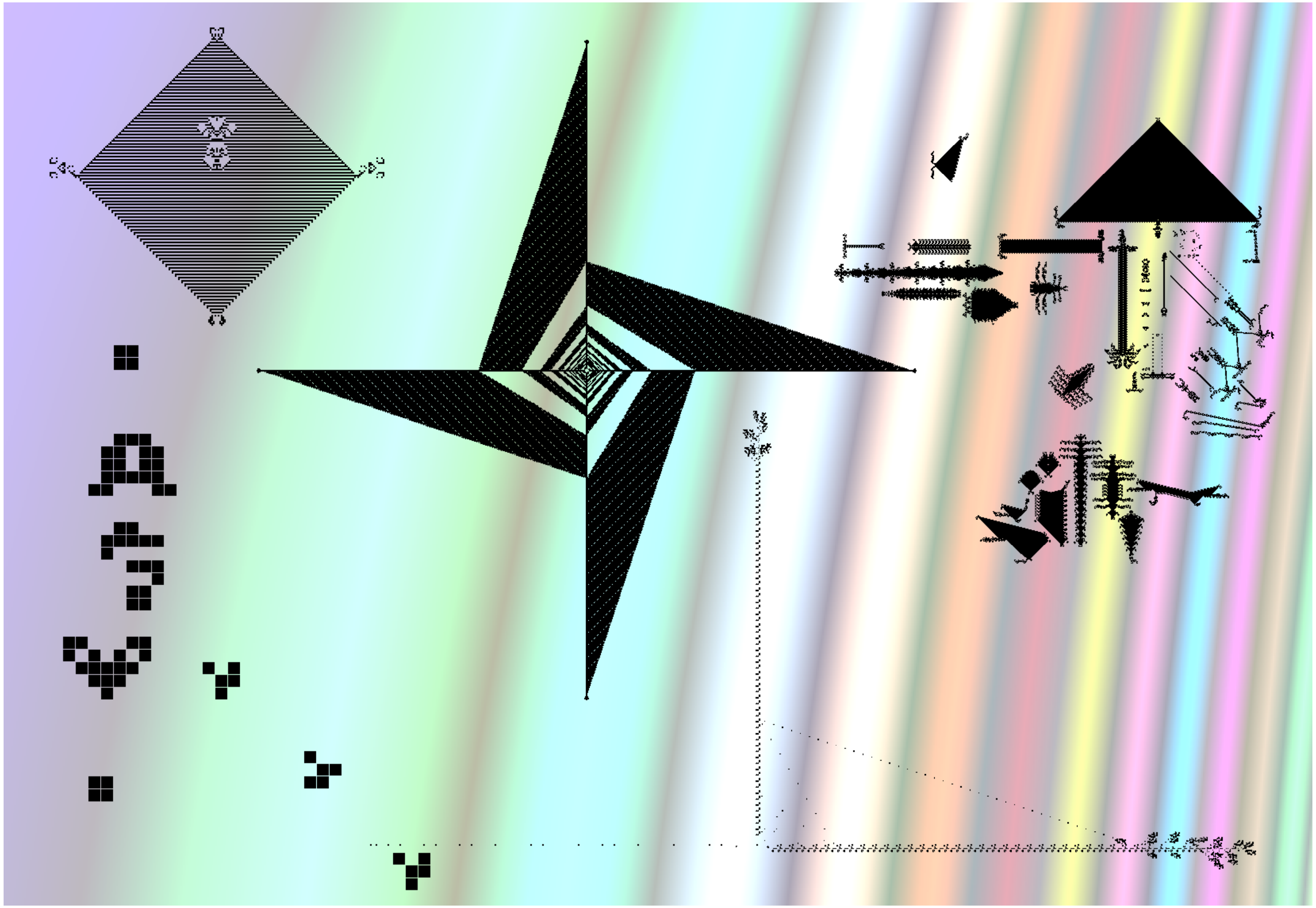


Automates cellulaires :
Le jeu de la vie

Jean-Paul Delahaye

Université des Sciences et Technologies de Lille
Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille
UMR **CNRS** 8022 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
e-mail : delahaye@lifl.fr

John Von Neumann (modèle de systèmes autoreproducteurs)

Konrad Zuse (modèle pour une physique simplifiée)

John Conway (jeu et modèle de calcul)

