres éléments trop endommagés sont jetés.

Godet II : le tapis de tri

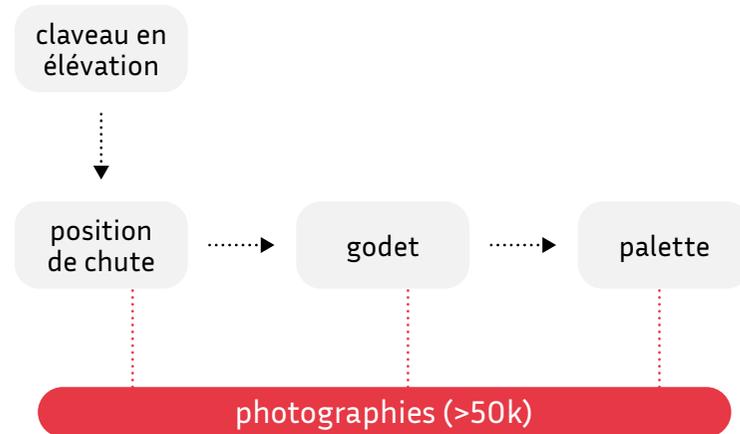
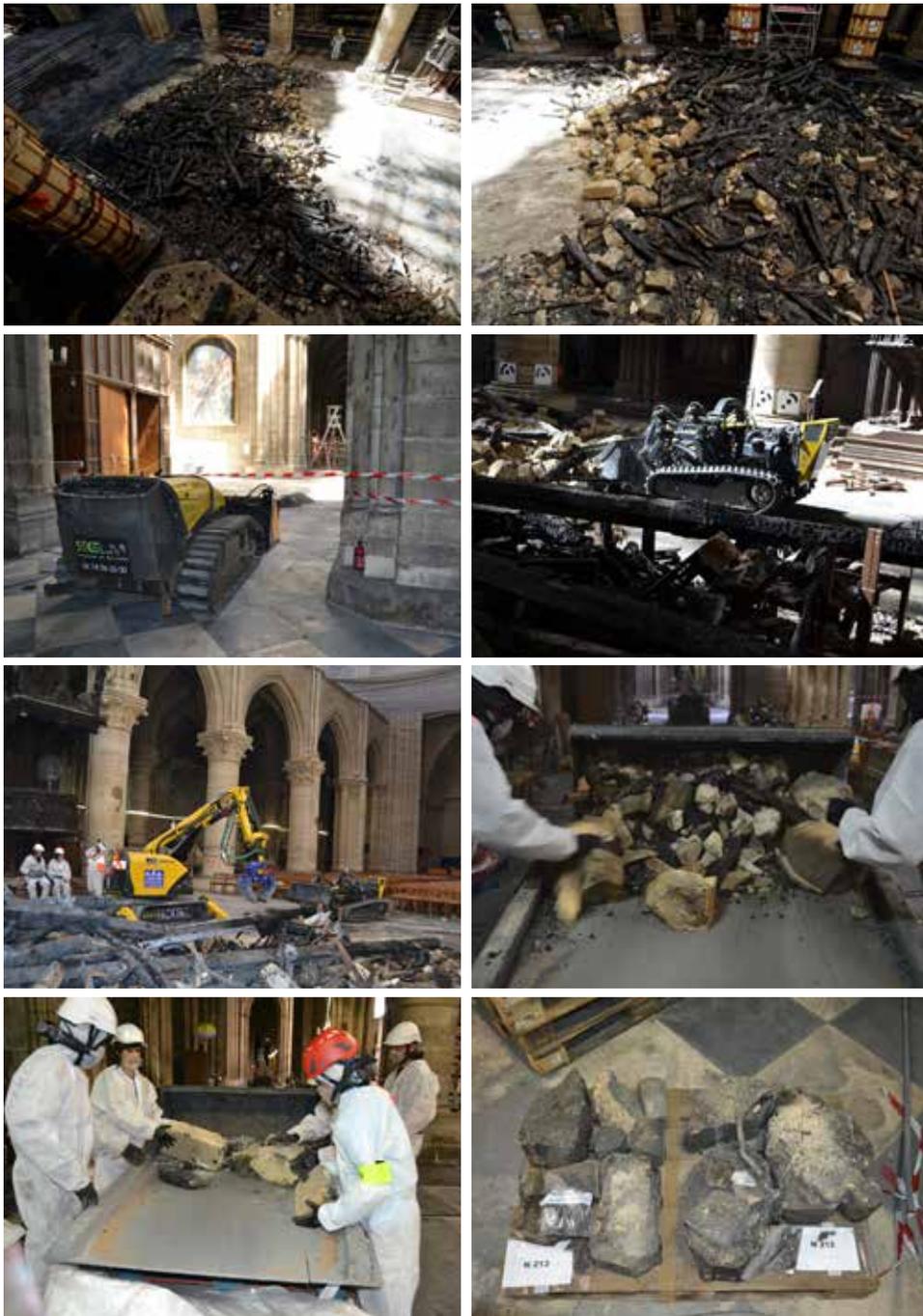
II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



Le matériel archéologique - les vestiges de la cathédrale - sont stockés sur des palettes selon le matériau et l'endroit d'extraction. Les numéros de godets sont indiqués, suivant le protocole "Tri-Godet" proposé par le LRMH.

Composition des palettes

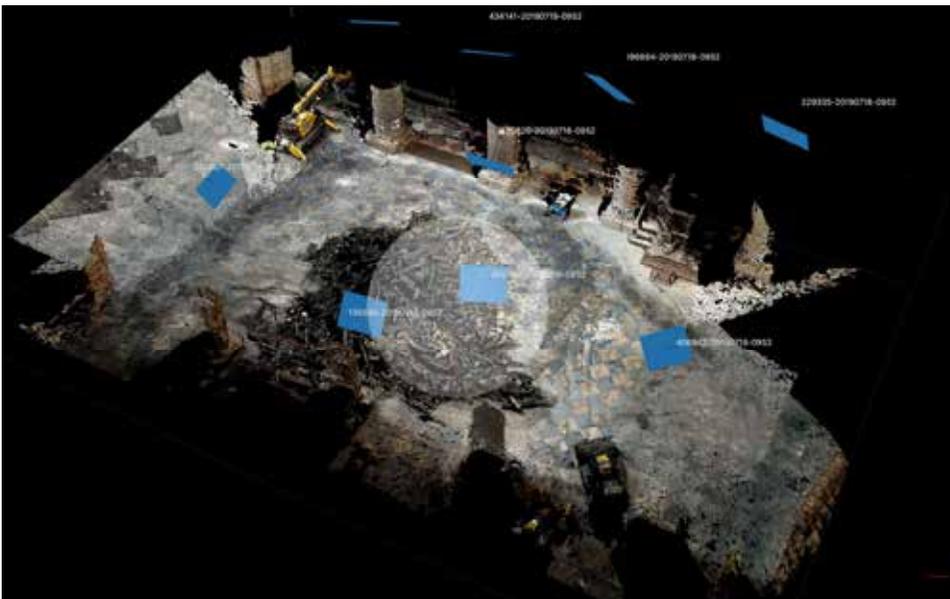
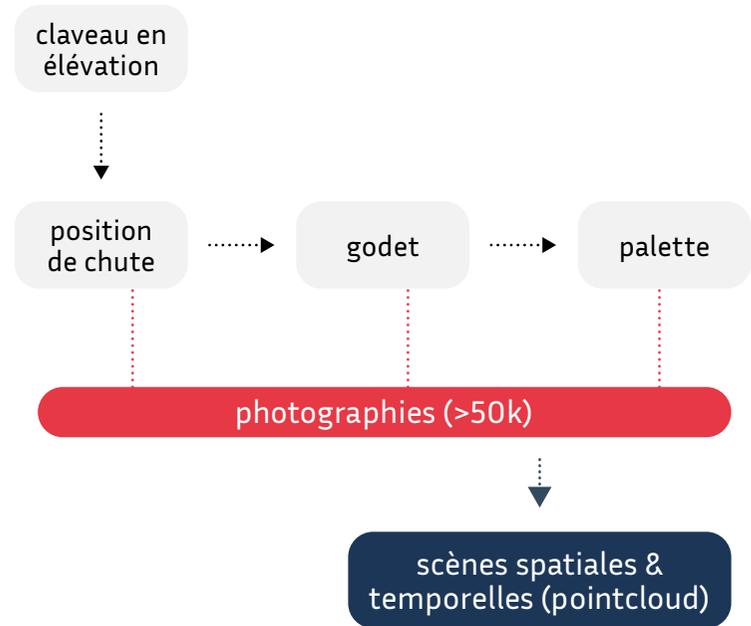
II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



Une couverture photographique extensive a été assurée depuis la chute du lapidaire jusqu'à la confection des palettes de vestiges triés. Plus de 50 000 clichés sont pris pour documenter le processus. Certaines collections sont systématiques telles celles du LRMH (>30k photos) ou de la SRA-DRAC (>10k), elles sont prises à des intervalles temporels absolus ou relatif à des moments remarquables lors du déroulé de la méthode : un godet arrive, une séance de travail fini... Les autres, provenant des individus sur site avec leur appareil photo personnel/smartphone sont disparates et produites avec des intentions reflétant cette diversité.

Couverture photographique

II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



Plusieurs photos d'un même objet ou d'un même espace, prises dans un même cadre temporel permettent de reconstituer une scène 3d photogrammétrique de cet objet ou cet espace.

La couverture photographique est complétée par la série de ces scènes spatiales et temporelles. Leur production est semi-automatique, c'est l'un des axes majeurs des projets de recherche REPERAGE et Clas-ter (SRA-DRAC, 2019 ; Livio de Luca, 2020)

Reperage claveaux NEF 07 juillet 2019

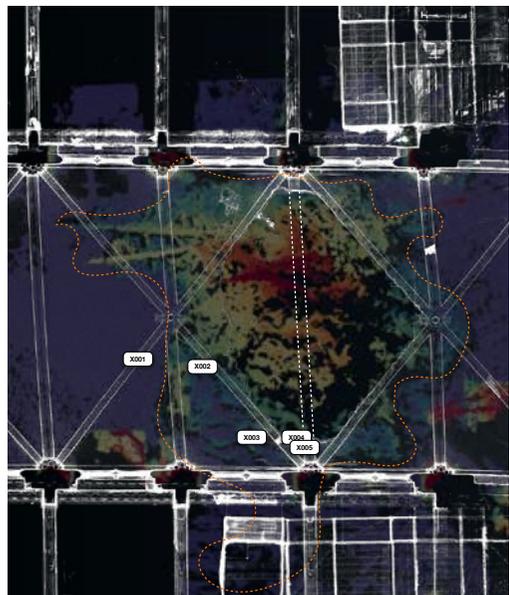


Image de REPERAGE	ID repérage	ID Identification	IMAGE Claveau Identifié
	X001	N12	
	X002	N16a	
	X003	N28	
	X004	N63a	
	X005	N63b	

