Eléments de logique formelle et
du raisonnement mathématique

Eléments de la logique propositionnelle (3)

2018-2019

Plan

- Formes Normales
- Forme normale conjonctive (FNC)
- Problème SAT
- Exemples :
    - Exercice 4 de la Série 1
    - Problème de coloration de graphe

Formes Normales

Forme normale :

- La normalisation d'une formule logique.

Deux formes normales :

- Forme Normale Disjonctive (FND)
- Forme Normale Conjonctive (FNC)

L'utilisation des FND et FNC :

- L'étude des équivalences de formules d'un langage L(p1,p2,…,pn) (FND, FNC)
- La résolution des problèmes par le problème SAT (FNC)
- La démonstration automatique de théorèmes
- etc.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Definition :

1. Une formule en FND : une disjonction de zéro ou plus clauses conjonctives.

$$C1 \vee C2 \dots \vee Cn$$

2. Une clause conjonctive Ci : une conjonction de zéro ou plus littéraux.

$$Ci = l1 \wedge l2 \dots \wedge lm$$

3. Un littéral : soit une variable propositionnelle, soit la négation d'une variable propositionnelle.

$$lj = xt \text{ ou } lj = \neg xt$$

Exemple :

- $(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$
- $(p \wedge q) \vee \neg r$
- $p \wedge q$
- $p \vee q$
- p

- Oui, elles sont en FND

- $\neg(p \vee q)$
- $p \vee (q \wedge (r \vee s))$

- Non, elles ne sont pas en FND

Théorème : Pour toute formule il existe une formule équivalente en FND.

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Definition :

1. Une formule en FNC : une conjonction de zéro ou plus clauses disjonctives.

   $C1 \wedge C2 \ldots \wedge Cn$

2. Une clause disjonctive Ci: une disjonction de zéro ou plus littéraux.

   $Ci = l1 \vee l2 \ldots \vee lm$

Exemple :

- $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
- $(p \vee q) \wedge r$
- $p \wedge q$
- $p \vee q$
- p

- Oui, elles sont en FNC

- $\neg(p \wedge q)$
- $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$

- Non, elles ne sont pas en FNC

Théorème : Pour toute formule il existe une formule équivalente en FNC.

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Construire une formule en FNC équivalente

1. Etant donné une table de vérité, construire une formule en FNC
2. Etant donné une formule, la convertir en FNC en utilisant des équivalences de formules

Les équivalences :

- L'élimination de double négations

  $\neg\neg A = A$

- L'élimination de l'implication

  $A \rightarrow B = \neg A \vee B$

- La lois de De Morgan

  $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

  $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

- La loi de distributivité

  $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

  $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

En cas général, la conversion peut mener à un allongement exponentiel de la formule.

Exemple :

$(x1 \wedge y1) \vee (x2 \wedge y2)$

$= (x1 \vee x2) \wedge (y1 \vee x2) \wedge (x1 \vee y2) \wedge (y1 \vee y2)$

$(x1 \wedge y1) \vee (x2 \wedge y2) \vee \ldots (xn \wedge yn)$ (2n termes)

$= (x1 \vee \ldots \vee xn\text{-}1 \vee xn) \wedge (x1 \vee \ldots \vee xn\text{-}1 \vee yn) \vee \ldots (y1 \vee \ldots \vee yn\text{-}1 \vee yn)$ (2^n terme)

Problème SAT

Deux points de vue

- Raisonnement en logique :

  Déterminer si une formule est valide (tautologie).
- Résolution de problème en informatique (Problem solving):

  Déterminer si une formule est satisfiable (SAT).

Par exemple :

- $((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \wedge \neg r \wedge p) \rightarrow q$ est valide (tautologie), satisfiable
- $((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \wedge \neg r) \rightarrow q$ n’est pas valide, mais satisfiable

Validité vs Satisfiabilité

- A est valide $\Leftrightarrow$ $\neg$A n’est pas satisfiable.
- A est satisfiable $\Leftrightarrow$ $\neg$A n’est pas une tautologie.

