Eléments de logique formelle et
du raisonnement mathématique

Théorie de la démonstration

2018-2019

Plan

- Théorème et démonstration
- Démonstration par la table de vérité
- Démonstration par la déduction (les règles d'inférence)
- Démonstration par l'informatique

Théorème et démonstration

Exemple :

- Une proposition $p \rightarrow q$:

p : il neige

q : je reste à la maison

- Théorème de Pythagore, noté $a \rightarrow b$:

a : un triangle ABC est rectangle en A

b : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Question :

- Qu'est-ce que vous pensez de ces deux propsitions $p \rightarrow q$ et $a \rightarrow b$?
- Qu'est-ce qu'un théorème ? une démonstration ?

Exemple

Théorème de Pythagore :

- Si un triangle *ABC* est rectangle en *A*, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Démonstration d'Euclide :

- La démonstration s'appuie sur les précédentes propositions, en particulier la proposition IV et la proposition XLI du livre « L'élément ».

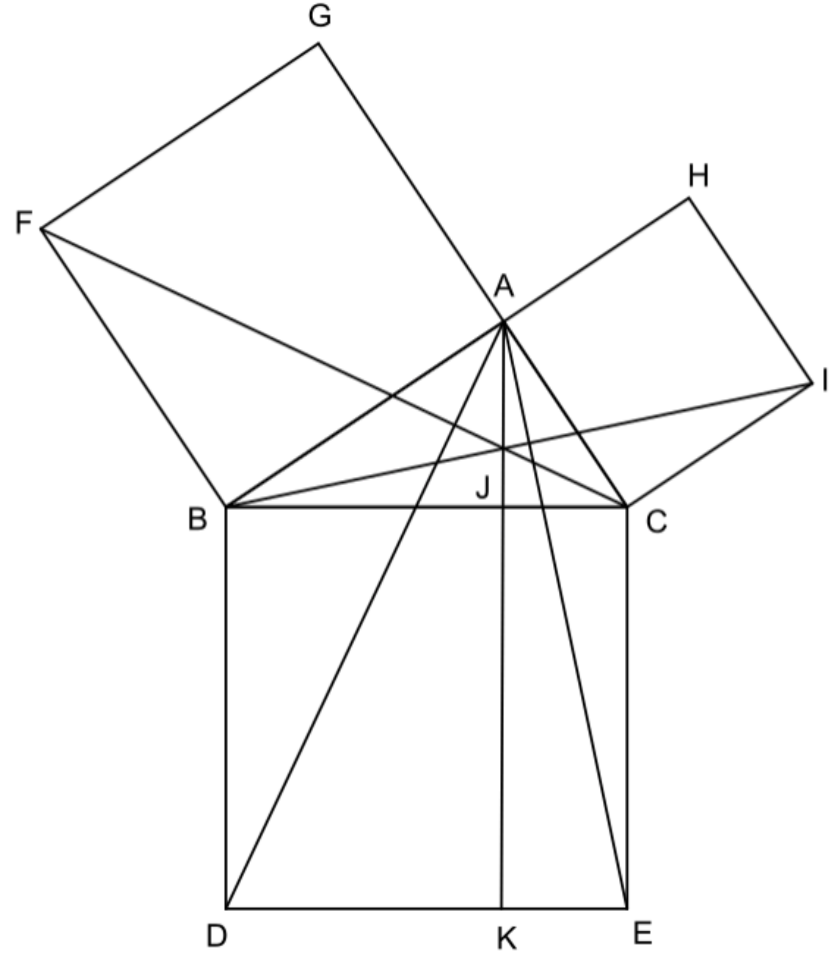


Figure pour la démonstration d'Euclide, dite parfois « du moulin à vent ».

Théorème et démonstration

Théorème

Un théorème (en grec « théorêma », objet digne d'étude) est une proposition prouvée (démonstrée).

Un théorème montre que tous les éléments d'une classe donnée ont une relation invariante qui est établie indifféremment à tout moment, sans exception.

Démonstration

La démonstration d'un théorème est interprétée comme une justification (preuve, argumentation) de la validité du théorème.

Théorie de la démonstration

La théorie de la démonstration (preuve) est pour l'objectif d'étudier la démonstration des théorèmes.

Théorie

Une théorie (en grec theorein, « contempler, observer, examiner ») est un ensemble cohérent d'explications, de notions ou d'idées sur un sujet précis.