Reperage claveaux NEF 16 juillet 2019

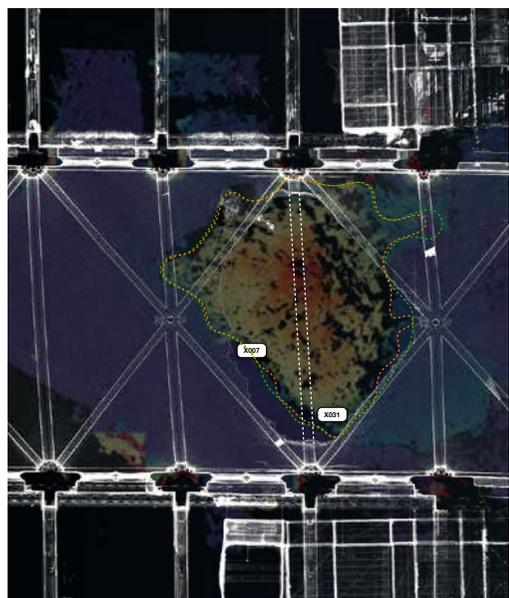
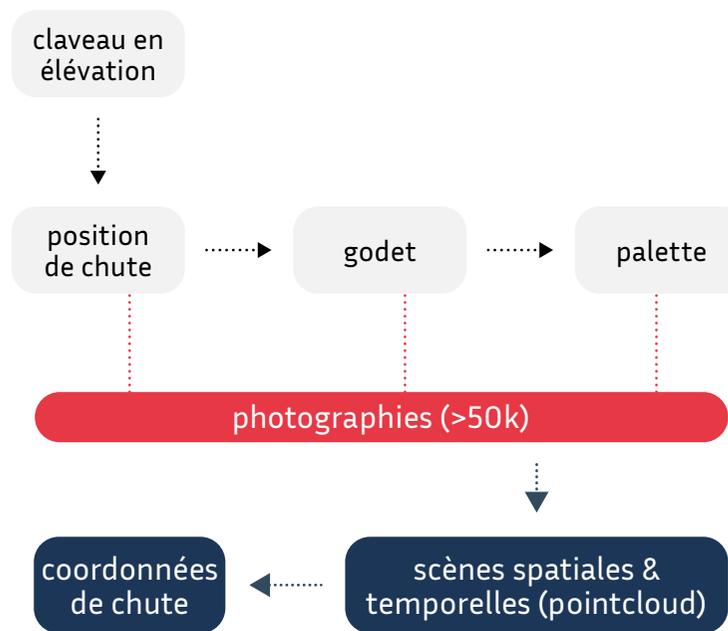
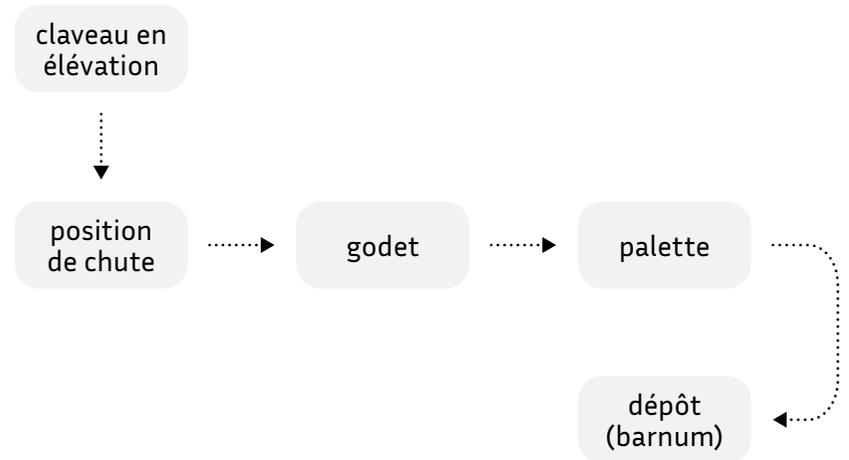


Image de REPERAGE	ID repérage	ID Identification	IMAGE Claveau Identifié
	X007	N114	
	X001	N119	

Chantier scientifique NDP. GT données numériques, Projet FSP Reperage



Ces scènes photogrammétriques sont des nuages de points colorés, en les superposant sur le relevé lasergrammétrique d'Andrew Tallon, nous pouvons retrouver la mesure ainsi que les coordonnées exacts des items à un moment donné (Livio de Luca, 2020)



(Antoine Gros, 2019)

Deposit of the lapidary under a barnum on the church square

II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



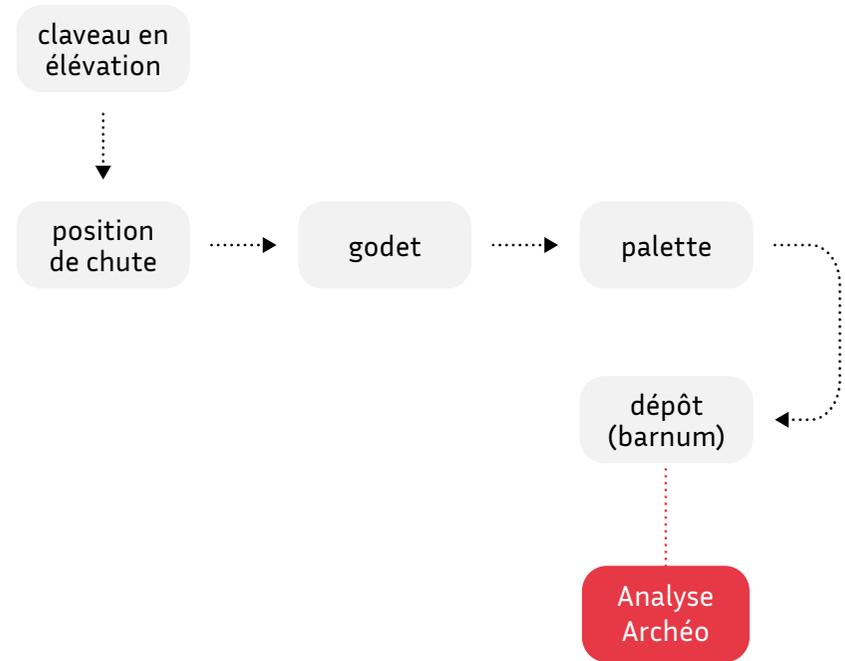
Claveau N326
(Cédric Moulis, 2020)



Claveau N210
(Cédric Moulis, 2020)



Claveau N1a
(Cédric Moulis, 2020)



Faces de contact : trois brettures différentes, avec des dents de 3, 4 et 5 mm. Taille oblique, en gerbe, chevron, croisée, désordonnée
Face extradossée : bretture, marteau taillant droit ou polka. Taille oblique, chevron, croisée, désordonnée
Éléments sculptés à la gradine et bretture fine utilisée perpendiculairement. Taille parallèle

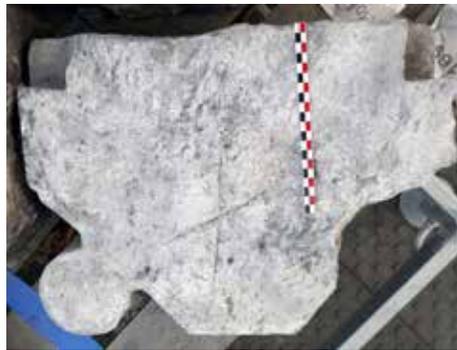
Claveau N28



Claveau N1D

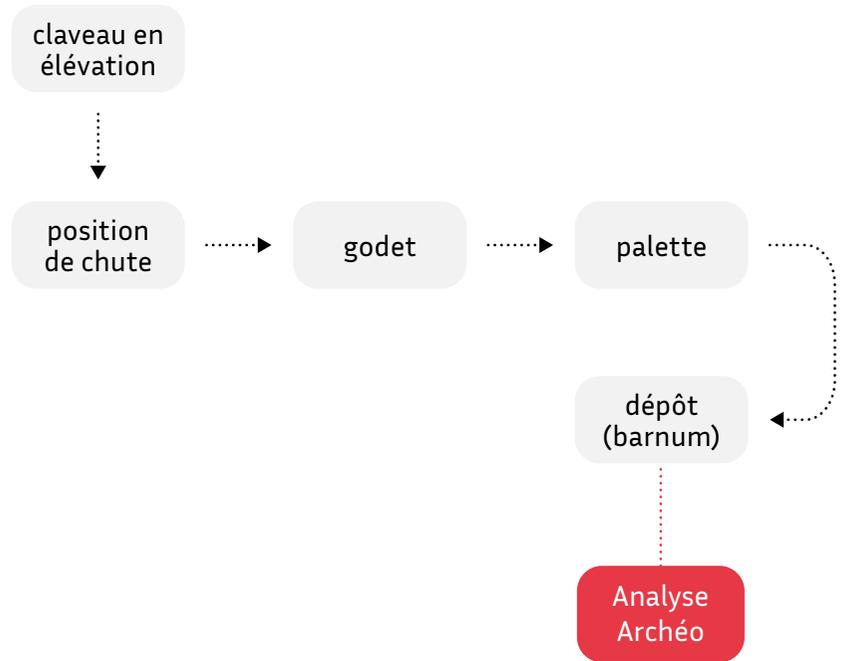


Claveau N319



Claveau N169a

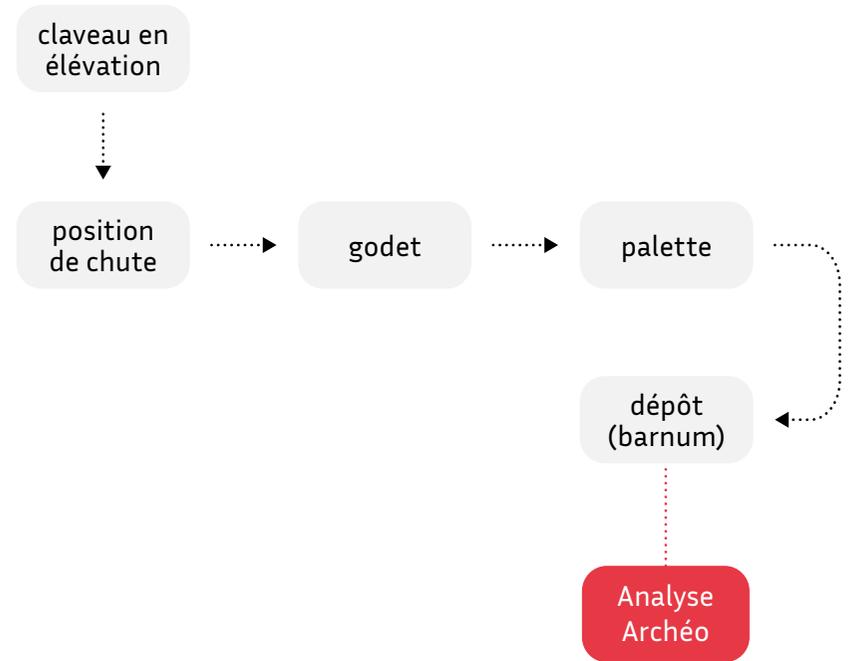
(Cédric Moulis, 2020)



Travail sur la typologie des croix de marquage : quatre types de croix identifiés, réalisées soit à la broche, soit à bretture, soit au ciseau.



