# 2. Langage Naturel et Langage Formel

2019-2020

# Plan

- Exemple
- Langage naturel et le langage formel
- L'aspect syntaxique
  - Propositions (Formules)
  - Connecteurs logiques
  - Arbre de décomposition
- L'aspect sémantique
  - Tables de vérité
  - Propositions équivalentes
  - Tautologie/contradiction
  - Satisfaction

# Exemples

**Exemple 1**

1. Si le train arrive en retard et s'il n'y a pas de taxis à la gare alors l'invité arrive en retard.

2. L'invité n'est pas en retard.
3. Le train est arrivé en retard.

donc, il y avait des taxis à la gare.

***Question : Pourquoi peut-on déduire qu'il y avait des taxis à la gare ?***

# Exemples

**Exemple 2**

1. Si il pleut et si l'invité a oublié son parapluie alors l'invité est trempé.

2. L'invité n'est pas trempé.
3. Il pleut.
donc, l'invité n'a pas oublié son parapluie.

Pour justifier la déduction "l'invité n'a pas oublié son parapluie", on peut "réutiliser" le raisonnement fait précédemment.

.

# Langage naturel et langage formel

Les deux situations ont la même structure logique :

- si ... alors, alors, donc, ...

Le langage naturel et le langage formel sont complémentaire :

- Le langage naturel : la richesse, la polysémie (l’ambiguïté);

- Le langage formel : la précision, la rigueur, capable de dégager des structures logiques indépendantes du contenu afin de conduire un raisonnement valide.

# Langage naturel et langage formel

Nous pouvons formaliser Exemple 1 en définissant les propositions atomiques :

p : le train arrive en retard

q : il y a des taxis à la gare

r : l'invité est en retard

Nous construisons les propositions suivantes :

1. $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
2. $\neg r$
3. $p$

Montrer que $(p \wedge \neg q) \rightarrow r,\ \neg r,\ p \vdash q$

# Langage naturel et langage formel

Dans un langage naturel ou formel,

- La **syntaxe** concerne la *forme* ou la construction des éléments du langage.
- La **sémantique** concerne le *contenu* ou la signification des éléments du langage.

# Propositions (Formules)

- Une *proposition* : une affirmation sur un état de choses, qui a une valeur vrai ou faux (jugement).
- Une *proposition atomique :* une *variable propositionnelle (formule atomique)*
    - p, q, r
- Une *proposition composée :* une *formule propositionnelle* formée en assemblant des formules atomiques au moyen des connecteurs logiques suivant des règles syntaxiques :
    - $p \wedge \neg q$, $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

# Connecteurs logiques

- **Les connecteurs de base**

  Par exemple, p : Je bois du lait. q : Je mange du céréale.

  – Négation : ¬
    - ¬p : Je ne bois pas de lait.
  – Conjonction (et) : ∧
    - p ∧ q : Je bois du lait et je mange du céréale.
  – Disjonction (ou) : ∨
    - p ∨ q : Je bois du lait ou je mange du céréale.
  – Implication (si alors): →
    - p → q : Si je bois du lait, alors je mange du céréale.
  – Double implication (si et seulement si) : ↔
    - p ↔ q : Je bois du lait, si et seulement si je mange du céréale.

# Arbre de décomposition

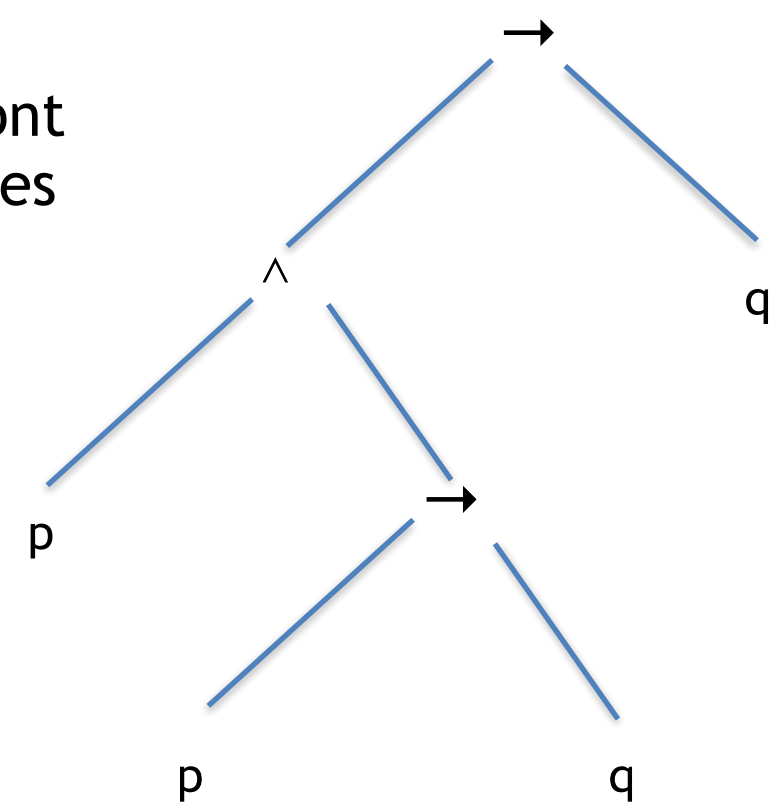
Un *arbre de décomposition* représente schématiquement la syntaxiques *d'une formule*.

- Un arbre binaire où les feuilles sont des variables et les nœuds sont des connecteurs.

***Questions :***

- *Comment construire un arbre de décomposition à partir d'une formule, ou une formule à partir d'un arbre de décomposition?*
- *Comment vérifier si une formule est bien formée ?*

$(p \land (p \rightarrow q)) \rightarrow q$



# Tables de vérité

- La *table de vérité* représente la sémantique d'une formule.
- Une table de vérité donne la valeur de vérité d’une formule à partir des valeurs de vérité de ses variables.

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| F | T |
| T | F |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \to q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | T | T |
| F | T | F | T | T | F |
| T | F | F | T | F | F |
| T | T | T | T | T | T |

# Equivalence

Deux formules p et q sont équivalentes si elles ont la même table de vérité, c'est à dire si elles sont vraies ou fausses en même temps.

Les équivalences de base :

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$p \rightarrow q = \neg p \vee q$

$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

# Tautologie

- Une formule est une *tautologie* si elle reste toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité de ses variables.
- Toutes les tautologies sont équivalentes.
- Par exemple :

  1. $p \vee \neg p$
  2. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

  p : Je bois du lait.

  q : Je mange du céréale.

  1. $p \vee \neg p$ : Je bois du lait ou je ne bois pas de lait.
  2. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ : Si je bois du lait, alors je mange du céréale, et je bois du lait, donc je mange du céréale.

# Contradiction

- Une formule est une *contradiction* si elle reste toujours fausse quelles que soient les valeurs de vérité de ses variables.
- Toutes les contradictions sont équivalentes.
- Par exemple :

  $p \wedge \neg p$ : ce n'est pas possible que je bois du lait et je ne bois pas de lait.

# Satisfiabilité

- Une formule est *satisfiable* s'il existe des valeurs de vérité de ses variables qui la rendent vraie.
- Par exemple :
  $p \rightarrow q$ : Si je bois du lait, alors je mange du céréale.