Théorème et démonstration

Lorsque un théorème est exprimé sous la forme d'une implication ($\Sigma \rightarrow \varphi$), la démonstration déduit la conclusion φ à partir de la condition Σ (*hypothèse*, prémisse) du théorème.

La conclusion est le *conséquence* nécessaire de la condition, c'est-à-dire, la condition est vraie et la conclusion nécessairement est vraie, sans d'autres hypothèses supplémentaires.

Une *conjecture* est une proposition qui croit être vraie mais non prouvée, mais quand c'est prouvée, c'est le théorème.

Attention au sens de hypothèse dans ce contexte.

Théorème et démonstration

Conjecture de Collatz (conjecture de Syracuse, problème 3*x* + 1) :

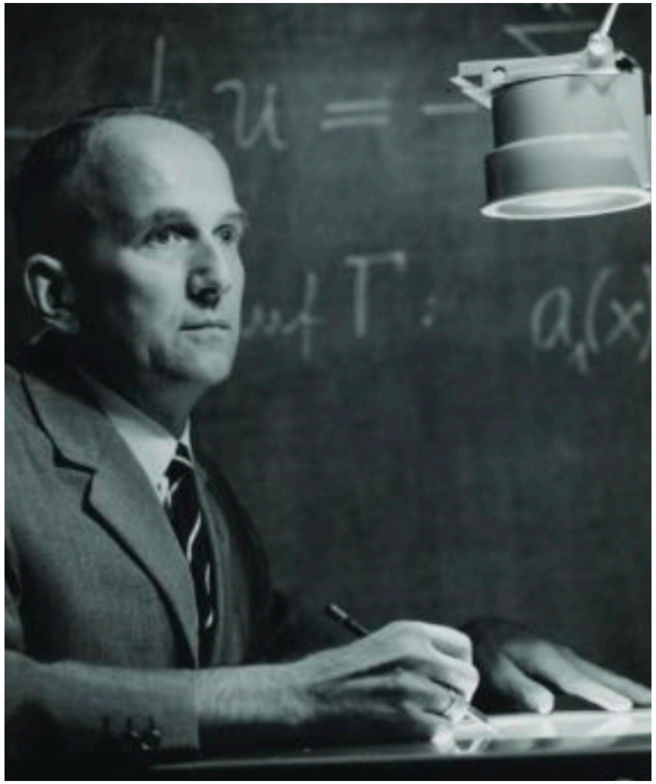
La conjecture affirme que pour tout *N*,

- s'il est pair, vous le divisez par 2;
- s'il est impair, vous le multipliez par 3 et vous ajoutez 1.

il existe un indice n tel que $u_n = 1$.

Par exemple, N=14 : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2…

Petit indice : la conjecture a déjà été **vérifiée numériquement jusqu'à 10^20** (par Tomas Oliveira e Silva) !



« les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes »
- Paul Erdős

Théorème et démonstration

Théorème de complétude du calcul propositionnel

En logique propositionnelle, le théorème est équivalent à la tautologie.

Deux types de démonstrattion pour démontrer un théorème $\Sigma \rightarrow \varphi$

- basée sur la table de vérité : on montre que toute interprétation de Σ rend Σ vrai rend aussi φ vrai, noté $\Sigma \models \varphi$.
- basée sur les règles d'inférence (*déduction naturelle, déduction axiomatique*) : on montre que $\Sigma \rightarrow \varphi$ est prouvable en utilisant un système de déduction, noté $\Sigma \vdash \varphi$.

Théorème et démonstration

Schéma d'un théorème

$\{H1, H2, \ldots, Hk\} \vdash \varphi$

- Condition : $\Sigma = \{H1, H2, \ldots, Hk\}$, les hypothèses.
- Conclusion : φ, le conséquence.
- Démonstration : $A1, A2, \ldots, At, At=\varphi$, un enchaînement d'inférences logiques se terminant par φ à partir de Σ.

Schéma d'une démonstration

Une démonstration s'écrit par le biais d'une suite (finie) de formules telles que : $A1, A2, \ldots, At, At=\varphi$.

A chaque ligne figure se situe une formule suivie de sa justification indiquant s'il s'agit d'une hypothèse ou d'une règle d'inférence.

Démonstration d'un théorème

Exemple :

Soient $H1 = p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $H2 = q$, $\Sigma = \{H1, H2\}$, $\varphi = p \rightarrow r$

- Montrer $\Sigma \models \varphi$ par la table de vérité.