(Cédric Moulis, 2020)



Découverte de la clef de l'arc

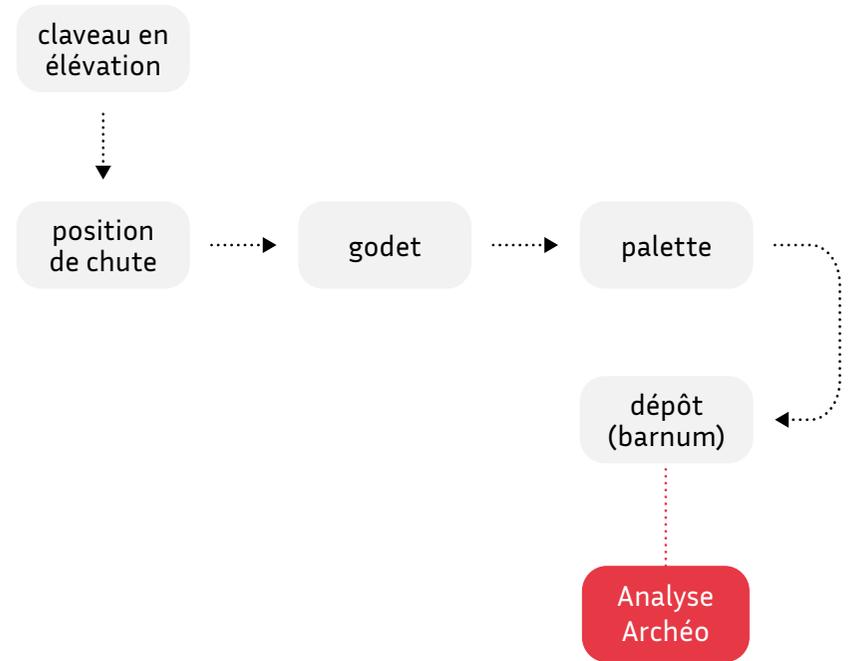
Brisure d'arc de 26°

Angle des faces de pose : 13°

Trois abreuvoirs sur chaque face de pose, en patte d'oie, avec chacun trois saignées

Analyse archéologique, clef de l'arc

II. Itinéraire et documentation de la collection, du déblaiement au stockage



Travail sur les encoches :

Encoches de 5 x 5 cm environ et dont la longueur varie

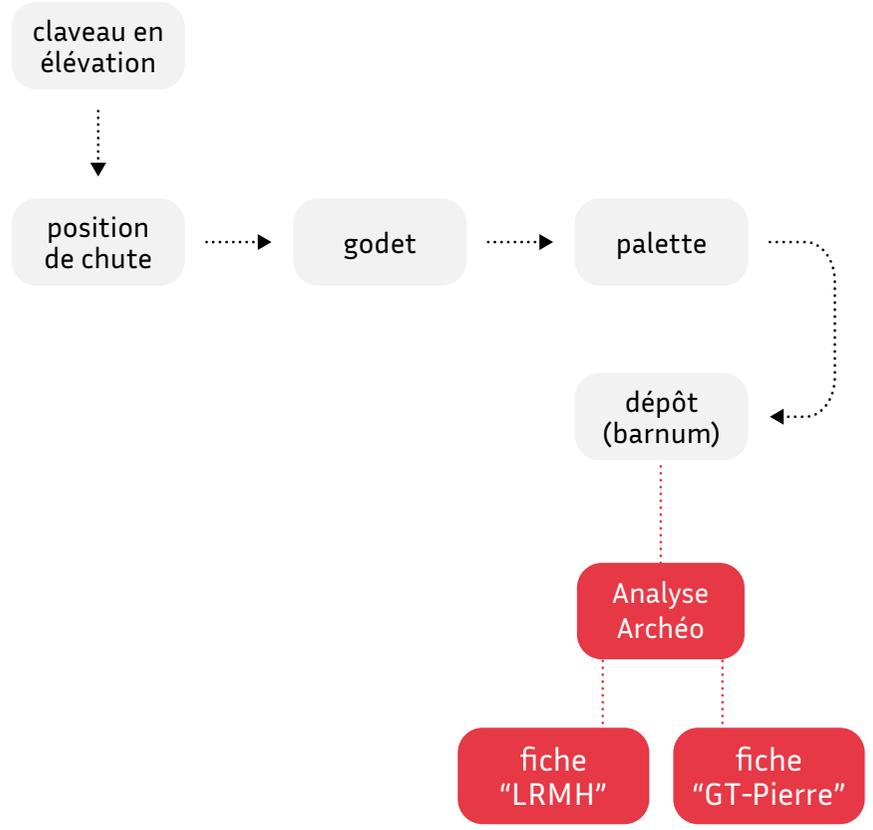
Taillées au ciseau ou à la bretture

(N169A. N34., Cédric Moulis)

Fiche descriptive Bloc

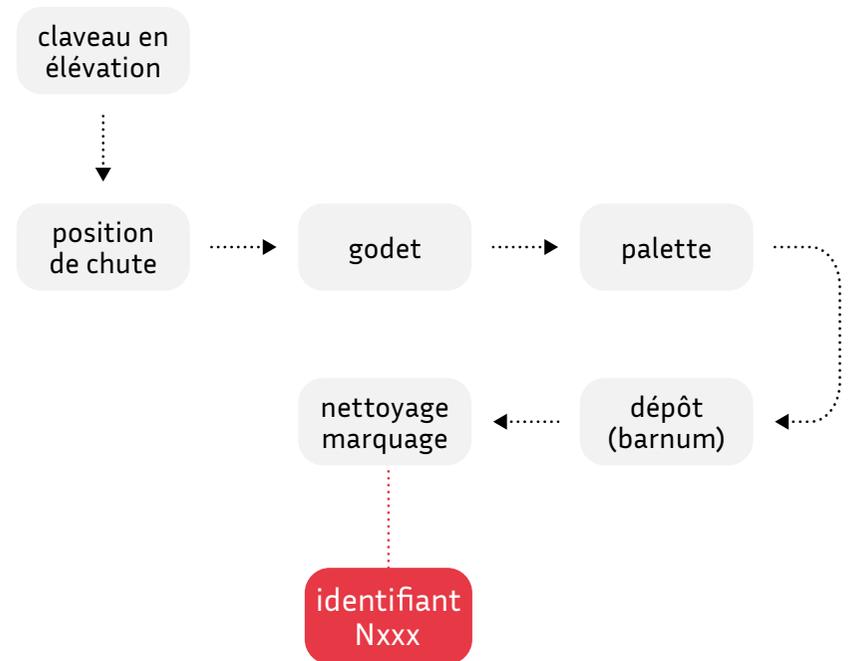
Rapport Claveaux GT Pierre - novembre 2020

Site Cathédrale Notre-Dame, Paris	Structure doubleau entre les travées 1 et 2 de la nef	N° d'inventaire N 1a	Lieu de conservation MOE 76 - rack 17
Fonction de la pierre <input checked="" type="radio"/> Claveau <input type="radio"/> Clef <input type="radio"/> Sommier <input type="radio"/> Voutain <input type="radio"/> Chapiteau <input type="radio"/> Autre :	Nature <input checked="" type="radio"/> Calcaire <input type="radio"/> Grès <input type="radio"/> Granite <input type="radio"/> Schiste <input type="radio"/> Marbre <input type="radio"/> Autre :	Aspect Couleur de la pierre : épiderme : entraille : blanc-beige Inclusions notoires : <input type="radio"/> Silex <input type="radio"/> Galets <input type="radio"/> Fossiles <input type="radio"/> Autres :	Géologie & Site possible <input type="radio"/> Lutétien sup. <input type="radio"/> Lutétien moy. <input type="radio"/> Val-de-Grâce <input type="radio"/> Cochin <input type="radio"/> Charrenton <input type="radio"/> Chaillot <input type="radio"/> Saint-Maur <input type="radio"/> Saint-Denis
Métriologie longueur : 47 cm largeur : 34,5 cm hauteur int : 15,5 cm hauteur ext : 16 cm courbure :	Traces de taille Equarissement : <input type="radio"/> Chasse <input type="radio"/> Pic <input type="radio"/> Tête <input type="radio"/> Polka Dégrossissage : <input type="radio"/> Pic <input type="radio"/> Broche <input type="radio"/> Ciseau (ciselure) larg. : Finition : <input type="radio"/> Laie <input checked="" type="radio"/> Bretture <input checked="" type="radio"/> Gradine <input type="radio"/> Grain d'orge <input type="radio"/> Boucharde <input type="radio"/> Ripe Orientation : <input checked="" type="radio"/> oblique <input type="radio"/> croisée <input type="radio"/> chevron <input checked="" type="radio"/> gerbe <input checked="" type="radio"/> désordonnée <input checked="" type="radio"/> parallèle Impacts : longueur : 8 cm trainée : > 10 mm nb de dents : 12 larg. dents : 4 mm latéralité : droite		
Signe lapidaire <input type="radio"/> Marque de tailleur / d'atelier <input type="radio"/> Marque de montage <input checked="" type="radio"/> Marque de pose <input type="radio"/> Marque de hauteur d'assise <input type="radio"/> Graffiti <input type="radio"/> Epure <input type="radio"/> Indéterminé	Levage <input type="radio"/> Trous de pince <input type="radio"/> Trou de louve <input type="radio"/> Tenons <input type="radio"/> Sans trace	Pose <input type="radio"/> Délit <input type="radio"/> Stigmates de pose	Scellement <input type="radio"/> Trou d'agrafe <input type="radio"/> Trou de goujon <input type="radio"/> Abrevoir <input type="radio"/> Mortier
Liant associé Nature <input type="radio"/> Mortier <input type="radio"/> Ciment <input type="radio"/> Joint sec <input type="radio"/> Autre : Couleur : Granulométrie : Pulvéulence :	Photo 		
Enduit initial <input checked="" type="radio"/> Non <input type="radio"/> Oui Décor : <input type="radio"/> Uni <input type="radio"/> Végétal <input type="radio"/> Faux joints <input type="radio"/> Autre <input type="radio"/> Indéterminé Composition : <input type="radio"/> Sable <input type="radio"/> Argile <input type="radio"/> Chaux <input type="radio"/> Charbon <input type="radio"/> Galet <input type="radio"/> Végétal <input type="radio"/> Terre cuite <input type="radio"/> Eclat de pierre <input type="radio"/> Incl. métalliques <input type="radio"/> Autre : Couleur de fond : Couleur du décor :	Décor sculpté <input type="radio"/> Feuille d'acanthé <input type="radio"/> Grotesque <input type="radio"/> Crochet <input type="radio"/> Animalier <input type="radio"/> Scène historiée <input type="radio"/> Héraldique <input checked="" type="radio"/> Autre : tore, méplat central		
Remploi <input checked="" type="radio"/> Non <input type="radio"/> Oui, fonction primaire fonction secondaire	Ragréage <input type="radio"/> Non <input checked="" type="radio"/> enduit : rubané rouge <input checked="" type="radio"/> Oui <input type="radio"/> outil :		
Observations Décor rubané rouge ajouté lors de restaurations le long de l'extrados et dans les gorges entre les tores et le méplat central. Surface visible traitée à la gradine et brettüre en frappe perpendiculaire ; surface enfouie dans la maçonnerie traitée à la brettüre. Taille en gerbe sur les faces de contact, axée sur un tore. Réalisation de la croix au ciseau. Deux encoches de part et d'autre du claveau pour fixer les cintres des voutains adjacents : 5,5 x 5,5 x 10 cm et 5,5 x 5,5 x 9 cm.			
Date de rédaction : 17 septembre 2020		Rédacteur(s) : Cédric Moulis, Bruno Phalip	



L'utilisation de formulaires d'inventaire standardisés appliqués à l'ensemble du lapidaire permet de créer un ensemble cohérent de données, propre à fournir une base de dialogue entre archéologues, historiens et archéologues du bâtiment. Les marques d'outils, les signes lapidaires, l'état actuel du bloc, ses altérations, sa couleur, ses dimensions, etc. sont enregistrés face par face. Ces informations sont saisies dans un tableau, ce qui permet une approche statistique et numérique du corpus.