Automates cellulaires

- Petites machines simples identiques placées côte à côte (sur un quadrillage).
- Mémoire finie (la machine mémorise qu'elle est dans un état pris parmi n)
- Temps discret : instant 0, instant 1, instant 2, ...
- Décision de changer d'état à partir d'informations locales (l'état des voisins)

Jeu de la vie

Inventé en 1970 par John Conway (mathématicien, logicien, amateur de jeux mathématiques)

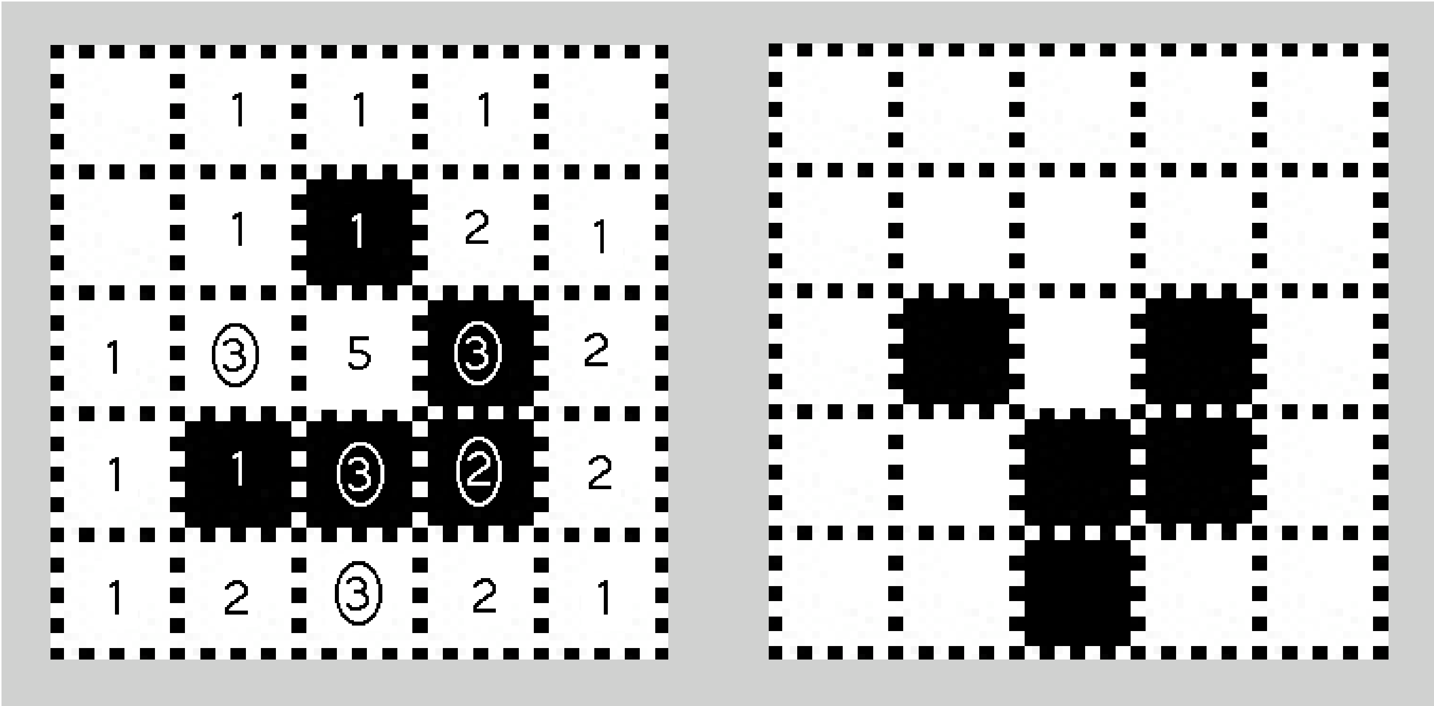
• Deux états possibles : **vivant** ou **mort**

• L'information d'une cellule est le *nombre de cellules voisines vivantes* parmi les 8 qui l'entourent.

Naissance si 3 vivantes

Survie si 2 ou 3 vivantes

C'est simple ! Et pourtant cela définit un domaine d'objets et de problèmes mathématiques qu'on étudie depuis 40 ans et qui est très loin d'être épuisé, malgré les incroyables constructions et résultats qui ont été élaborées.



Génération 0 Génération 1

Que se passe-t-il ?

