Eléments de logique formelle et
du raisonnement mathématique

Eléments de la logique propositionnelle (2)

2018-2019

Plan

1. Raisonnement basé sur les régles d'inférences
2. Raisonnement basé sur la table de vérité

Raisonnement basé sur les régles d'inférence

- **Problème**

Soit Σ un ensemble de formules acquises et une formule φ, montrer que $\Sigma \models \varphi$.

- **Règle du modus ponens (M.P.)**

$$\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

Raisonnement basé sur les régles d'inférence

Exemple du cours :

Soit un ensemble des propositions :

(1) $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

(2) $\neg r$

(3) p

Montrer que q.

On peut noter :

Montrer que $\Sigma \models \varphi$, où $\Sigma = \{(p \wedge \neg q) \rightarrow r,\ \neg r,\ p\}$, $\varphi = q$.

Raisonnement par l'absurde :

Supposons que $\neg q$

1. $\neg q$ (l'hypoyhèse)
2. p (3)
3. $p \wedge \neg q$
4. $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ (1)
5. r (M.P.)
6. $\neg r$ (2)
7. $r \wedge \neg r$ (contradiction)
8. Ainsi q ne peut pas être fausse, donc p est vraie.

Raisonnement basé sur la table de vérité

Exemple :

$\Sigma = \{p \rightarrow q, p\}$, $\varphi = q$, montrer que $\Sigma \models \varphi$.

Σ peut être représenté par $(p \rightarrow q) \wedge p$, et $\Sigma \rightarrow \varphi$ par $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$.

On examine les table de vérité de $p \rightarrow q$ et $\Sigma \rightarrow \varphi$:

p	q	p→q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	Σ	φ	Σ→φ
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

- **Question :**

  Quelle est la relation entre $\Sigma \models \varphi$ et le fait que $\Sigma \rightarrow \varphi$ soit une tautologie?

Interprétation et modèle

Définition :

Soit une formule A avec n variable.

Une **interprétation** I de A est une affectation des valeurs de vérité à ses n variables.

L'interpretation I *satisfait* A lorsqu'elle rend A vraie, I(A) =1, et elle *falsifie* A lorsqu'elle rend A fausse, I(A)=0.

Toute formule avec n variables admet 2^n interpretations.

Un **modèle** de A est une interprétation qui satisfait A.

Exemple :

- $\Sigma = (p \wedge (p \rightarrow q))$: 1 modèle (p=1, q=1)
- $\varphi = q$: 1 modèle , q =1
- $\Sigma \rightarrow \varphi$ $((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$:

4 modèles

(p=0, q=0)

(p=0, q=1)

(p=1, q=0)

(p=1, q=1)

p	q	Σ	φ	$\Sigma\rightarrow\varphi$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Raisonnement basé sur la table de vérité

Principe du raisonnement basé sur la table de vérité :

1. Si tout modèle de Σ est aussi le modèle de φ, alors $\Sigma \models \varphi$.
2. Si $\Sigma \rightarrow \varphi$ est une tautologie, alors $\Sigma \models \varphi$.

On peut encore noter :

$\emptyset \models p$ (ou $\models p$) signifie que p est une tautologie.

Approches :

1. Montrer que tous les modèles de Σ sont aussi les modèles de φ.
2. Montrer que $\Sigma \rightarrow \varphi$ est une tautologie.

Raisonnement basé sur la table de vérité

Exemple (au debut du cours) :

(1) $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ (Si le train arrive en retard et s'il n'y a pas de taxis à la gare alors l'invité arrive en retard)

(2) $\neg r$ (L'invité n'est pas en retard)

(3) p (Le train est arrivé en retard)

$\Sigma = \{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \ \neg r, \ p\}$, $\varphi = q$, montrer que $\Sigma \models \varphi$.

Construire la table de vérité de Σ, et Σ a un seul modèle (p=1,r=0,q=1) qui est évidemment le modèle de $\varphi(q)$, donc $\Sigma \models \varphi$.

p	r	q(φ)	¬r	p∧¬q	(p∧¬q)→ r	Σ
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1

* C'est une table de vérité simplifiée de $\Sigma \rightarrow \varphi$ en prise en compte que les interprétation où p=1,r=0, car d'autres interpétations ne se contribue pas à la recherche des modèles de Σ.

Raisonnement basé sur l'arbre de décomposition

Exemple :

$\Sigma = \{(p \land \neg q) \rightarrow r,\ \neg r,\ p\}$, $\varphi = q$, montrer que $\Sigma \rightarrow \varphi$ est une tautologie.

Raisonnement par l'absurde :

Supposons que $((p \land \neg q) \rightarrow r) \land (\neg r \land p)) \rightarrow q$ $(\Sigma \rightarrow \varphi)$ prend la valeur 0, le developpement de l'arbre méne à une contradiction, donc $\Sigma \rightarrow \varphi$ ne peut prendre que la valeur 1, donc $\Sigma \rightarrow \varphi$ est une tautologie.