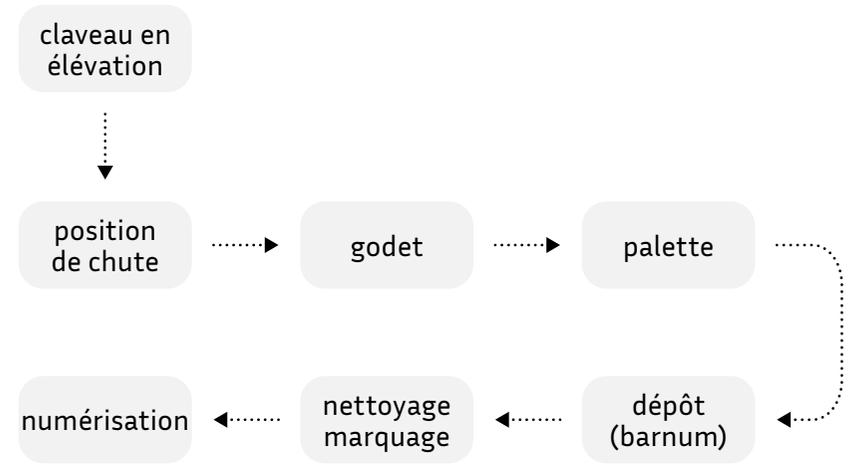
Le formulaire standard du GT Pierre (Cédric Moulis & Bruno Phalip, 2020)



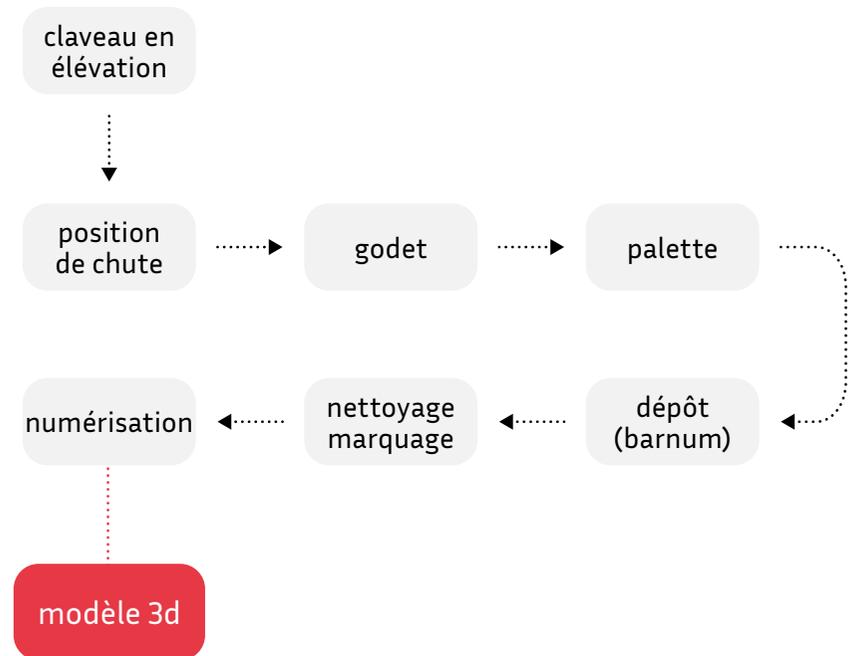
Le nettoyage des blocs implique leur dépollution, rappelons ici l'omniprésence de poussière de plomb dans la cathédrale et sur les vestiges qui en ont été extraits. Puis succéderont le nettoyage des altérations superficielles, notamment les encrassements, et le marquage des blocs : leur index de nomenclature et la numérotation des faces.

La nomenclature des claveaux est issue du numéro de godet, suivant le protocole "Tri-Godet". Les claveaux sont des blocs parallélépipédiques, les faces sont donc numérotées de 1 à 6 conformément aux éléments préparés dans les fiches archéo.

(LRMH, 2020)



Les claveaux sont numérisés en utilisant une photogrammétrie fine et systématisée. L'utilisation d'une machinerie ad hoc réduit le temps d'acquisition et de traitement, stabilise la couverture photogrammétrique et la colorimétrie (Mercurio3D, 2020)

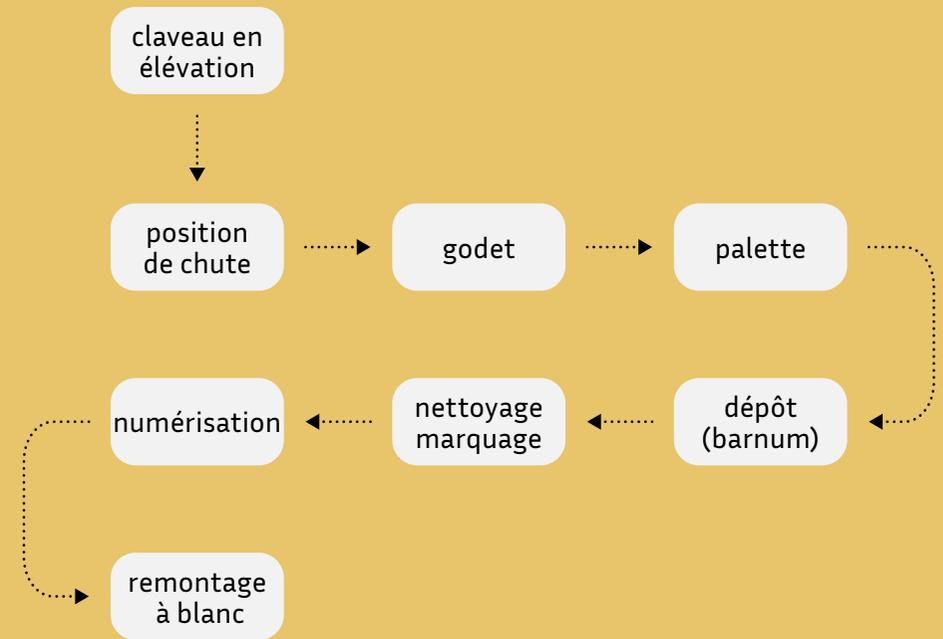


Le traitement photogrammétrique est automatisé depuis l'assemblage des photos jusque la mise à l'échelle du modèle 3D. Afin d'harmoniser le corpus et placer les items dans le même référentiel, une méthode que nous avons nommée "Registration par Métamodèle" a été développée par le projet REPERAGE

Les modèles 3D livrés sont des nuages de points et des maillages texturés avec une précision millimétrique et une colorimétrie calibrée.

Ces modèles sont visualisables en ligne sur le viewer 3D-Hop.

Vues orthographiques des claveaux N33 et N34 après Registration par Métamodèle (Antoine Gros, 2021)



Un remontage à blanc a été organisé sous le barnum, sous l'égide des ACMH, du LRMH, de la SRA-DRAC et du GT Pierre. Les claveaux ont été déplacés par les restaurateurs à des emplacements potentiels, sur une bâche où a été imprimée l'élévation restituée de l'arche effondrée.

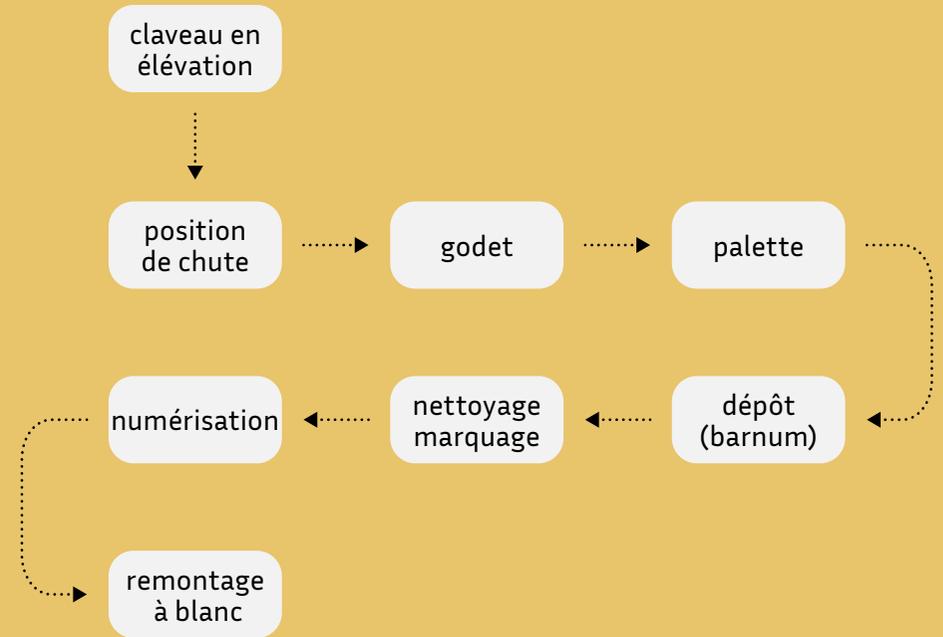
(RNDP, 2020)

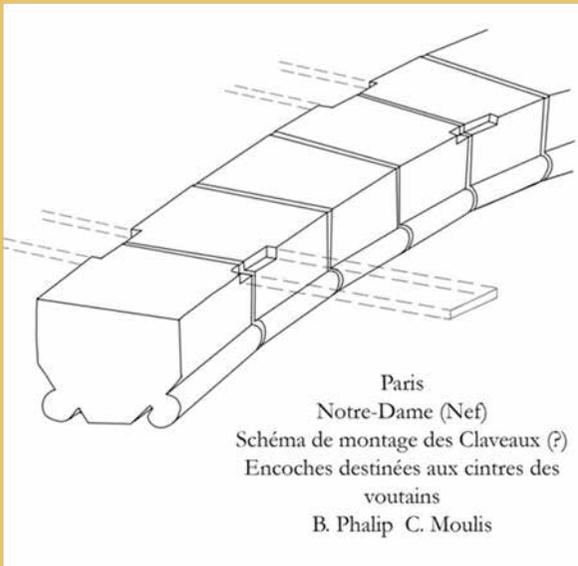


Un des derniers claveaux encore en place (Th Chadouin, Pierre Noël, 2021)



Groupe hypothétique de claveaux, la clef au centre (Élise Baillieul, 2020)