01 Aléatoire 25 cellules

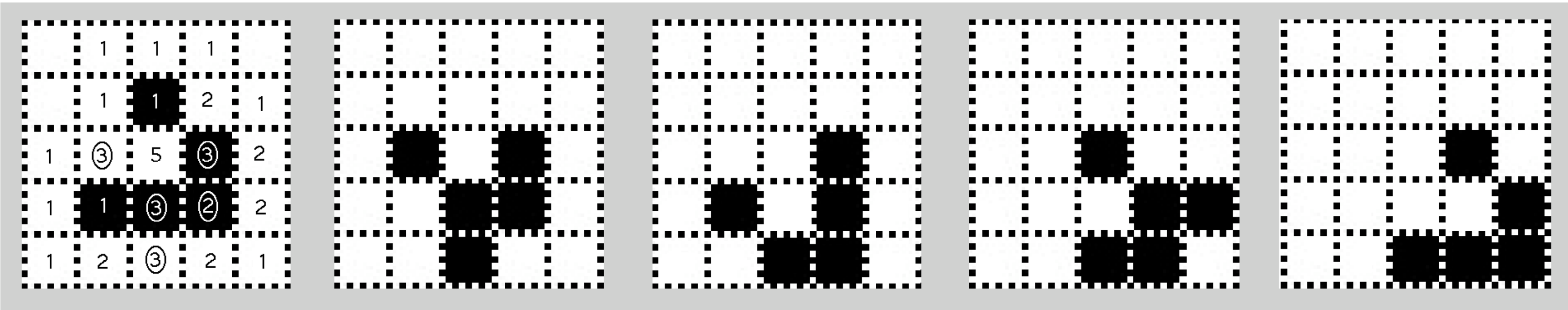
02 Aléatoire 115 cellules : *Annihilation en 658* (Andrew Okrasinski)

03 Aléatoire 278 cellules : *Stabilisation 546*

04 Aléatoire 275 cellules : *Donne un glisseur*

05 Aléatoire 15524 cellules : *Donne une multitude de glisseurs*

Le glisseur (le planeur)



Étude du glisseur

06 Un glisseur

07 Un groupe de16 glisseurs

08 Annihilation de 60 glisseurs

09 Collision de deux glisseurs

Les jardins d'Eden :
configurations qui n'ont pas de "parent"

10 Jardin d'Eden 1 (226 cellules, Roger Banks 1971)

11 Jardin d'Eden (80 cellules ; découvert en 2006 par Nicolay Beluchenko)

(faire les démonstrations n'est pas si facile...)

Problème irrésolu depuis 40 ans :

Existe-t-il une configuration qui possède un parent, mais pas de grands-parents.

(Il ne suffit pas de prendre un jardin d'Eden et de calculer la génération suivante…)

Les configurations stables ("*still life*")

15 Still : une collection de configurations stables

16 Still + un glisseur Version A

17 Still + un glisseur Version B

18 Absorbeurs A

19 Absorbeurs B

Les configurations périodiques ("*oscillateurs*")

20 Oscillateurs de 1 à 4

21 Oscillateurs de 1 à 12

22 Oscillateurs de 1 à 18

23 Oscillateurs de 1 à 59

Une question élémentaire.

Est-ce que toutes les périodes sont possibles ?

Quarante ans de travail ont conduit aux résultats suivants.

• Entre 1 et 54, on connaît des configurations périodiques pour toutes les périodes, sauf pour

19, 23, 31, 37, 38, 41, 43 et 53.

• Grâce à une méthode proposée par David Buckingham, on sait réaliser des configurations périodiques de période p, pour tout entier p ≥ 54.

Ce résultat remarquable est un théorème mathématique.

Réseaux infinis stables et oscillateurs infinis

25 Réseau infini stable

26 Oscillateurs infinis A

27 Oscillateurs infinis B

Théorèmes et conjectures

On a établi dans un premier temps que la densité 8/13 était indépassable par un réseau stable infini.

On a émis la conjecture que 1/2 était la densité maximale possible.