SAT est un problème fondamental en informatique et en mathématique, avec beaucoup d’applications.

Problème SAT

La résolution d'un problème par le problème SAT en deux étapes :

1. Modélisation du problème
   - Représenter les éléments du problème en variables propositionnelles
   - Représenter les contraintes du problème en clauses disjonctives et formuler une formule en FNC
2. Résolution du problème par un SAT-solveur
   - Coder les variables et les clauses
   - Exécuter le solveur et intépréter la solution obtenue

Exercice 4 de la Série 1

Problème :

Un homme qui semble divaguer déclare à toute la clientèle d'un café :

(1) Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors.

(2) Le jour où je ne mange pas, ou bien je ne suis pas content, ou bien je dors ou les deux.

(3) Le jour où je mange, ou bien je suis content, ou bien je bois ou les deux.

(4) Aujourd'hui, je suis content.

(5) Le jour où je ne bois pas et je dors, je ne suis pas content.

Question : a-t-il bu? a-t-il mangé ? a-t-il dormi ?

Exercice 4 de la Série 1

1. Modélisation du problème en FNC

- Représenter les propositions en formules :

(1) $b \rightarrow (\neg c \wedge d)$

(2) $\neg m \rightarrow (\neg c \vee d)$

(3) $m \rightarrow (c \vee b)$

(4) c

(5) $(\neg b \wedge d) \rightarrow \neg c$

Exercice 4 de la Série 1

- **Convertir les formules en FNC :**

(1) $b \rightarrow (\neg c \wedge d)$

$= \neg b \vee (\neg c \wedge d)$

$= (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee d)$

(2) $\neg m \rightarrow (\neg c \vee d)$

$= m \vee \neg c \vee d$

$= \neg c \vee d \vee m$

(3) $m \rightarrow (c \vee b)$

$= \neg m \vee c \vee b$

$= b \vee c \vee \neg m$

(4) c

(5) $(\neg b \wedge d) \rightarrow \neg c$

$= \neg (\neg b \wedge d) \vee \neg c$

$= b \vee \neg d \vee \neg c$

$= b \vee \neg c \vee \neg d$

FNC： $F = (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d \vee m) \wedge (b \vee c \vee \neg m) \wedge c \wedge (b \vee \neg c \vee \neg d)$

Exercice 4 de la Série 1

2. Résolution du problème par un SAT-solveur

• Coder les variables :

b : 1; ¬b : -1

c : 2; ¬c : -2

d : 3; ¬d : -3

m : 4; ¬m : -4

• Coder les clauses :

(1) (¬b ∨ ¬c) ∧ (¬b∨d)

