Eléments de logique formelle et
du raisonnement mathématique

Eléments de la logique des prédicats

2018-2019

Chapitre 7

1. Passage de la logique propositionnelle à la logique des prédicats
2. Formules
3. Interprétation et évaluation des formules
4. Théorie de la démonstration
5. Problème de la décision

Passage de la logique propositionnelle à la logique des prédicats

Limits de la logique propositionnelle

Considérons un raisonnement ordinaire (*syllogisme*) :

Exemple 1

- Socrate est un homme
- les hommes sont mortels
- donc Socrate est mortel

Il est impossible d'établir un liens logique en logique propositionnelle, et formaliser ce raisonnement :

Modélisation en logique propositionnelle

p : Socrate est un homme

q : les hommes sont mortels

r : Socrate est mortel

$\Sigma = \{p,q\}$, $\varphi = r$

Montrer que $\Sigma \models \varphi$ ($\Sigma \vdash \varphi$).

Passage de la logique propositionnelle à la logique des prédicats

Considérons un raisonnement simple en mathématique :

Exemple 2

- Le successeur d'un nombre pair est impair
- 2 est un nombre pair
- Le successeur de 2 est 3
- donc 3 est impair

Ce type de raisonnement est encore impossible à formaliser en logique propositionnelle.

Passage de la logique propositionnelle à la logique des prédicats

Exemple 1

Modélisation en logique des prédicats :

- Domaine d'interprétation D : tous les entités
- s : une constante pour Socrate
- x : une variable
- $h(x)$: x est un homme
- $m(x)$: x est mortel

Formaliser deux hypothèses :

- H1 : $h(s)$
- H2 : $\forall x\ (h(x) \rightarrow m(x))$

$\Sigma = \{H1, H2\}$, $\varphi = m(s)$

Montrer que $\Sigma \models \varphi$ ($\Sigma \vdash \varphi$).

Déduction naturelle :

1. $h(s)$ (H1)
2. $\forall x\ (h(x) \rightarrow m(x))$ (H2)
3. $h(s) \rightarrow m(s)$ (quantificateur universel)
4. $m(s)$ (M.P. 1+3)

Passage de la logique propositionnelle à la logique des prédicats

Exemple 2

Modélisation en logique des prédicats :

- Domaine d'interprétation D : tous les entiers
- succ(x) : Le successeur d'un nombre x
- pair(x) : un nombre x est pair
- impair(x) : un nombre x est impair

Formaliser des hypothèses :

- H1 : pair(2)
- H2 : succ(2) = 3
- H3 : $\forall x$ (pair(x) $\rightarrow$ impair(succ(x)))

Σ = {H1, H2, H3}, φ = impair(3)

Montrer que $\Sigma \models \varphi$.

Déduction naturelle :

1. pair(2) (H1)
2. $\forall x$ (pair(x) $\rightarrow$ impair(succ(x))) (H3)
3. pair(2) $\rightarrow$ impair(succ(2)) (quantificateur universel)
4. impair(succ(2)) (M.P. 1+3)
5. donc impair(3)

Formules

Intuitivement, la logique des prédicats du premier ordre s'intéresse aux relations entre des entités.

La logique du premier ordre, par opposition aux logiques d'ordre supérieur, où les variables ne peuvent être à leur tour des prédicats.

Termes et fonctions

Un terme exprime une entité désignée par une constante, une variable ou l'application d"une fonction $f(x1,x2,\dots,xn)$:

- s, x (Exemple 1)
- x (Exemple 2)
- succ(x)

Prédicats

Un prédicat exprime une propriété, ou une relation entre des termes :

- h(x), m(x), pair(x), impair(x)
- $\forall x\ (h(x) \rightarrow m(x))$
- $\forall x\ (pair(x) \rightarrow impair(succ(x)))$

Quantificateurs

- $\forall x\ F(x)$ (universel quantificateur) : Pour tout x dans le domaine D, on a F.
- $\exists x\ F(x)$ (existentiel quantificateur) : Il existe un x dans le domaine D, pour lequel on a F.

Négations des quantificateurs

- $\neg\forall x\ F(x) = \exists x\ \neg F(x)$
- $\neg\exists x\ F(x) = \forall x\ \neg F(x)$

Formules

Formules atomiques

Un prédicat est une formule atomique.

Formules composées

On les construit à partir des formules atomiques en appliquant des connecteurs et des quantificateur.

Noter, un langage du premier ordre de signature S=(C, F, R), où C est un ensemble des constantes, F un ensemble des fonctions, et R un ensemble des prédicats

Variables libres et variables liées

Si une variables est quantifiée dans une formule, elle est liée; sinon elle est libre.

Formule close

Les formules ne comprenant aucune variable libre.

Interprétation et évaluation

Interprétation

Une interprétation d’une formule en logique du premier ordre est une structure dans laquelle on donne un sens à la formule.

Une interprétation consiste à :

1. spécifier un domaine D d’interprétation
2. «instancier » les fonctions
3. «instancier» les prédicats
4. donner à chaque constante c une valeur dans D

Interprétation et évaluation

Formule satisfaisable

Une formule est satisfaisable s'il existe une interprétation qui la rend vraie.

Formule valide

On dit qu'une formule F du langage est une formule valide si cette formule est vraie dans toute interprétation du langage, ce qu'on note $\models F$.