- Montrer $\Sigma \vdash \varphi$ par la déduction naturelle.

- Montrer $\Sigma \vdash \varphi$ par la déduction axiomatique

Démonstration d'un théorème

1. Démonstration par la table de vérité

H1=p → (q → r), H2=q, Σ = {H1,H2}, φ = p → r

p	q	r	$(q \to r)$	$p \to (q \to r)$	$(p \to (q \to r)) \wedge q$	$p \to r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Démonstration d’un théorème

2. Démonstration par la déduction naturelle

Soient Σ :

H1 = $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

H2 = q

$\varphi = p \rightarrow r$

Démonstration :

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r) = \neg p \vee \neg q \vee r$ (H1)
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r) = \neg p \vee \neg q \vee r$ (équivalence)
3. q (H2)
4. $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge q$ (introduction de $\wedge$ de (1) et (2))
5. $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge q = (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q) \vee (r \wedge q) = (\neg p \wedge q) \vee (r \wedge q) = q \wedge (\neg p \vee r)$ (équivalence)
6. $\neg p \vee r$ (élimination de $\wedge$)
7. $p \rightarrow r$

Démonstration d'un théorème

3. Démonstration par la déduction axiomatique

Soit les axiomes de la logique propositionnelle (l'axiomatique d'Hibert) :

L={

L1 : $A \to (B \to A)$

L2 : $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

L3 : $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$

}, où A, B, C sont des formules quelconques.
$H1 = p \to (q \to r)$, $H2 = q$, $\Sigma = \{H1, H2\}$, $\varphi = p \to r$, montrer que $(L \cup \Sigma) \vdash \varphi$

Démonstration :

1. $p \to (q \to r)$ (H1)
2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)
3. $(p \to q) \to (p \to r)$ (M.P.)
4. $q \to (p \to q)$ (L1)
5. q (H2)
6. $p \to q$ (4+5, M.P.)
7. $p \to r$. (3+6, M.P.)

Déduction axiomatique

La déduction axiomatique a été développé par de nombreux logiciens (Gottlob Frege, David Hilbert, Bertrand Russell etc.) en inspirant de la méthode euclidienne.

Par exemple :

- L'axiomatique d'Hilbert
- L'arithmétique de Peano
- Etc.

Déduction axiomatique

La déduction axiomatique est structurée :

Trois « ingrédients » :

- Un ensemble spécial L de formules appelé **axiomes**
- Un ensemble Σ « approprié » de formules appelé **hypothèses**
- Une **règle d'inférence** qui permet à partir d'un ensemble de formules « approprié » construire une nouvelle formule φ

Un objectif :

étant donnée un ensemble de formules Σ et une formule φ, construire une suite (finie) de formules : A1, A2, …, At, At=φ.

Axiome

- **Un axiome** (en grec *axioma*, « digne, convenable, évident en soi ») désigne une proposition non démontrée, utilisée comme fondement d'un raisonnement ou d'une théorie mathématique.

Déduction axiomatique

L'approche axiomatique classique dite d'Hilbert en logique propostionnel :

- L= {

L1 : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

L2 : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

L3 : $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

}

où A, B, C sont des formules quelconques.

Question : Il est possible d'exprimer toute formule à *partir des propositions atomiques et des {¬, →} (voir l'exercice 4 de CC1) ?*

- Règle d'inférence Modus Ponens : si on a A et $A \rightarrow B$, alors on a B.

Déduction naturelle

La déduction naturelle est proposée par Gerhard Gentzen en 1934, en abandonnant partiellement l’approche axiomatique, et redonnant à la logique le caractère d’un cheminement naturel, c'est-à-dire se rapprochant mieux de la pratique mathématique.

La principale idée de Gentzen était simple : remplacer les axiomes logiques nécessaires mais peu naturels de l’approche d’Hilbert par des règles d’inférence comme l'introduction et l'élimination des connecteurs qui sont basées sur les équivalences des formules.

Déduction naturelle

Le tableau suivant donne les *règles d'inférence* *(l'introduction* et *l'élimination* des connecteurs →, ∧ et ⊥).