-1 -2 0

-1 3 0

(2) ¬c∨d∨m

-2 3 4 0

(3) b ∨ c ∨ ¬m

1 2 -4 0

(4) c

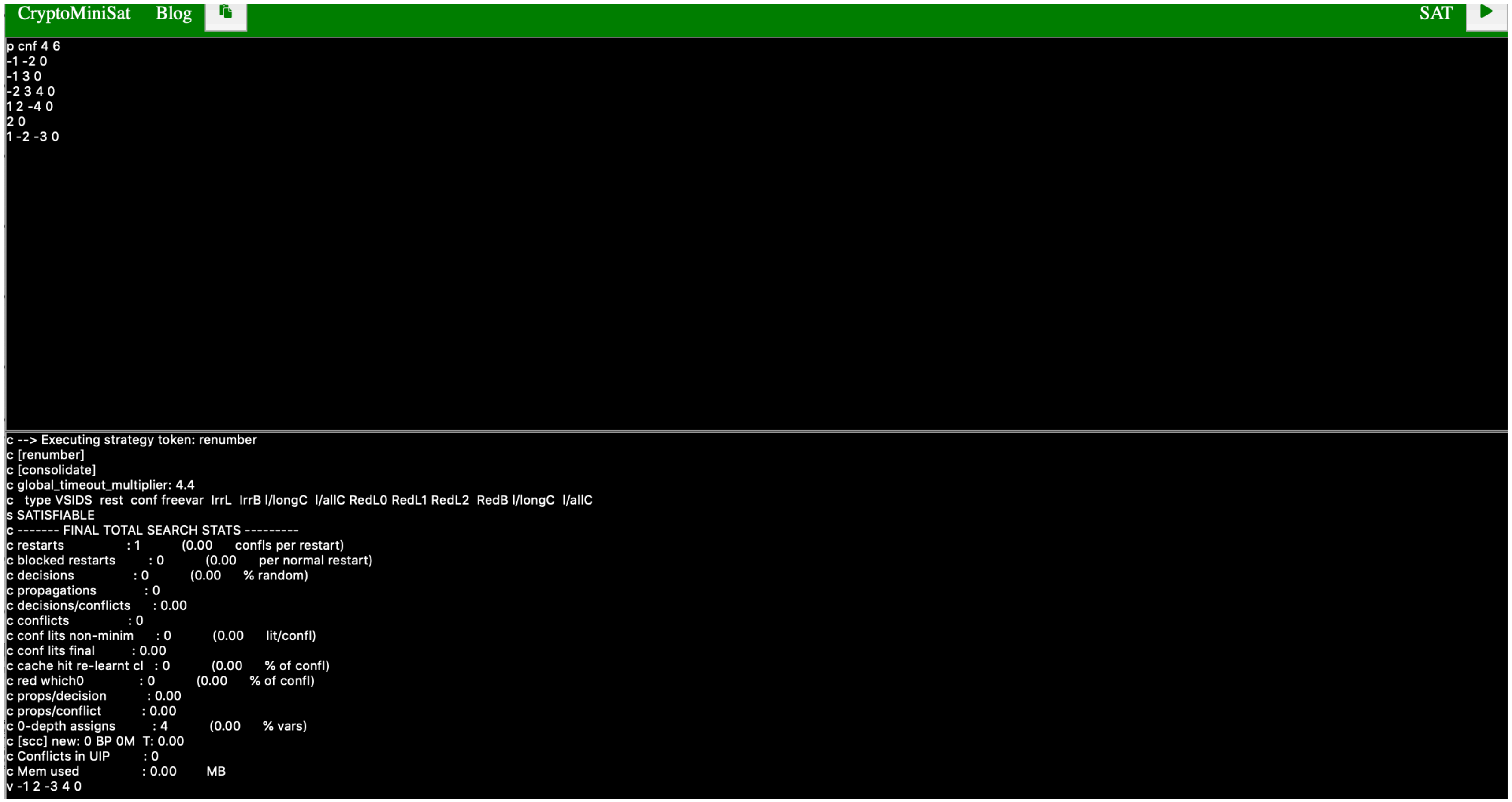
2 0

(5) b∨¬c∨¬d

1 -2 -3 0

Exercice 4 de la Série 1

- Exécuter sur un solveur (https://msoos.github.io/cryptominisat_web/) basé sur MiniSAT (http://minisat.se/)



Exercice 4 de la Série 1

Fichier CNF:

p cnf 4 6

-1 -2 0

-1 3 0

-2 3 4 0

1 2 -4 0

2 0

1 -2 -3 0

- Interpréter la solution :

La solution : v -1 2 -3 4 0

¬b, c, ¬d, m (il n’a pas bu; il est content; il n’a pas dormi; il a mangé)

Problème de coloration de graphe

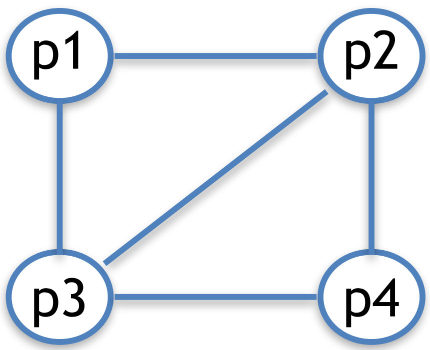
Problème du chargement :

Il y a un ensemble de produits chimiques sont à transporter. Or nous avons une liste d’interdiction de chargement dans le même container, que nous devons respecter pour des raisons de sécurité du transport.