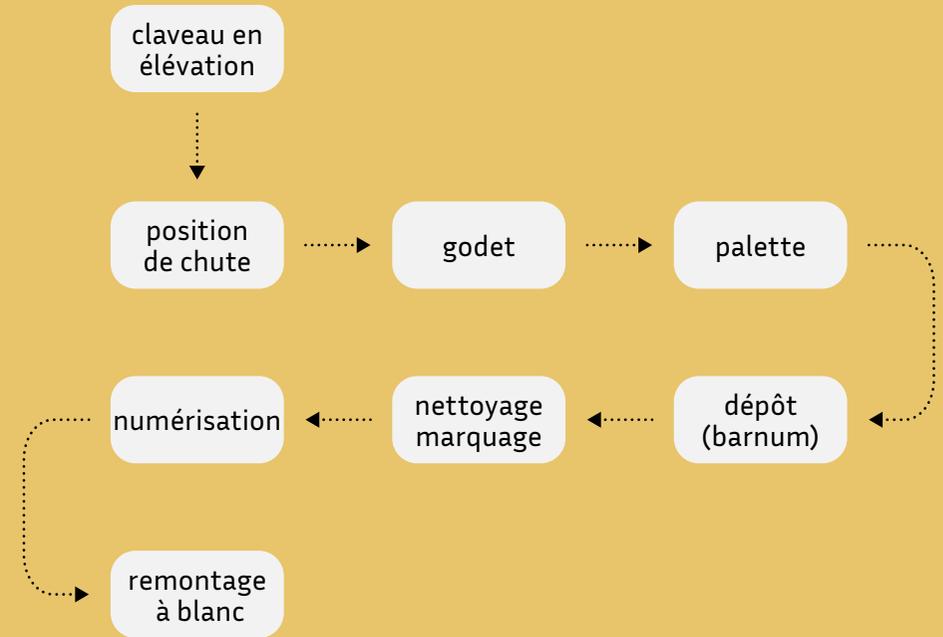


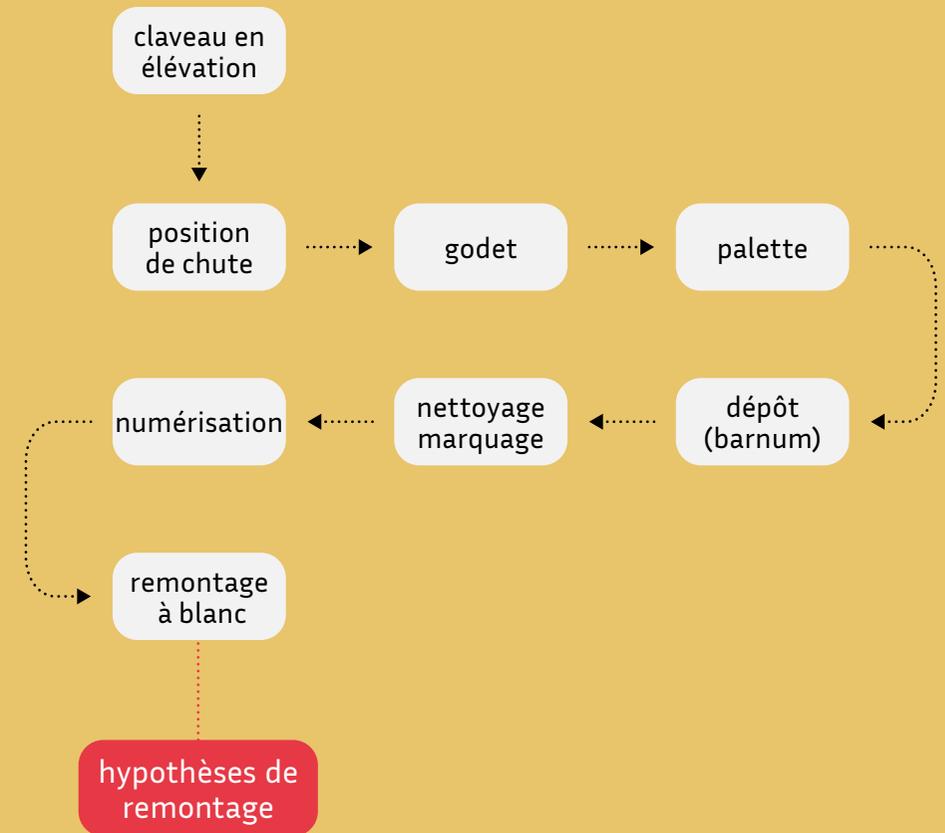
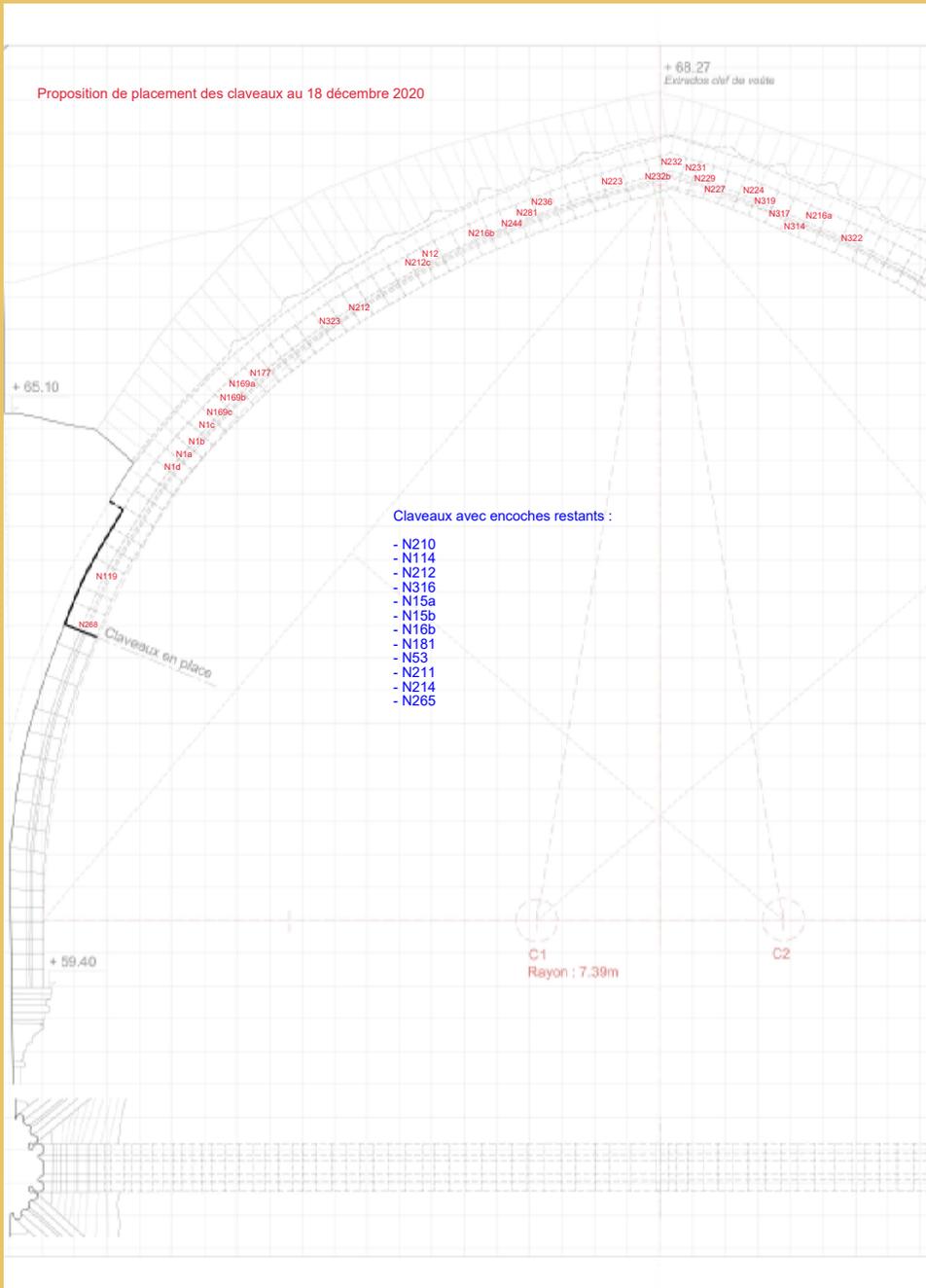


*Appairage de deux claveaux
en raison de leur encochage
cohérent (Élise Baillieu, 2020)*

*Élévation d'un arc entre la
nef et le transept (Dylan
Nouzeyran, 2021)*

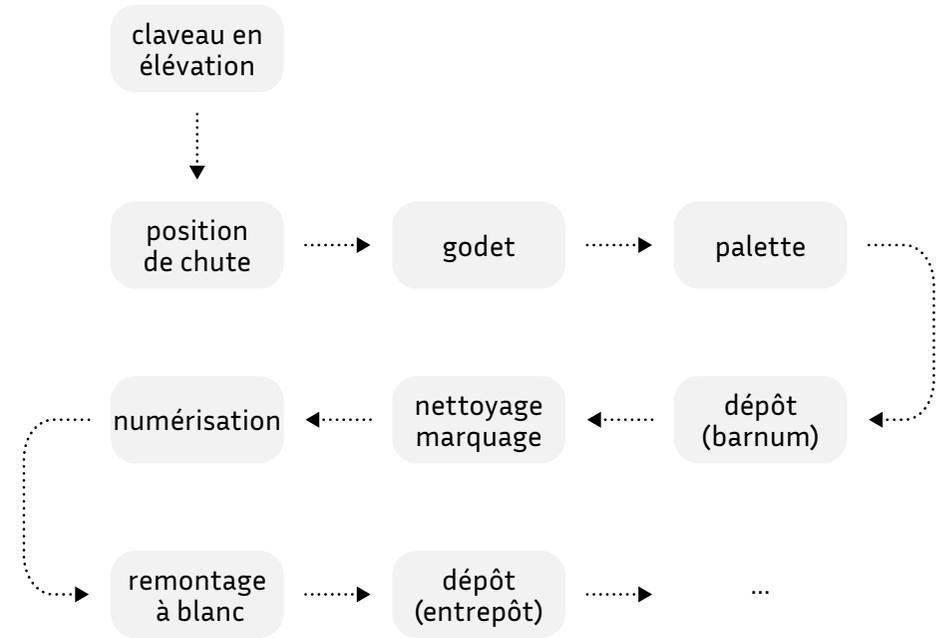
*Supposition de technique de montage des
claveaux (B.Philip, C. Moulis, 2021)*



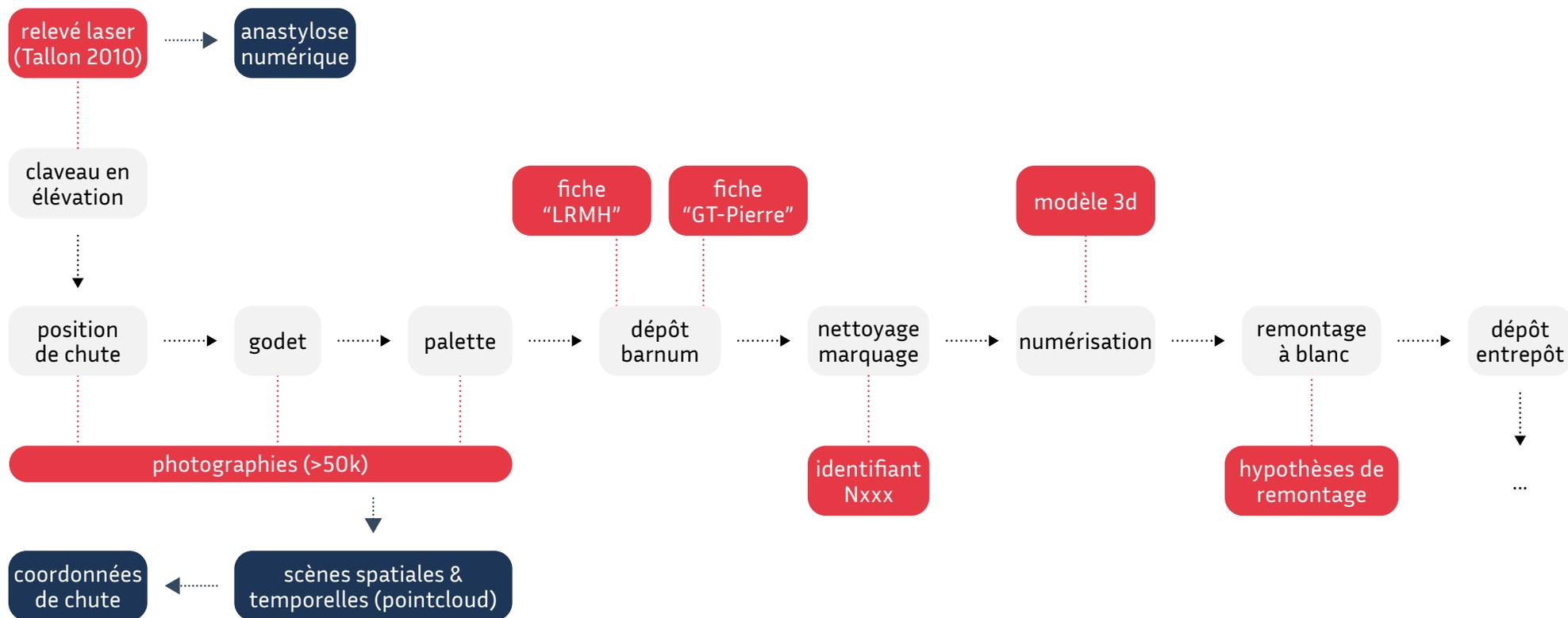


Plusieurs hypothèses de réassemblage furent formulées, des séries de claveaux identifiés.

(MOE, SRA-DRAC, LRMH, Stone WG, 2020)



Rayonnage et pierres du dépôt lapidaire de la cathédrale Notre-Dame de Paris (@Dorothee Chaoui-Derieux)





III.

ÉTUDES ET RECHERCHES

III.A. Suite des recherches du GT Pierre à l'intérieur de la cathédrale

III.B. Le problème de l'arc effondré: l'anastylose comme problème d'optimisation discrète



III.A.

**SUITE DES RECHERCHES DU GT PIERRE
À L'INTÉRIEUR DE LA CATHÉDRALE**

Bruno Phalip sur les échafaudages de la nef (Élise Baillieu, 2021)



Observation et comparaison avec le système à « rainure » utilisé pour la construction des voûtes du chœur.

Observation des encoches dénudées quand cela est rendu possible par le déjointement en cours.
(@Élise Baillieul, 2021)

Observations in-situ de l'intrados des voûtes

III.A. Suite des recherches du GT Pierre à l'intérieur de la cathédrale



Etude des retombées des ogives et des doubleaux.