En 1997, Noam Elkies a démontré la conjecture (article de 29 pages)

Récréation

30-31-32-33-34-35-36-37-38-39-40-41-42-43

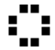
La propagation d'un incendie

La fragilité du réseau de lignes stables

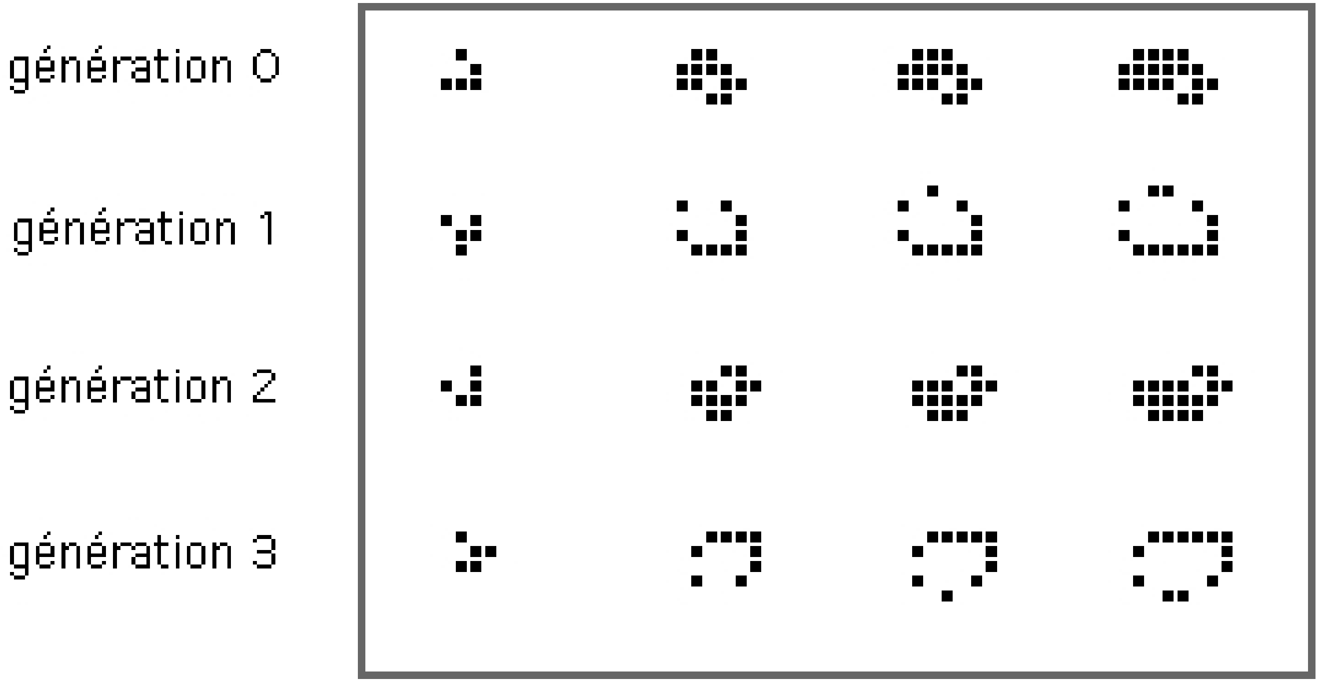
Une collection d'annihilations

Figuratifs

Cendres

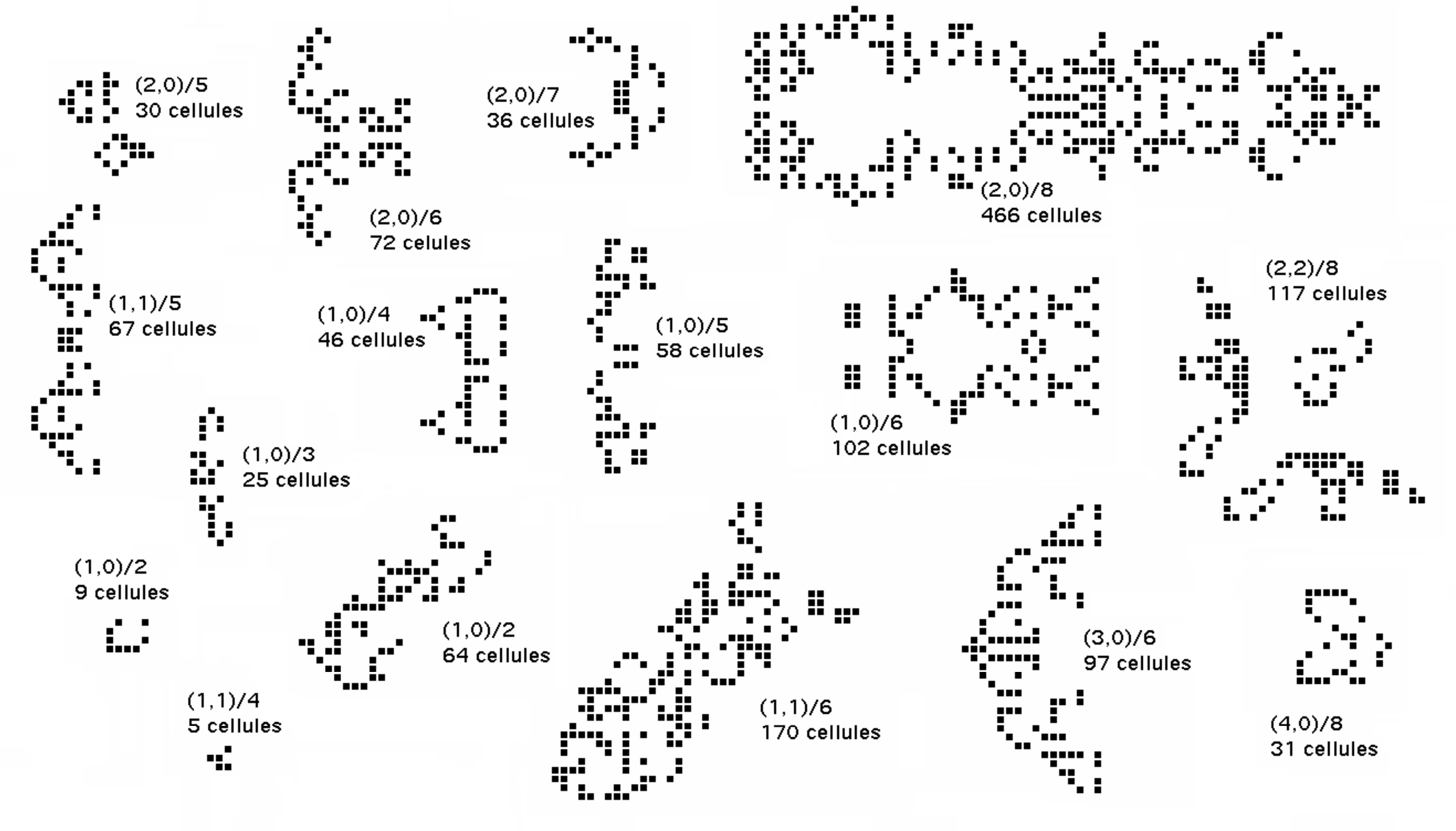
1		3.038	6		81.71
2		3.094	7		86.78
3		5.230	8		132.9
4		16.79	9		279.7
5		18.27	10		373.6

Navires



(1,0)/2	64 cellules	Dean Hickerson	28 Jul 1989
(1,0)/3	25 cellules	Dean Hickerson	Aug 1989
(1,0)/4	46 cellules	Tim Coe	May 1996
(1,1)/4	5 cellules	Richard Guy	1970
(2,0)/4	9 cellules	John Conway	1970
(1,0)/5	58 cellules	David Bell	14 Apr 1997
(1,1)/5	67 cellules	Nicolay Beluchenko	11 Jul 2006
(2,0)/5	30 cellules	Paul Tooke	7 Dec 2000
(1,0)/6	102 cellules	Paul Tooke	23 Apr 2000
(1,1)/6	170 cellules	Nicolay Beluchenko	18 Sep 2005
(2,0)/6	72 cellules	Jason Summers	22 Oct 2000
(2,1)/6	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(3,0)/6	97 cellules	Hartmut Holzwart	1995