Par exemple, il y a 4 produit p1,p2,p3,p4, et les contraintes de chargement sont le suivant :

- il ne faut pas mettre dans un même container p1 et p2
- il ne faut pas mettre dans un même container p1 et p3
- il ne faut pas mettre dans un même container p2 et p3
- il ne faut pas mettre dans un même container p2 et p4
- il ne faut pas mettre dans un même container p3 et p4

Les contriantes peuvent être représenté par un graphe, et dans ce cas ce problème peut être transformé en porblème de coloriage de graphe :



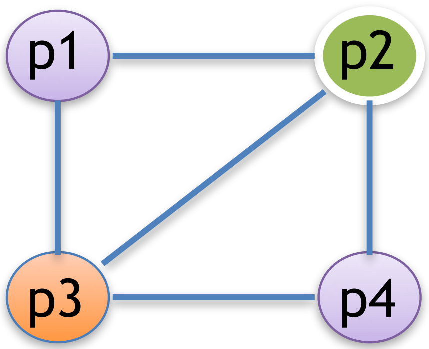
Problème de coloration de graphe

Problème de coloriage de graphe :

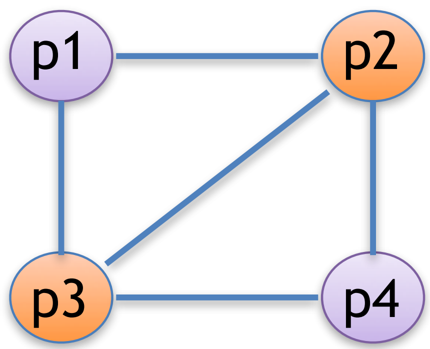
Etant donné un graphe non-orienté, colorier une couleur à un sommet de manière que deux sommets adjacents ne peuvent pas recevoir une même couleur.

Le problème consisite à trouver un nombre minimal de couleurs.

Chargement 1 (autorisé) : p1,p4 dans un container violet; p2 dans un container vert; p3 dans un container orange.



Chargement 1 (non-autorisé) : p1,p4 dans un container violet; p2,p3 dans un container vert.



Problème de coloration de graphe

1. Modélisation du problème

- Représenter les éléments du problème en variables propositionnelles

  4*3=12 variables propositionnelles :

  xij = 1, si le noeud i est colorié de couleur j

  xij = 0, sinon

  3 couleurs : {violet (1), vert (2), orange (3)}

Problème de coloration de graphe

- Représenter les contraintes du problème en clauses disjonctives et formuler FNC

  Le noeud 1 reçoit une seule couleur :

  $x11 \vee x12 \vee x13$

  $\neg\, x11 \vee \neg\, x12$

  $\neg\, x11 \vee \neg\, x13$

  $\neg\, x12 \vee \neg\, x13$

  Le noeud 1 et le neud 2 ne peuvent pas recevent une même couleur :

  $\neg\, x11 \vee \neg\, x21$

  $\neg\, x12 \vee \neg\, x22$

  $\neg\, x13 \vee \neg\, x23$

  Le même démarche pour les noeuds 2, 3, 4, et les contraintes avec leurs noeuds adjacents, …

  FNC : $(x11 \vee x12 \vee x13) \wedge (\neg\, x11 \vee \neg\, x12) \wedge (\neg\, x11 \vee \neg\, x13) \wedge (\neg\, x12 \vee \neg\, x13) \wedge (\neg\, x11 \vee \neg\, x21) \wedge (\neg\, x12 \vee \neg\, x22) \wedge (\neg\, x13 \vee \neg\, x23) \wedge \ldots$

Problème de coloration de graphe

2. Résolution du problème par un SAT-solveur

- Exécuter sur un SAT-solveur basé sur Minisat (http://minisat.se/)

- Obtenir une solution et l'interpréter :

x11=1, x22=1, x33=1, x41=1, les autres variables prennent la valeur 0. p1,p4 dans un container violet; p2 dans un container vert; p3 dans un container orange.