	Règles d'introduction	Règles d'élimination
et	$(\wedge I)\ \dfrac{p \qquad q}{p \wedge q}$	$(\wedge E)\ \dfrac{p \wedge q}{p} \qquad \dfrac{p \wedge q}{q}$
ou	$(\vee I)\ \dfrac{p}{p \vee q} \qquad (\vee I)\ \dfrac{q}{p \vee q}$	$(\vee E)\ \dfrac{p \vee q \qquad \begin{matrix}[p] \\ \vdots \\ r\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[q] \\ \vdots \\ r\end{matrix}}{r}$
implique	$(\rightarrow I)\ \dfrac{\begin{matrix}[p] \\ \vdots \\ q\end{matrix}}{p \rightarrow q}$	$(\rightarrow E)\ \dfrac{p \qquad p \rightarrow q}{q}$
faux	$(\bot I)\ \dfrac{p \qquad \neg p}{\bot}$	$(\bot E)\ \dfrac{\bot}{p}$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Déduction_naturelle

Démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence fait partie de raisonnements par déduction. Par exemple :

Théorème :

Pour tout entier positif n, la somme des entiers de 1 à n vaut n(n+1)/2.

Démonstration (par récurrence) :

P(n) : la somme S des entiers de 1 à **n** vaut **n(n+1)/2**

- **Initialisation** : La somme S des entiers de 1 à **1** vaut **1** x (**1**+1) / 2, soit 1. P(1) est vraie
- **Hérédité** : si P(n) est vraie et S= (n+1)(n)/2, alors S=(n+1)(n+2)/2 et P(n+1) est vraie.
- **Conclusion** : Pour n'importe quel entier positif n, la somme des entiers de 1 à n vaut n(n+1)/2

Une légende raconte que **Carl Friedrich Gauss** calcule la somme de tous les nombres entiers de 1 à 100 par l'intuition, ...

Démonstration par l’informatique

Exemple

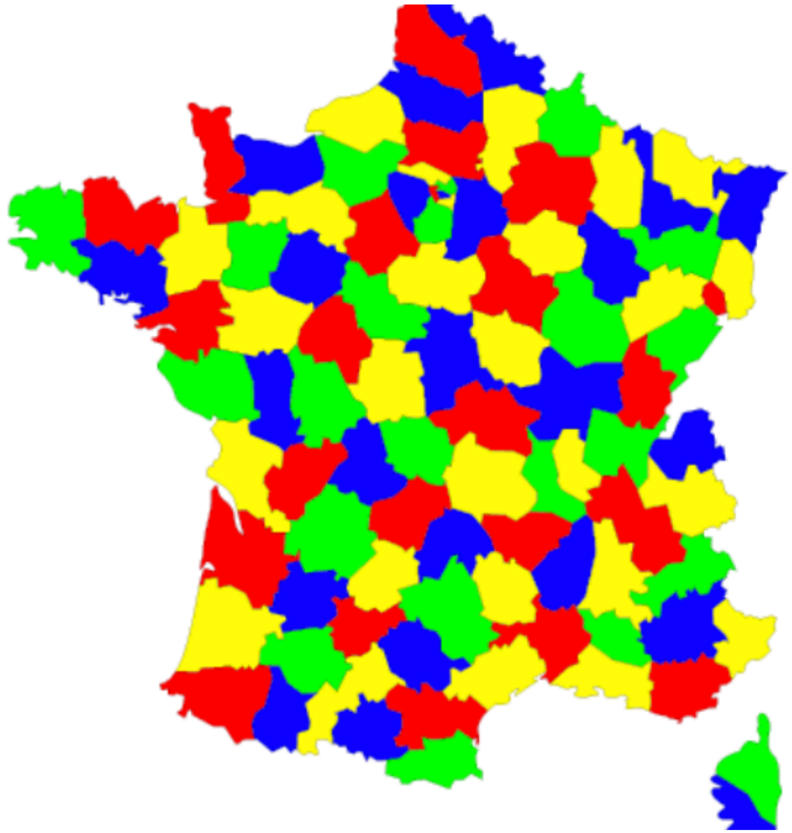
Théorème des quatre couleurs :

La possibilité de colorier avec quatre couleurs seulement une carte géographique sans que deux pays voisins aient la même couleur.

Démonstration :

En 1976, le mathématiciens américains Kenneth Appel et le mathématicien allemand Wolfgang Haken montrent en utilisant des dizaines de milliers de figures, que toute carte non 4-coloriable doit contenir l'une des 1478 configurations, et, avec 1200 heures de calcul, que ces configurations sont réductibles.

C'est en fait la première preuve informatisée d'un théorème mathématique !



https://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/les-developpements/388-le-theoreme-des-quatre-couleurs