Observation et relevé des incisions pratiquées sur la face d'attente des tailloirs
(pour l'instant dans la nef).
(@Élise Baillieu, 2021)

Observations in-situ de l'intrados des voûtes

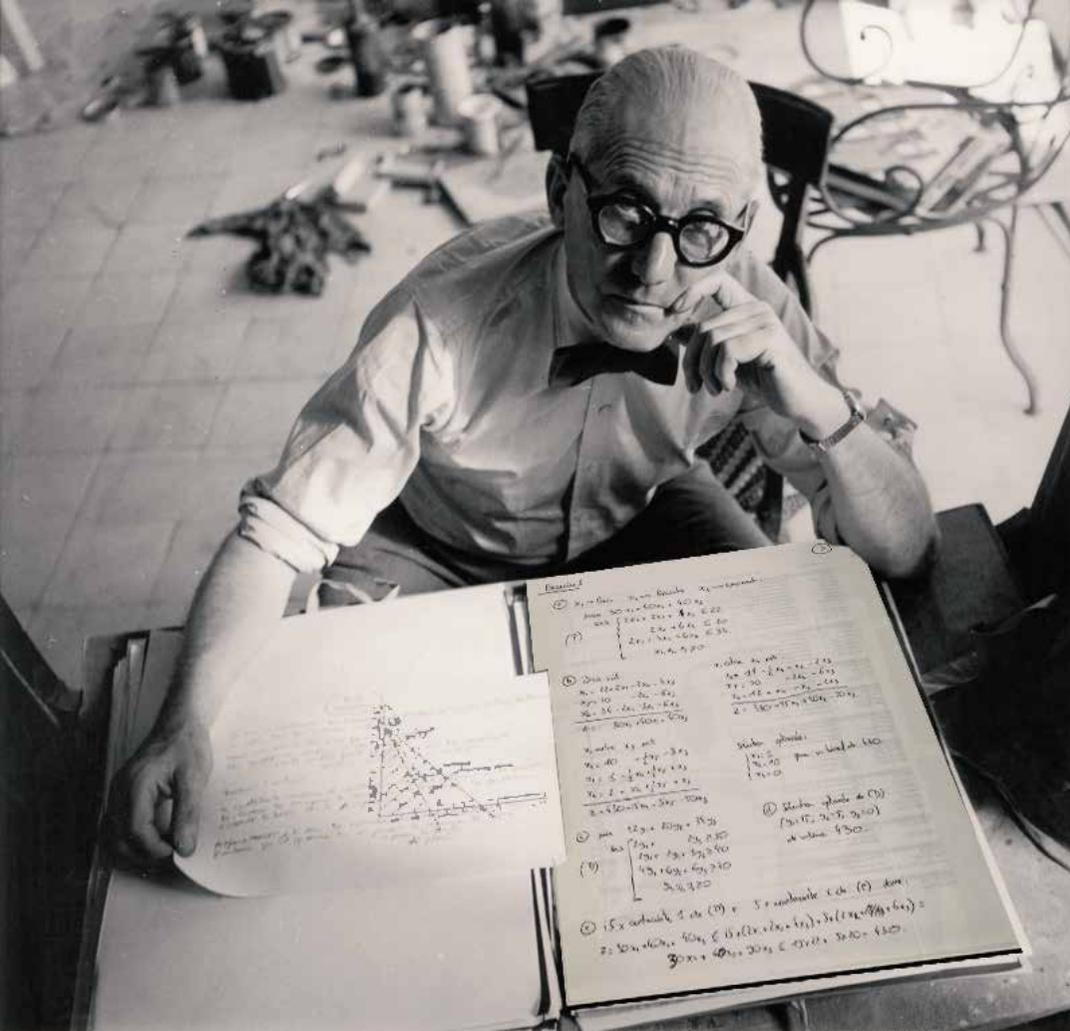
III.A. Suite des recherches du GT Pierre à l'intérieur de la cathédrale



Des mortiers ont été prélevés dans les voûtes du chœur et de la nef, tant dans les arcs que dans les voûtains.
Les galettes de mortier restant sur les claveaux de l'arc doubleau effondré de la nef ont également été prélevés.
(@Élise Baillieu, 2021)

Prélèvements de mortier

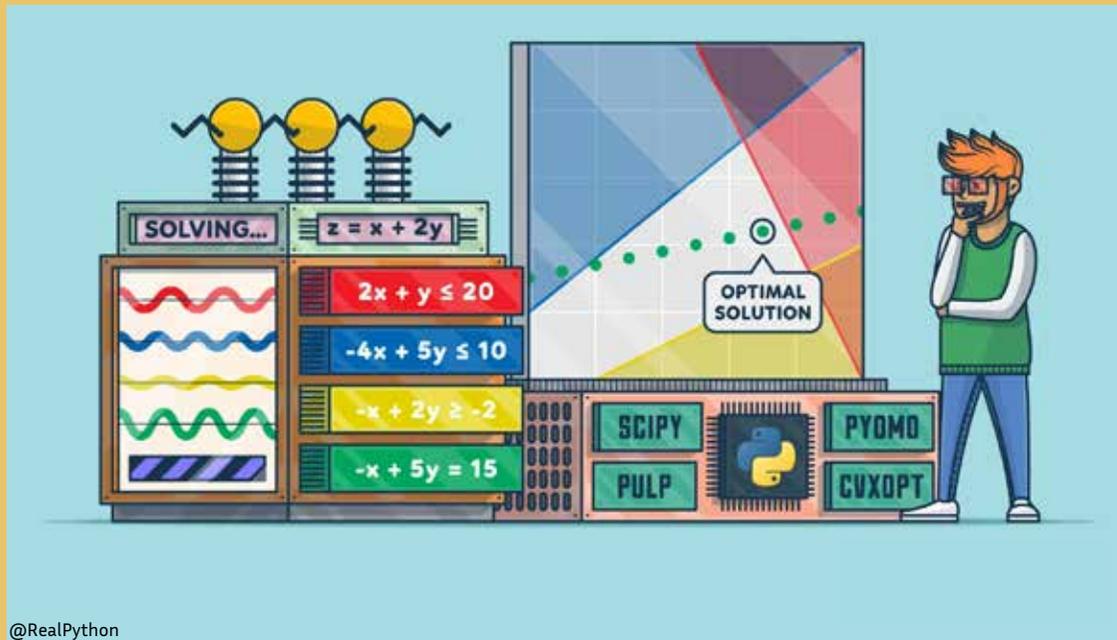
III.A. Suite des recherches du GT Pierre à l'intérieur de la cathédrale



III.B.

LE PROBLÈME DE L'ARC EFFONDRE : L'ANASTYLOSE COMME UN PROBLÈME D'OPTIMISATION DISCRÈTE

Le Corbusier résolvant un problème d'optimisation discrète en usant de la programmation linéaire inventée par George Dantzig (Anon, 19xx)



@RealPython

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize} && z = x + 2y \\
 &\text{subject to:} && \begin{cases} 2x + y \leq 20 \\ -4x + 5y \leq 10 \\ -x + 2y \geq -2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'optimisation combinatoire est une branche de l'optimisation mathématique, une discipline récente des visant à produire une ou plusieurs solutions réalisables et optimales pour un problème.

Plusieurs paradigmes de résolution coexistent, nous avons choisi la programmation linéaire, qui cadre la minimisation d'une fonction objectif par un ensemble de contraintes.

C'est un **mode de résolution déterministe qui garantit une reproductibilité de la solution à partir du même modèle et du même jeu de données**. Il permet un **démarrage à chaud** de l'algorithme à partir d'une solution partielle. Le solveur peut être relaxé.

Définition et résolution d'un problème d'optimisation combinatoire par programmation linéaire :

1. **Énoncé du problème+ Modélisation du problème**
2. Import des bibliothèques
3. Déclaration du solveur
4. Création des variables (constantes et vars. de décision)
5. Définition de la fonction objective
6. Définition des contraintes
7. Invocation du solveur
8. **Affichage et analyse de la solution/des solutions**

Programmation linéaire

III. Le problème de l'arc effondré :

l'anasthylose comme un problème d'optimisation discrète

Le problème de l'arc effondré

Antoine Gros

13 Octobre 2021

1 Énoncé

Dans une cathédrale gothique, l'arc soutenant l'une des voûtes s'est effondré. Il est composé d'un ensemble C de *claveaux*, des pierres de taille qui avec la clef de voûte forment l'arc, tel que $C = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$. Ils étaient positionnés à des emplacements E tel que $E = \{e_0, e_1, \dots, e_m\}$. Bien souvent, la collection de claveaux est incomplète car, suite à ce type de destructions, certains sont perdus, d'autres sont trop fragmentaires pour être identifiés comme tels, on définit alors $\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$

Les emplacements des claveaux sont disposés linéairement le long de l'arc, on les schématise par un tableau de dimension 1 et de longueur m .

Afin d'en faire l'anastylose, on cherche à "remonter l'arc", soit à replacer les claveaux à leur emplacement initial en établissant les paires (c_i, e_j) , à l'aide d'un ensemble de prédicats logiques et archéologiques :

1.1 Constantes et variables de décision

C l'ensemble des n claveaux

E l'ensemble des m emplacements

P l'ensemble des paires connues

l_{c_i} la largeur du claveau i

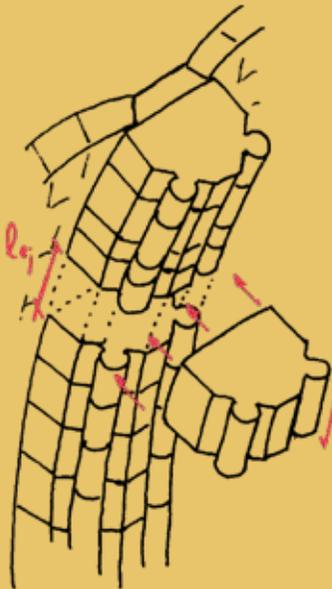
l_{e_j} la largeur de l'emplacement j

m_i la matrice 2x2 représentant l'encoche du claveau i , $m_{i_u, v} = 1$ si une encoche et présente, sinon 0

$d_{i,j}$ la distance entre le centre de gravité de l'emplacement e_j et les coordonnées de repérage du *claveau*.

La variable de décision est : $x_{i,j} = 1$ si le claveau i est positionné à l'emplacement j , sinon 0

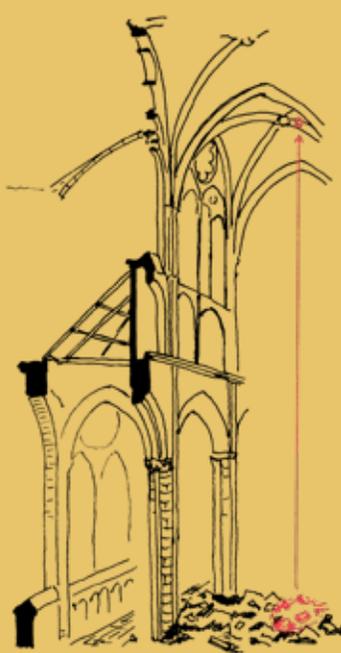
- **Non-Superposition** : Il y a au plus un *claveau* par emplacement ;
- **Unicité** : Tout *claveau* doit être à un et un seul emplacement ;
- **Clef** : La clef de voûte c_0 est à l'emplacement $e_k \mid k \in [0, m]$, k est défini comme le centre de l'arc ;
- **Paire** : L'emplacement e_j d'*claveau* c_i est connu, ils sont associés en une paire (c_i, e_j) ;
- **Série** : Une série de p claveaux est connue, nous les associons en un ensemble de paires $S = \{(c_\alpha, e_j), (c_\beta, e_{j+1}), \dots, (c_\omega, e_{j+p})\}$;
- **Palette** : Un ensemble de claveaux partageant le même numéro de référence sont proches les uns des autres ;
- **Largeur** : Tous les *claveaux* ont différentes largeurs l_{c_i} , la série de ces dernières correspond à celle des emplacements l_{e_j} tel que $L_c \subseteq L_e$. Ainsi, on cherche les paires les plus compatibles ;
- **Encoches** : Les faces adjacentes de deux *claveaux* placés côte à côte doivent avoir le même nombre d'encoche. Par analogie, ce prédicat est similaire à la règle du jeu de dominos ;
- **Croix** : En considérant les faces adjacentes de deux *claveaux* placés côte à côté, l'une d'entre elles doit présenter une croix et l'autre doit en être dépourvue ;
- **Croix-2** : Toutes les croix sont orientées vers l'intérieur ou vers l'extérieur, considérant l'index k comme le centre de l'arc ;
- **Repérage** : L'emplacement d'un *claveau* est proche de sa position de chute.



