Licence Informatique S2

Contrôle Continu 2 (Logique, 2018-2019, le 4 Avril, 8:15-10:15)

Durée : 2 heures. Documents non autorisés.

N.B. : Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 Questions de cours (4 pts)

1. Qu'est-ce qu'un raisonnement ?
2. Qu'est-ce qu'une interprétation d'une formule en logique propositionnelle ?
3. Qu'est-ce qu'une interprétation d'une formule en logique des prédicats ?
4. Donner une formule équivalente à $\neg\forall x\ F(x)$, $\neg\exists x\ F(x)$.

Solution :

1. Qu'est-ce qu'un raisonnement ?

- Soit de façon générale : Le raisonnement est la faculté naturelle qui permet aux humains de tirer une conclusion à partir d'hypothèses qu'ils formulent.
- Soit de façon spécifique : Un raisonnement est une démonstration (preuve) qui déduit une conclusion à partir d'hypothèses (prémisses).

2. Qu'est-ce qu'une interprétation d'une formule en logique propositionnelle ?

Une interprétation d'une formule propositionnelle est une affectation des valeurs de vérité à ses n variables atomiques pour évaluer la valeur de vérité de la formule.

3. Qu'est-ce qu'une interprétation d'une formule en logique des prédicats ?

Une interprétation d'une formule en logique du premier ordre est une structure en spécifiant le domaine, les prédicats, les fonctions et les constantes concernées pour évaluer la valeur de vérité de la formule.

4. $\neg\forall x\ F(x) = \exists x\ \neg F(x)$, $\neg\exists x\ F(x) = \forall x\ \neg F(x)$.

Exercice 2 (6 pts)

Soient les propositions suivantes :

(a) Tout nombre réel a un carré non-négatif

(b) Il existe au moins un nombre réel dont le carré est non-négatif

(c) Toute somme de deux nombres réels a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres

(d) Il existe deux nombres réels dont la somme a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres

On se donne l'ensemble R des réels comme le domaine d'interprétation avec des opérations arithmétiques courantes :

1. Ecrire les formules en logique des prédicats.
2. Evaluer leurs valeurs de vérité.
3. Ecrire leurs négations.

(Indication : comme le domaine d'interprétation est précisé, vous n'avez pas besoin de préciser que les variables appartiennent à R (ex : écrire $\exists x\ F(x)$ au lieu $\exists x \in \mathbb{R}\ F(x)$))

Solution :

(a) $\forall x\ (x^2 \geqslant 0)$, vraie

(b) $\exists x\ (x^2 \geqslant 0)$, vraie

(c) $\forall x\ \forall y\ ((x+y)^2 = x^2+x^y)$, fausse

(d) $\exists x\ \exists y\ ((x+y)^2 = x^2+x^y)$, vraie

Négations :

(a) $\exists x\ (x^2<0)$

(b) $\forall x\ (x^2 < 0)$

(c) $\exists x\ \exists y\ ((x+y)^2 \neq x^2+x^y)$

(d) $\forall x\ \forall y\ ((x+y)^2 \neq x^2+x^y)$

Exercice 3 (3 pts)

Soient un langage des prédicats avec un prédicat binaire P et une fonction unaire f, et les trois formules suivantes :

(a) $F1 = \forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow p(x, f(y))$

(b) $F2 = \forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow \neg p(y, x))$

(c) $F3 = \forall x \forall y \forall z\ ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x, z))$

On se donne une interprétation suivante :

Domaine d'interprétation : l'ensemble des êtres humains

p(x,y) : x est père de y

f(x) : frère de x

1. Traduire F_1, F_2, F_3 en langage naturel.

2. F_1, F_2, F_3 sont-elles vraies ?

Solution :

- F1: Le père de tout homme est le père de son frère. (vraie)
- F2 : Quels que soient x et y, x ne peut être à la fois père et enfant de y. (vraie)
- F3 : Si x est père de y et que y est père de z, alors x est le père de z. (fausse)

Exercice 4 (3 pts)

Soit Σ: $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q) \wedge r$, et φ: $\neg p$.

1. Montrer que $\Sigma \models \varphi$ par la table de vérité.

2. Montrer que $\Sigma \models \varphi$ par la déduction naturelle.

Exercice 5 (4 pts + 1 pt de bonus)

Soit l'opérateur $\oplus$ (ou exclusif) à deux variables propositionnelles, dont la table de vérité est la suivante :

p	Q	p $\oplus$q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. Montrer par récurrence que : A1$\oplus$A2… $\oplus$An vaut 1 pour tout $n \geq 2$ dans le cas où un nombre impair de Ai valent 1, et 0 dans le cas où un nombre pair de Ai valent 1.
2. En déduire que, si les Ai sont des propositions atomiques différentes entre elles, alors A1$\oplus$A2… $\oplus$An a un nombre pair d'interprétations qui rendent A1$\oplus$A2… $\oplus$An vraie. (**1 pt de bonus**)

Solution :

1. Démonstration par récurrence

• Initialisation :

On vérifie facilement grâce à la table de vérité que $P(2)$ est vraie. ($P(2)$ est « A1$\oplus$A2 = 1 ssi le nombre des Ai à 1 est impair »)

• Hérédité :

On doit montrer que pour tout $n \geq 2$, $P(n) \vDash P(n+1)$ (*i.e.* on peut déduire $P(n+1)$ de $P(n)$).

On suppose donc que $P(n)$ est vrai et on montre qu'alors $P(n+1)$ est aussi vrai. D'après l'associativité du XOR, on a :

A1$\oplus$A2$\oplus$…$\oplus$An$\oplus$An+1 = (A1$\oplus$A2$\oplus$…$\oplus$An)$\oplus$An+1.

D'après $P(2)$, (A1$\oplus$A2$\oplus$…$\oplus$An)$\oplus$An+1 = 1 ssi

i. (A1$\oplus$A2$\oplus$…$\oplus$An)= 1 et An+1 = 0 ou

ii. (A1$\oplus$A2$\oplus$…$\oplus$An)= 0 et An+1 = 1.

Dans le premier cas, d'après l'hypothèse de récurrence ($P(n)$) le nombre de Ai à 1 dans (A1$\oplus$A2$\oplus$…$\oplus$An) est impair et comme An+1 = 0, alors le nombre de Ai à 1 dans (A1$\oplus$A2$\oplus$… $\oplus$An) est impair.

Dans le second cas, d'après l'hypothèse de récurrence ($P(n)$) le nombre de Ai à 1 dans (A1$\oplus$A2$\oplus$…$\oplus$An) est pair et comme An+1 = 1, alors le nombre de Ai à 1 dans (A1$\oplus$A2$\oplus$…$\oplus$An) est impair.

Dans les 2 cas, le nombre de a_i à 1 dans $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n \oplus a_{n+1}$ est impair et $P(n+1)$ est vérifié.

• Conclusion :

$P(2)$ est vérifiée et pour tout $n \geq 2$, $P(n) \vDash P(n+1)$ donc pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ est vérifiée.

2. Comme il y a 2^n interprétations pour une formule avec n propositions atomiques différentes, parmi lesquelles pour une moitié le nombre de A_i valent $\top$ est impair, et pour une moitié le nombre de A_i valent $\top$ est pair, donc $A_1 \oplus A_2 \ldots \oplus A_n$ a un nombre pair des interprétations qui rendent $A_1 \oplus A_2 \ldots \oplus A_n$ vraie.