Licence Informatique S2

Contrôle Continu 2 (Logique, 2018-2019, le 4 Avril, 8:15-10:15)

Durée : 2 heures. Documents non autorisés.

N.B. : Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 Questions de cours (4 pts)

1. Qu'est-ce qu'un raisonnement ?
2. Qu'est-ce qu'une interprétation d'une formule propositionnelle ?
3. Qu'est-ce qu'une interprétation d'une formule des prédicats ?
4. Donner une formule équivalente pour $\neg\forall x\ F(x)$, $\neg\exists x\ F(x)$.

Exercice 2 (6 pts)

Soient les propositions suivantes :

(a) Tout nombre réel a un carré non-négatif

(b) Il existe au moins un nombre réel dont le carré est non-négatif

(c) Toute somme de deux nombres réels a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres

(d) Il existe deux nombres réels dont la somme a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres

On se donne l'ensemble R des réels comme le domaine d'interprétation avec des opérations arithmétiques courantes :

1. Ecrire les formules en logique des prédicats.
2. Evaluer leurs valeurs de vérité.
3. Ecrire leurs négations.

(Indication : comme le domaine d'interprétation est précisé, vous n'avez pas besoin de préciser que les variables appartiennent à R (ex : écrire $\exists x\ F(x)$ au lieu $\exists x \in R\ F(x)$)

Exercice 3 (3 pts)

Soient un langage des prédicats avec un prédicat binaire p et une fonction unaire f, et les trois formules suivantes :

(a) $F1 = \forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow p(x, f(y))$

(b) $F2 = \forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow \neg p(y, x))$

(c) $F3 = \forall x \forall y \forall z\ ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x, z))$

On se donne une interprétation suivante :

Domaine d'interprétation : l'ensemble des êtres humains

p(x,y) : x est père de y

f(x) : frère de x

1. Traduire F_1, F_2, F_3 en langage naturel.
2. F_1, F_2, F_3 sont-elles vraies ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 (3 pts)

Soit Σ: $(p\rightarrow q)\wedge(r \rightarrow\neg q) \wedge r$, et φ: $\neg p$.

1. Montrer que $\Sigma \models \varphi$ par la table de vérité.

2. Montrer que $\Sigma \vdash \varphi$ par la déduction naturelle.

Exercice 5 (4 pts)

Soit l'opérateur $\oplus$ (ou exclusif) à deux variables propositionnelles, dont la table de vérité est la suivante :

p	Q	p $\oplus$q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. Montrer avec la démonstration par récurrence que : $A1\oplus A2\ldots \oplus An$ vaut 1 pour tout $n \geq 2$ dans le cas où un nombre impair de Ai valent 1, et 0 dans le cas où un nombre pair de Ai valent 1.

2. En déduire que, si les Ai sont des propositions atomiques différentes entre elles, alors $A1\oplus A2\ldots \oplus An$ a un nombre pair des interprétations qui rendent $A1\oplus A2\ldots \oplus An$ vraie.