2.1 Fonctions objectif

Largeur : Tous les *claveaux* ont différentes largeurs l_{c_i} , la série de ces dernières correspond à celle des emplacements l_{e_j} tel que $L_c \subseteq L_e$. Ainsi, on cherche les paires les plus compatibles ;

$$\min \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_{i,j} |l_{e_j} - l_{c_i}|^r \quad \text{avec } r \geq 1$$



Repérage : L'emplacement d'un *claveau* est proche de sa position de chute.

$$\min \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_{i,j} d_{i,j} \quad \text{avec } r \geq 1$$

2.2 Prédicats logiques

Unicité : Tout *claveau* doit être à un et un seul emplacement ;

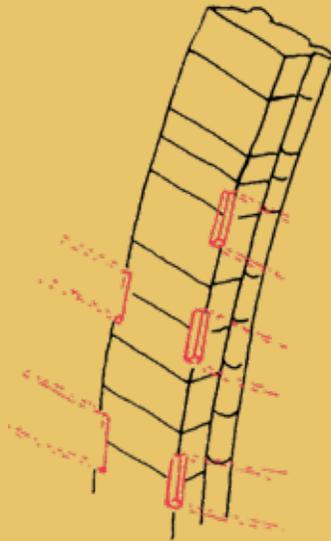
$$\sum_{j \leq m} x_{i,j} = 1 \mid \forall i \in [0, n]$$

Non-Superposition : Il y a au plus un *claveau* par emplacement ;

$$\sum_{i \leq n} x_{i,j} \leq 1 \mid \forall j \in [0, m]$$

2.3 Prédicats Archéologiques

Encoches : Les faces adjacentes de deux *claveaux* placés côte à côte doivent avoir le même nombre d'encoche. Par analogie, ce prédicat est similaire à la règle du jeu de dominos ;

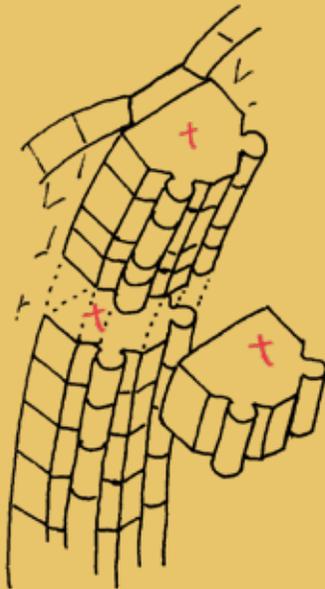


$$x_{ij} + x_{k,j+1} + \frac{|m_{i_{12}} - m_{k_{11}}| + |m_{i_{22}} - m_{k_{21}}|}{2} \leq 2$$

$$\forall i \in (1, n-1), \forall k \in (i+1, n), \forall j \in (1, n-1)$$

Croix : En considérant les faces adjacentes de deux *claveaux* placés côte à côté, l'une d'entre elles doit présenter une croix et l'autre doit en être dépourvue ;

Croix-2 : Toutes les croix sont orientées vers l'intérieur ou vers l'extérieur, considérant l'index k comme le centre de l'arc ;



Résolu algorithmiquement

2.4 Paires et Séries connues

Paire : L'emplacement e_j d'*claveau* c_i est connu, ils sont associés en une paire (c_i, e_j) ;

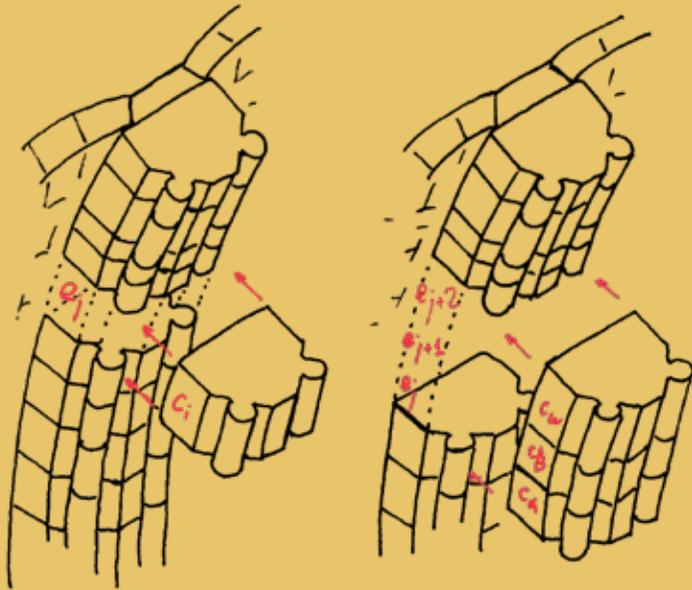
$$x_{i,j} = 1$$

$$\forall p \in P \text{ tel que } p_k = (c_i, e_j) \mid \forall (i, j) \in N$$

Série : Une série de p *claveaux* est connue, nous les associons en un ensemble de paires $S = \{(c_\alpha, e_j), (c_\beta, e_{j+1}), \dots, (c_\omega, e_{j+p})\}$;

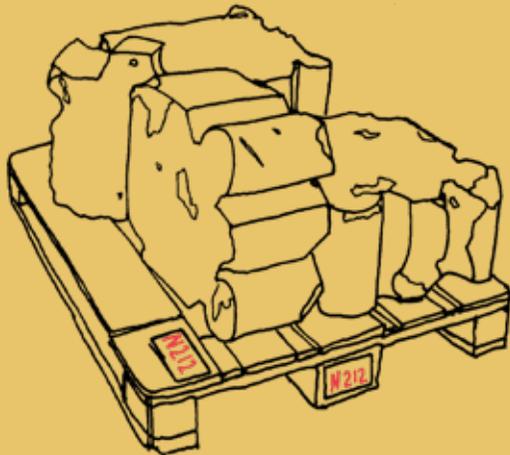
$$\{x_{\alpha,j} = 1, x_{\beta,j+1} = 1, \dots, x_{\omega,j+p} = 1\}$$

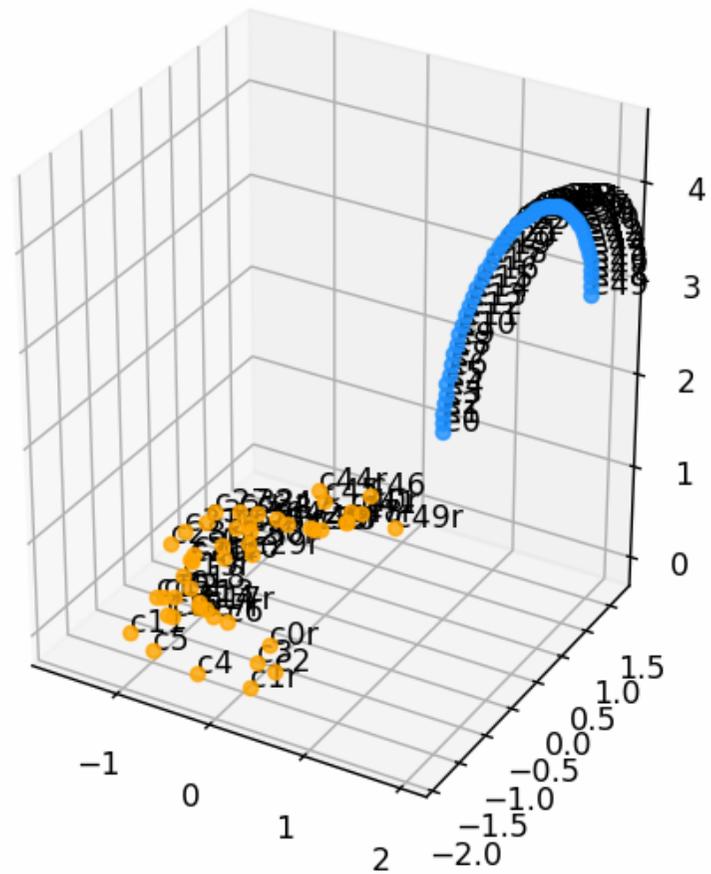
$$\forall p \in P \text{ tel que } p_k = (c_i, e_j) \mid \forall (i, j, x) \in N, \forall (\alpha, \beta, \omega) \in [0, n]$$



Palette : Un ensemble de *claveaux* partageant le même numéro de référence sont proches les uns des autres ;

Résolu algorithmiquement



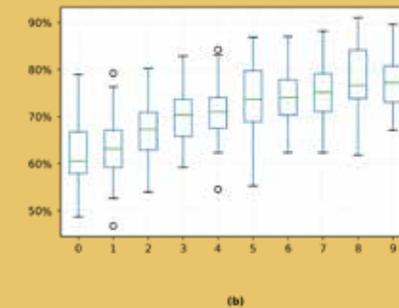
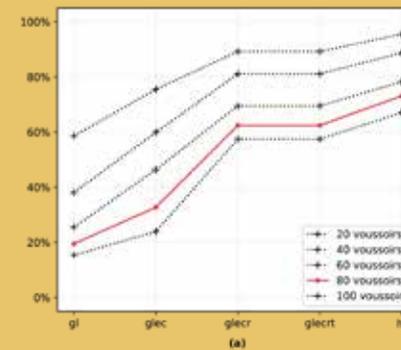
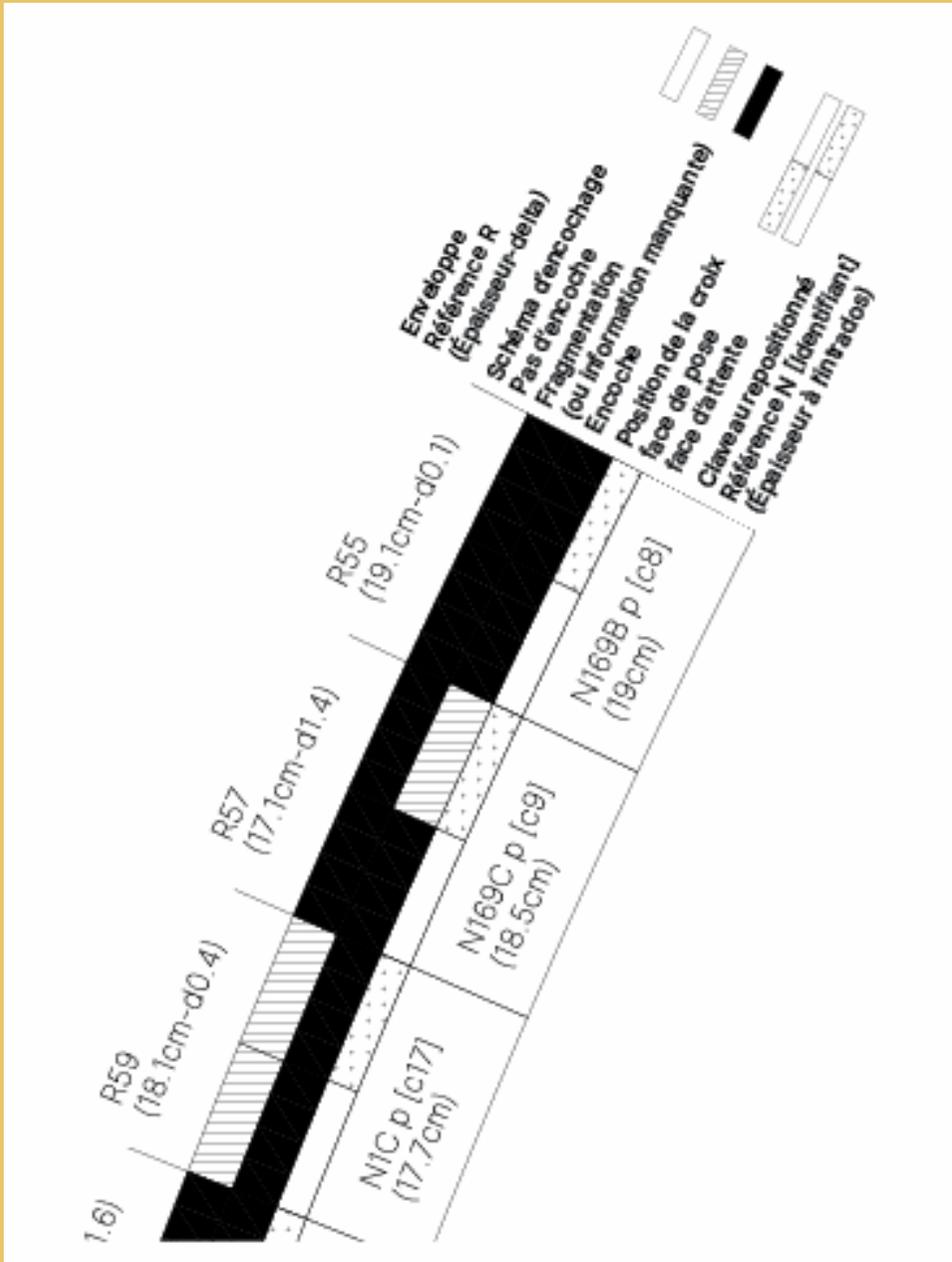