(1,0)/7	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(1,1)/7	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(2,0)/7	36 cellules	David Eppstein	12 Jan 2000
(2,1)/7	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(3,0)/7	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(1,0)/8	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(1,1)/8	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(2,0)/8	466 cellules	Jason Summers	4 Oct 2000
(2,1)/8	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(2,2)/8	117 cellules	Jason Summers	2 Dec 2000
(3,0)/8	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(3,1)/8	peut-être possible mais pas encore trouvé		
(4,0)/8	31 cellules	Jason Summers	29 Oct 2000
(102,0)/270	11880063 cellules	Gabriel Nivash	2004


(2,0)/5
30 cellules
(2,0)/6
72 celules
(2,0)/7
36 cellules
(2,0)/8
466 cellules
(1,1)/5
67 cellules
(1,0)/4
46 cellules
(1,0)/5
58 cellules
(1,0)/6
102 cellules
(2,2)/8
117 cellules
(1,0)/3
25 cellules
(1,0)/2
9 cellules
(1,0)/2
64 cellules
(1,1)/4
5 cellules
(1,1)/6
170 cellules
(3,0)/6
97 cellules
(4,0)/8
31 cellules

L'étude théorique montre que

- un navire de type (A, B) a nécessairement une période N plus grande que 2(A+B).