Interprétation et évaluation

Exemple 3

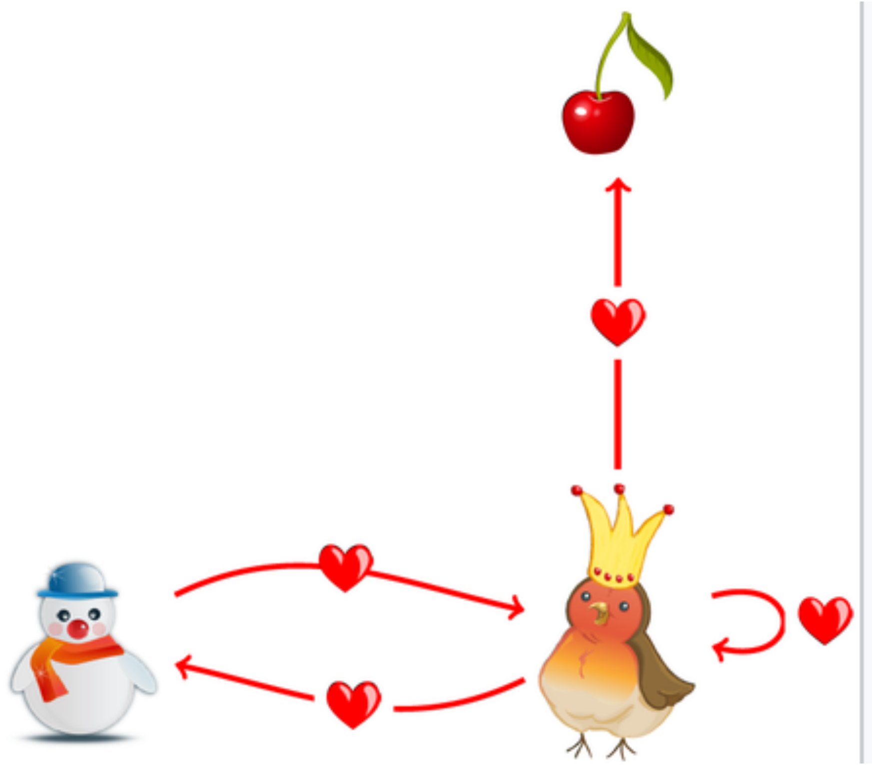
Soient un langage du premier ordre avec un prédicat binaire R, et deux formules :

F1 : $\exists x \forall y\, R(x,y)$

F2 : $\exists x \forall y\, \neg R(x,y)$

On se donne une interprétation :

- D = {b=un bonhomme de neige, o=un oiseau, c=une cerise}.
- R(x,y) : x aime y.



1. Donner la valeur de vérité de F1 et F2 dans l'interprétation.
2. Montrer que

$\exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\, R(x,y)$ est valide

Interprétation et évaluation

1. Donner la valeur de vérité de F1 et F2 dans l'interprétation.

F1 : $\exists x \forall y\ R(x,y)$

F2 : $\exists x \forall y\ \neg R(x,y)$

F1 est vraie dans l'interprétation, car il existe un élément (l'oiseau) qui aime tout le monde : $R(o,b)$, $R(o,c)$, $R(o,o)$

F2 est vraie dans l'interprétation, car il existe un élément (la cerise) qui n'aime personne : $\neg R(c,b)$, $\neg R(c,o)$, $\neg R(c,c)$

Interprétation et évaluation

2. Montrer que

- $\exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\, R(x,y)$ est valide

Toute interprétation rend la formule vraie, donc la formule est valide.

- $\forall y \exists x\, R(x,y) \rightarrow \exists x \forall y\, R(x,y)$ n'est pas valide.

En effet, dans une interprétation avec deux éléments {a, b} et où aime(a,a), aime(b,b), $\forall y \exists x$ aime(x,y) est vrai, mais $\exists x \forall y$ aime(x,y) est fausse.

Cette implication rend la formule fausse, donc la formule n'est pas valide.

Théorie de la démonstration

(Cette partie est en option pour CC2)

Une démonstration (preuve) consiste toujours en une suite de formules dans laquelle il est fait usage d’axiomes, d’hypothèses et de règles d’inférence.

Ce qui change en logique des prédicats c’est qu’on doit ajouter un certain nombre d’axiomes et de règles afin de reglementer l’utilisation des quantificateurs.

Problème de la décision

En logique mathématique, on appelle problème de la décision le fait de déterminer de façon mécanique (par un algorithme) si un énoncé est un théorème de la logique du premier ordre, c’est-à-dire s'il se dérive dans un système de déduction (par exemples, déduction naturelle, déduction axiomatique d'Hilbert) sans autres axiomes que ceux du système.

La question du problème de la décision remonte à Leibniz qui, au xviie siècle, imaginait la construction d'une machine qui pouvait manipuler des symboles fin de déterminer les valeurs des énoncés mathématiques.

Problème de la décision

En 1928, David Hilbert pose le problème de la décision tel que nous le connaissons aujourd'hui.

En 1931, Kurt Gödel donne une réponse négative à ce problème pour l'arithmétique.

En 1936, Alan Turing et Alonzo Church donnent chacun une réponse négative à ce problème pour l'arithmétique.

Ces travaux ont marqué un tournant dans l'histoire de la logique, plus général de la science, …