	set A	set B	set C
nombre de claveaux	n	n	n
- présents	1.0	0.7	0.95
- avec encoches	0.5	0.3	0.3
- inversés	0.5	0.5	0.5
- fragmentaires	0.0	0.4	0.3
- non repérés	x	x	x
incertitude sur la largeur	± 0.0	± 0.8	± 0.5
incertitude sur le repérage	± 0.0	± 0.8	± 0.5
paires connues	6	6	6

Génération d'instances du problème, pour évaluer la performance de l'algorithme de résolution (Antoine Gros, 2022)

Scores

III. Le problème de l'arc effondré :
l'anastylose comme un problème d'optimisation discrète



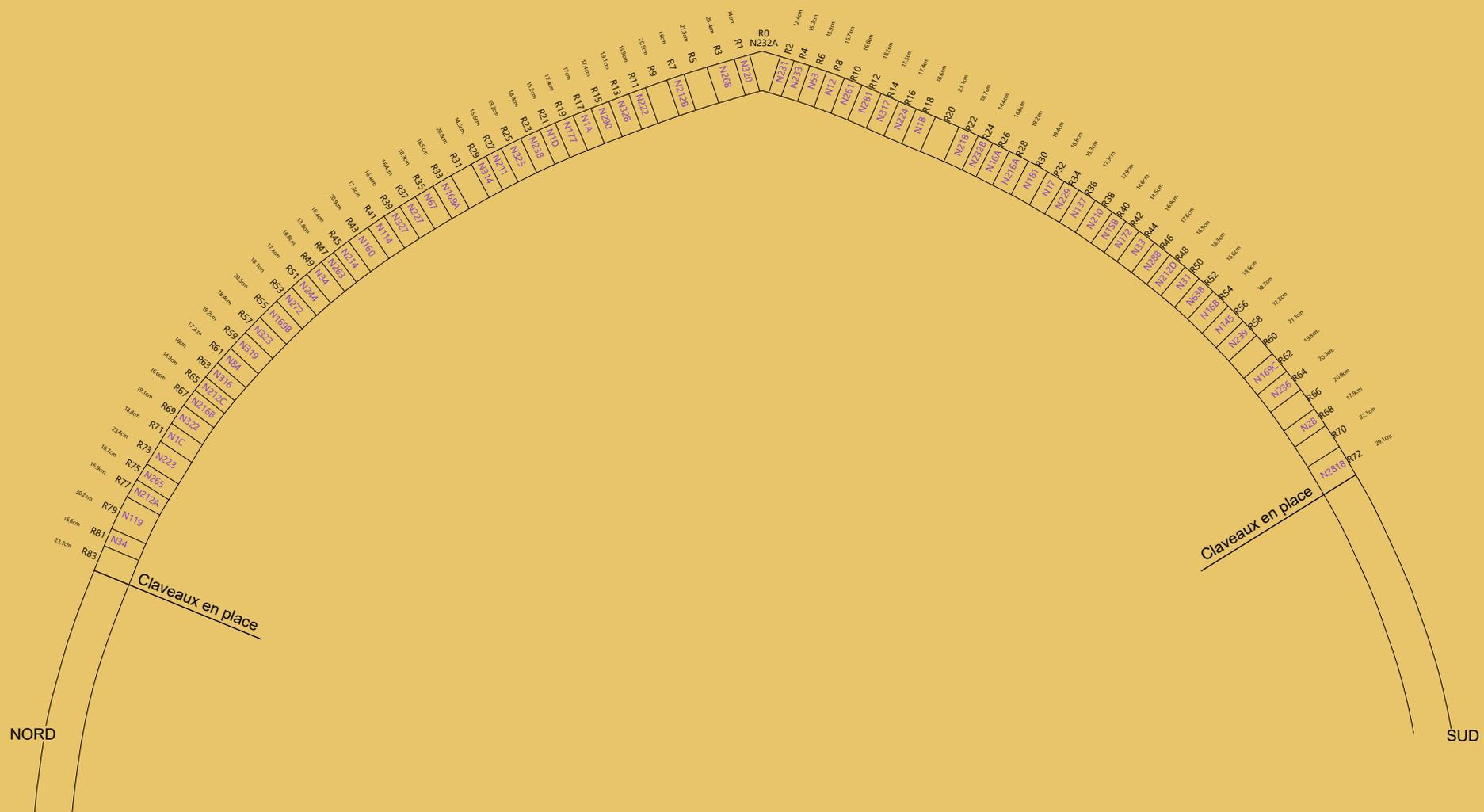
La solution d'une instance du problème est présentée schématiquement selon les caractéristiques choisies.

- a) Performance de l'algorithme 'glescr' en fonction du nombre de claveaux
- b) Performance de l'algorithme 'glescr' en fonction du nombre de clusters identifiés

(Antoine Gros, 2022)

Scores

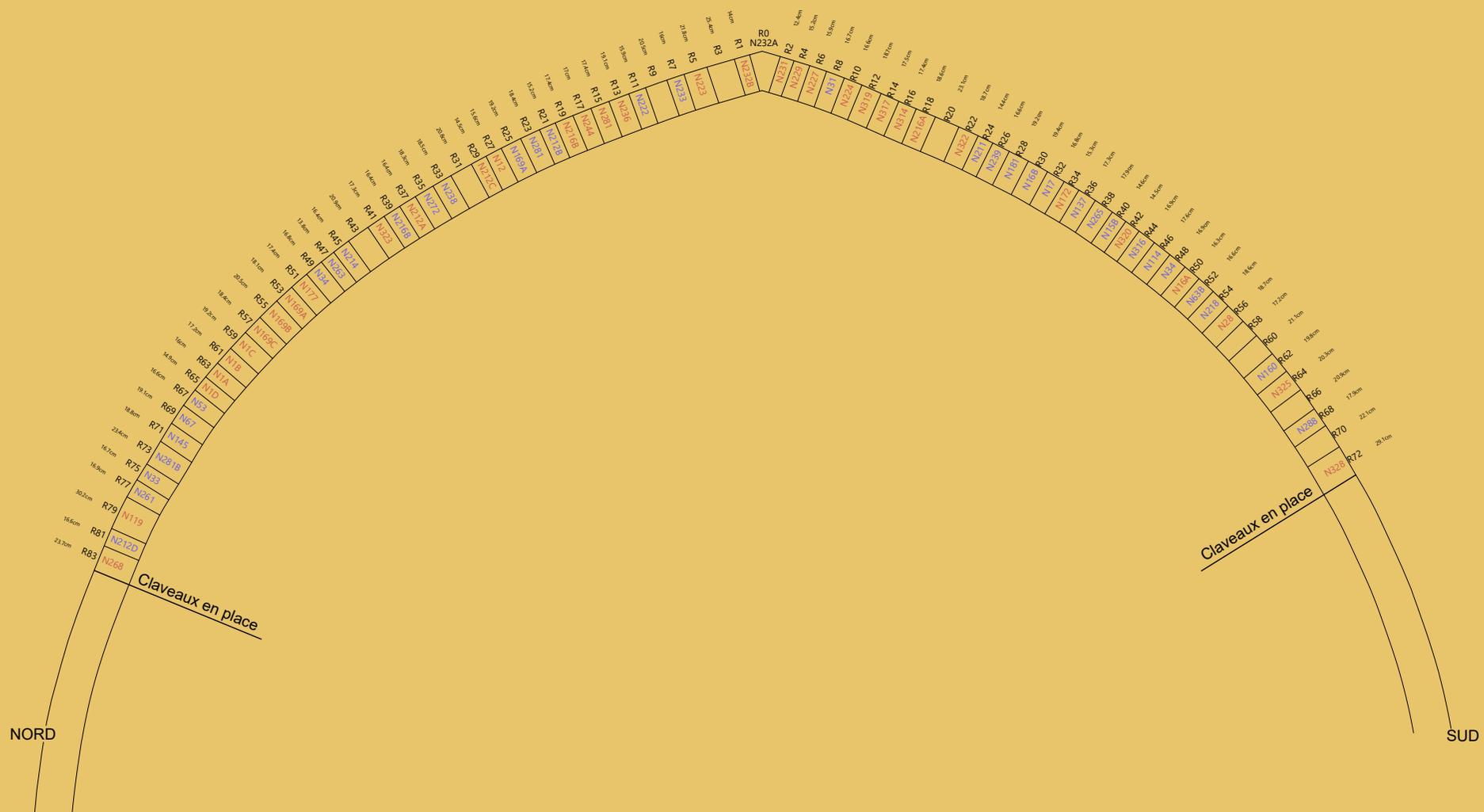
III. Le problème de l'arc effondré :
l'anastylose comme un problème d'optimisation discrète



(Antoine Gros, 2021)

(19/10) Solution optimale

III. Le problème de l'arc effondré :
l'anastolyse comme un problème d'optimisation discrète



(Antoine Gros, 2021)

(19/10) Solution optimale depuis le solveur déparé à chaud

III. Le problème de l'arc effondré :

l'anastylse comme un problème d'optimisation discrète



*Placement des claveaux sur l'anastylose numérique, une extension du viewer 3d
(Antoine Gros, 2021)*

Mise en place des claveaux sur le viewer3D

51

III. Le problème de l'arc effondré :
l'anastylose comme un problème d'optimisation discrète



*Communication autour du remontage de l'arc à l'aide sa maquette au 1/20e lors des JEP2021 (Ariane Neroulidis, 2021)
Une vue d'ensemble de la collection lapidaire des claveaux de la nef de Notre Dame de Paris (Mercurio3d, 2021)*

Maquette au 1/20e des claveaux de l'arc, pour d'autres remontages à blanc 52
III. Le problème de l'arc effondré :
l'anastylose comme un problème d'optimisation discrète

RESEARCH PROJECT FSP-REPERAGE

Head : Livio de Luca (MAP), Antoine Gros (MAP)

Partners : Dorothée Chaoui-Derieux (SRA), Anaïs Guillem (FSP), Lise Leroux (LRMH), Olivier Malavergne (LRMH), Thierry Zimmer (LRMH).

Collaborators : Élise Bailleul(UMR 8529-IRHiS), Cédric Moulis(EA1132-Hiscant-MA), Bruno Phalip(Université Clermont-Auvergne) from the "Stone" Workgroup

Partnership UMR3495-MAP/LRMH/SRA-DRAC with FSP funding