En conséquence :

- Un navire qui se déplace horizontalement d'une case à la fois ne peut pas le faire en moins de 2 générations.
- Un navire qui se déplace d'une case en diagonale (type (1,1)) ne peut pas le faire en moins de 4 générations.

Navires

Navires gris

Navires négatifs (trous mobiles)

Lance-Navires

Lance-glisseurs de Gosper (William Gosper novembre 1970) : un pari

Lance-navires

Lance-navires qui engendre une suite pseudo-aléatoire,

Lance-glisseurs le plus dense possible (P14 Karel Suhajda,Feb 2004)

La synthèse du lance-glisseurs

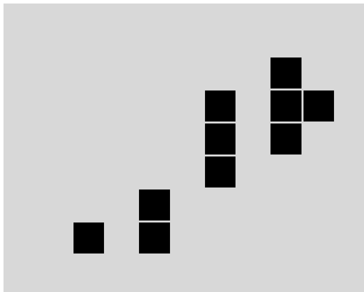
Puffeurs (souvent à l'origine de navires)

Une question intéressante est :

- combien faut-il au minimum de cellules pour engendrer une croissance infinie ?

En 1971, Charles Corderman découvre le "switch engine" et des variantes qui ne comportent que 11 cellules au départ. Ce record tient 25 ans.

Cependant en 1997, Paul Callahan découvre une configuration de 10 cellules qui elle aussi a une taille qui augmente infiniment.



Récréation :

Le problème du perçage

Une configuration peut-elle croître comme t^2 ?

Les "breeder" (éleveur)

Le premier

(construit par le groupe de travail de Gosper au début des années 1970)

Quelques autres

Le record actuel

Configuration à croissance quadratique : impossible de faire mieux

Croissances diverses

$n^{3/2}$

$\ln(n)$

$n \ln(n)$

dent de scie, etc.

Le "remplisseur du plan"

Récréation :

l'explosion cambrienne

Calcul des nombres premiers

(Dean Hickerson 1991)

Crible d'Ératosthène

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ 27

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ ~~27~~

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~

2 3 5 7 11 13 17 19 23

• Nombres premiers jumeaux : on ne sait pas si l'émission de navire se poursuit toujours ?

• Conjecture des nombres premiers de Fermat : on ne sait pas si la structure cesse de croître ?

(Jason Summers, 7 Janvier 2000)

5, 17, 257, 65 537 (de la forme 2^(2^n) +1) pour n =1, 2, 3, 4

Déterminer le devenir ultime d'une configuration : semble difficile dans certain cas

Théorème d'universalité du jeu de la vie.

Tout ce qui est calculable peut être calculé avec des configurations du jeu de la vie.

Conséquence.

Indécidabilité du problème du devenir d'une configuration

Le théorème a été rendu concret par la mise au point de "configuration machine de Turing"

