Licence Informatique S2

Contrôle Continu 1 (Logique, 2018-2019)

Durée : 2 heures. Documents non autorisés.

N.B. : Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 Questions de cours (4 pts)

1. Combien existe t-il d'interprétations d'une formule construite sur 2 variables propositionnelles ? (Justifier la réponse)
2. Combien existe t-il de formules non équivalentes pour un langage construit sur 2 variables propositionnelles ? (Justifier la réponse)
3. Donner une formule équivalente à $p \rightarrow q$ avec comme seuls connecteurs $\neg$ et $\vee$.
4. Si dans une formule propositionnelle P valide (tautologie) nous avons une variable propositionnelle x, alors si nous remplaçons cette variable x par une formule Q dans P, la formule P reste valide ? (Justifier la réponse)

Solution :

1. 2^2 = 4 interprétations.

Une interprétation d'une formule de p et q est une combinaison de valeurs de vérité (0 ou 1) de p et q. Toute formule A de p et q admet 4 interpretations.

p	q	A
0	0	*
0	1	*
1	0	*
1	1	*

2. 2^(2^2) = 2^4 = 16 formules non équivalentes.

L'ensemble de valeur de vérité d'une formule A de p et q correspond à une colonne de 4 chiffres de 0 ou 1, il y a donc 2^4 tables de vérité.

3. $p \rightarrow q = \neg p \vee q$

4. Oui.

Une formule propositionnelle P valide (tautologie) est une proposition composée qui reste toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité données à ses propositions atomiques (élémentaires).

Exercice 2 (2 pts)

Montrer que les formules suivantes sont des tautologies :

(a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(b) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Solution :

(a) et (b) sont tautologies.

Trois raisonnements possibles pour justifier :

1. Par la table de vérité

2. Par l'arbre de décomposition

3. Par l'équivalence des formules

Exercice 3 (6 pts)

Considérons l'énoncé suivant:

L'accusé n'a pu se rendre coupable du crime que s'il était à New-York à 18 heures le 1er janvier. Mais il a été établi qu'il était à ce moment-là à Washington. Il faut montrer que l'accusé n'est pas coupable du crime.

Question :

1. Modéliser le problème de la façon suivante :

c : L'accusé est coupable

n : Il était à New-York à 18 heures le 1er janvier

w : Il était à ce moment-là à Washington

L'énoncé est représenté par la formule : $A = ((c \rightarrow n) \wedge w) \rightarrow \neg c$

(1) Ecrire la table de vérité de la formule A.

(2) Donner une forme normale disjonctive (FND) pour A à partir de sa table de vérité.

(3) Cette formule est-elle valide ? Justifier votre réponse.

(4) Cette formule est-elle satisfiable ? Justifier votre réponse.

(5) Peut-on montrer que l'accusé n'est pas coupable du crime à partir de A ?

2. Ajouter une nouvelle proposition impliquée dans l'énoncé qui permettra de construire une formule B à partir de A, afin de pouvoir démontrer que l'accusé n'est pas coupable. Vérifier formellement que l'accusé n'est pas coupable à partir de B.

Solution :

1. (1) La table de vérité de $((c \rightarrow n) \wedge w) \rightarrow \neg c$:

c	n	w	$c \rightarrow n$	$((c \rightarrow n) \wedge w)$	A
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1

1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

(2) FND : la disjonction des 7 clauses conjonctives correspondant à 7 ligne où A=1.

(3) Cette formule n'est pas valide (tautologie), car (c=1,n=1,w=1) rend A faux.

(4) Cette formule est satisfiable, car il y a 7 interpretations qui rend A vrai.

(5) Non, car $((c \to n) \wedge w) \to \neg c$ n'est pas une tautologie, on ne peut pas montrer que l'accusé est coupable.

2. Il faut ajouter la proposition $(w \to \neg n)$ et montrer que $((c \to n) \wedge w \wedge (w \to \neg n)) \to \neg c$ est une tautologie. Par conséquent l'accusé n'est pas coupable.

Deux raisonnements possibles :

• Par la table de vérité

Dans la table ci-dessus, ajouter une colonne $(w \to \neg n)$, et montrer $((c \to n) \wedge w \wedge (w \to \neg n)) \to \neg c$ est une tautologie.

c	n	w	$c \to n$	$w \to \neg n$	$(c \to n) \wedge w \wedge (w \to \neg n)$	A
0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

• Par les règles d'inférence (la déduction)

1. w
2. $w \to \neg n$
3. $\neg n$
4. $c \to n$
5. $\neg n$

Exercice 4 (4 pts)

Soient {→, ⊥ } où → est le connecteur « implication », et ⊥ est la formule atomique Faux (ex. $p \vee q = p$, $p \wedge \bot = \bot$, $\bot \rightarrow p = \top$). Montrer que {→, ⊥ } est suffisant pour exprimer toute formule logique (il suffit de représenter ¬ et ∨ par {→, ⊥ }).