Calcul de π

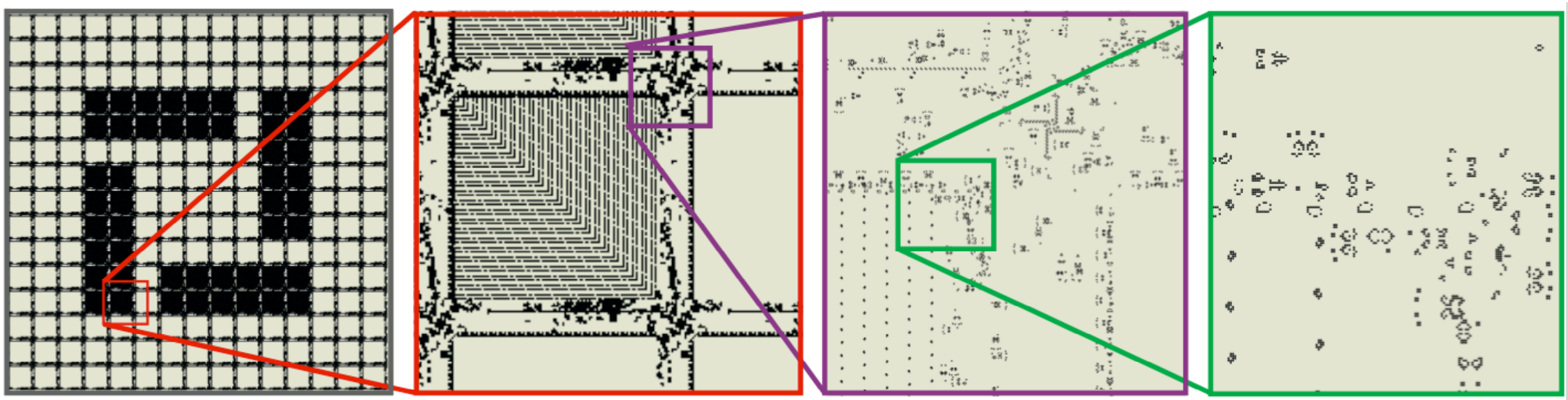
Basé sur la série

$$\pi / 4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \ldots$$

Autres configurations qui "calculent" des nombres irrationnels ou transcendants.