Solution :

Deux raisonnements possibles :

• Par la table de vérité

On essaie les différentes combinaisons de p, ⊥, →, et on a trouvé : $\neg p = p \rightarrow \bot$

p	⊥	¬p	**p→⊥**
0	0	1	1
1	0	0	0

On essaie les différentes combinaisons de p, q, ¬p , ¬q, ⊥, →, et on a trouvé : $p \vee q = \neg p \rightarrow q = (p \rightarrow \bot) \rightarrow q$

p	q	⊥	p ∨ q	¬p→q
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

• Par l'équivalence des formules

- $\neg p = \neg p \vee \bot = p \rightarrow \bot$
- $p \vee q = \neg\neg p \vee q = \neg p \rightarrow q = (p \rightarrow \bot) \rightarrow q$

Exercice 5 (4 pts)

Cette fois-ci, Hercule était perdu dans le désert, et arrivait à une croisée à partir de laquelle son chemin se séparait en deux.

Chaque chemin pouvait soit mener à une oasis, soit se perdre dans un désert profond, et chaque chemin était gardé par un sphinx :

- le sphinx de droite disait : " Au moins un des deux chemins conduit à une oasis "
- le sphinx de gauche disait : " Le chemin de droite se perd dans le désert "

Hercule savait que soit les deux sphinx disaient la vérité, soit ils mentaient tous les deux. Il souhaitait savoir si un des deux chemins menait à une oasis et si oui, lequel devait-il choisir ?

En répondant aux questions ci-dessous, vous aiderez Hercule à trouver l'unique solution, que les sphinx mentent ou non.

Questions :

1. Modéliser le problème en formule propositionnelle.
2. Quel est le chemin qui mène à l'oasis ? Justifier cette réponse par un raisonnement basé soit sur une table de vérité, soit sur la règle d'inférence.

Solution :

1. Modéliser le problème

(1) Poser deux propositions atomiques :

• g : il y a une oasis à gauche; d: il y a une oasis à droite

(2) Exprimer les paroles de deux sphinx :

• $g \vee d$: Au moins un des deux chemins conduit à une oasis; $\neg d$: Le chemin de droite se perd dans le désert

(3) Exprimer la proposition « Hercule savait que soit les deux sphinx disaient la vérité, soit ils mentaient tous les deux » :

- $\Sigma = ((g \vee d) \wedge \neg d) \vee (\neg(g \vee d) \wedge d))$; ou bien $\Sigma = (g \vee d) \leftrightarrow \neg d$

2. Deux raisonnements possibles :

(1) Par la table de vérité.

g	d	$g \vee d$	$\neg d$	$(g \vee d) \leftrightarrow \neg d$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

La seule interprétation qui rend Σ vrai est (g=1, d=0) (l'oasis est à gauche).

(2) Raisonnement par la règle d'inférence (deduction)

• Soit avec $\Sigma = ((g \vee d) \wedge \neg d) \vee (\neg(g \vee d) \wedge d))$

Cas 1 :

1. $(g \vee d) \wedge \neg d$

2. $\neg d$

3. $g \vee d$

4. g

Cas 2 :

1. $\neg(g \vee d) \wedge d$

2. d

3. $\neg(g \vee d) = \neg g \wedge \neg d$

4. $\neg d$

5. 2 et 4 en contradiction

Donc, $\Sigma \models g \wedge \neg d$, ($g = 1$, $d = 0$, l'oasis est à gauche)

• Soit avec $\Sigma = (g \vee d) \leftrightarrow \neg d$

Cas 1:

1. $\neg d$ (l'hypothèse)

2. $(g \vee d) \leftrightarrow \neg d$

3. $(g \vee d)$

4. g

Cas 2 :

1. d (l'hypothèse)

2. $(g \vee d) \leftrightarrow \neg d$

3. $\neg(g \vee d) = \neg g \wedge \neg d$

4. $\neg d$

5. 1 et 4 en contradiction

Donc, $\Sigma \models g \wedge \neg d$, ($g = 1$, $d = 0$, l'oasis est à gauche)