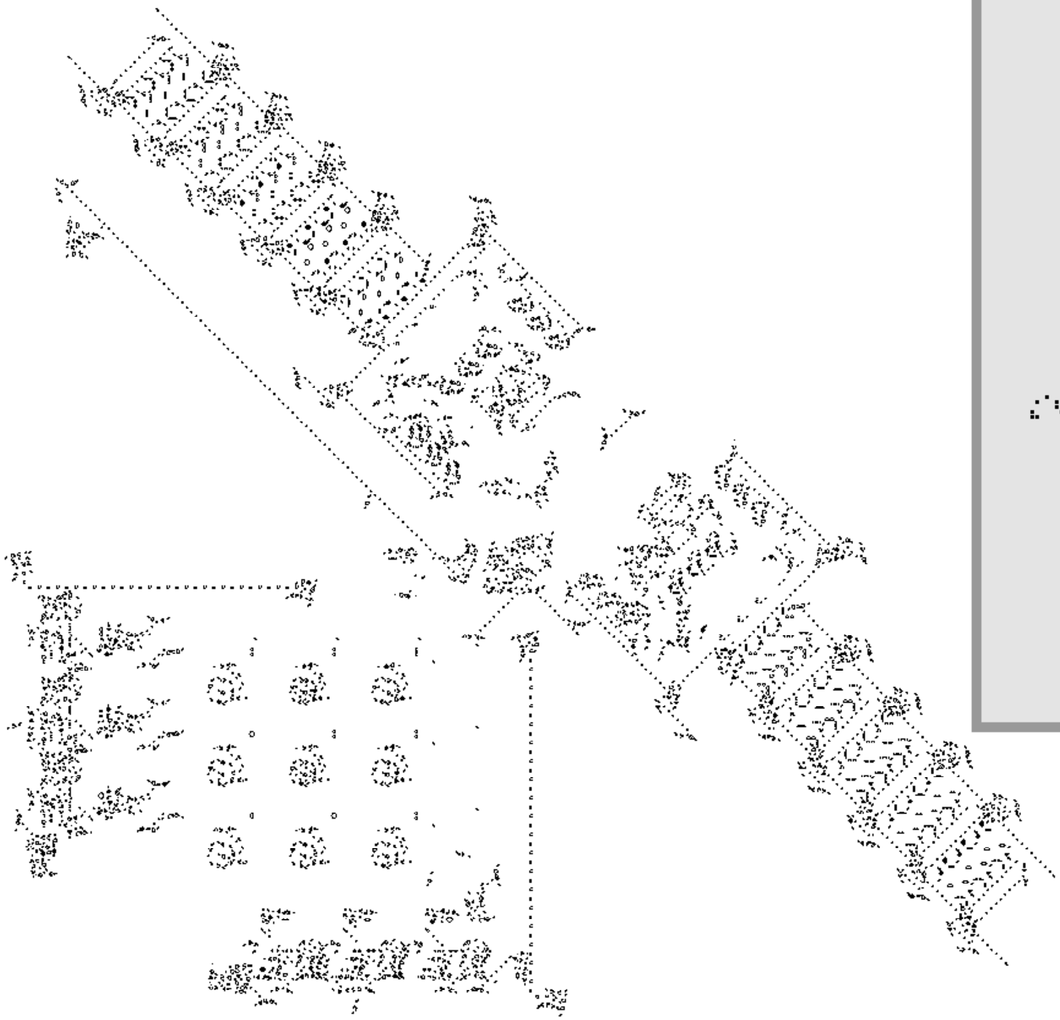
Méta-cellules

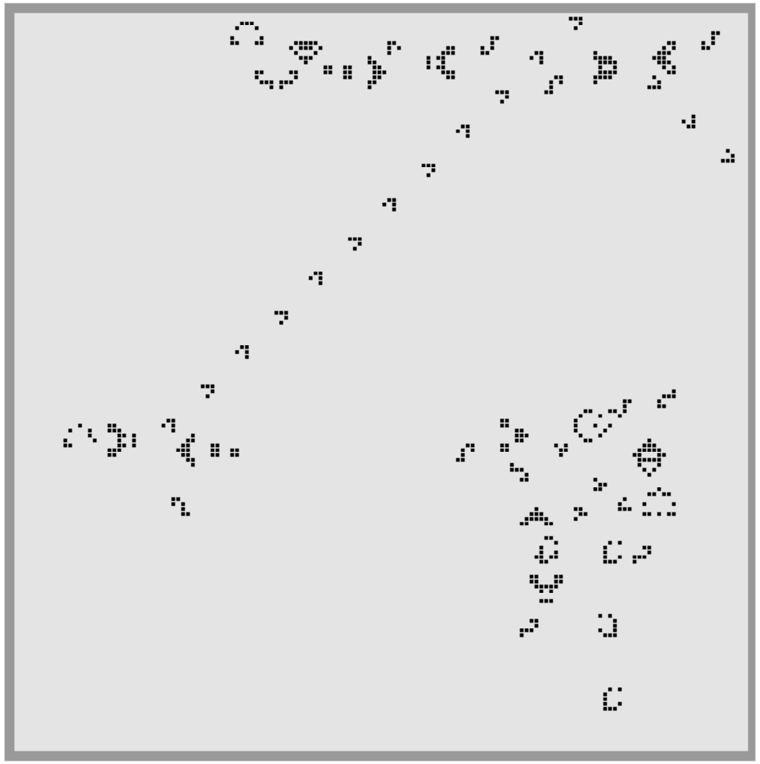
(Brice Due 2005)



Machines de Turing

(Paul Rendell, 2000)





Questions

• Quelles sont les périodes possibles des oscillateurs ?

• Quelle est la liste exacte des types de navires possibles ?

• Peut-on concevoir des murs de cellules qui résistent aux attaques de tous les glisseurs et se reconstituent quand ils sont frappés ?

• Peut-on mettre au point des configurations qui nettoient l'espace des cendres qu'on y trouve quand l'activité d'une configuration aléatoire s'est éteinte ?

• Peut-on dessiner et faire fonctionner des configurations qui se dupliquent effectivement ?

• Peut-on concevoir des configurations qui se dupliquent et qui, de plus, soient protégées de toutes les attaques possibles par des glisseurs, ou même par des navires variés ?

• Même chose en imposant que la configuration se déplace et nettoie l'espace.

• Toute configuration stable ou périodique est-elle engendrée par une rencontre de glisseurs ?

• Quelles règles permettent de comprendre les problèmes de perçage ? ou, peut-on démontrer qu'il n'y en a pas ? (plus probable).

• Peut-on fabriquer un constructeur universel, c'est-à-dire une machine capable d'assembler toute configuration finie qui n'est pas un jardin d'Eden ?

• Peut-on faire des machines intelligentes (en un sens à préciser) ?

John Conway :

«Il est probable, qu'en remplissant une partie assez grande du plan infini du Jeu de la vie par une configuration aléatoire, alors, après un long moment, émergeront des êtres autoreproducteurs intelligents qui peupleront l'espace.»

Signification philosophique ?

- qu'est-ce qu'un être ? (le plan n'est défini que par des cellules vivantes ou mortes ; rien ne se déplace !)

- qu'est-ce que l'autonomie ? qu'est-ce qu'un être du plan de Conway ?

- qu'est-ce que le libre-arbitre et est-il compatible avec la physique du jeu de la vie ? (il est trop facile de répondre non)

Le simple et le complexe

• Quel est le minimum de complexité qu'il faut mettre dans des règles —ou dans des lois de la physique— pour obtenir une phénoménologie riche, c'est-à-dire un monde analogue au nôtre ?

• Qu'est-ce que l'émergence ?

• Propriété statistique des séquences présente dans un univers où se déploie l'universalité (mesure de Levin associée aux configurations du Jeu de la vie)

Pratique nouvelle des mathématiques

• Mathématiques expérimentales :

alternance

preuves rigoureuses / expérimentations